目　　录

第一章　矩阵本征值问题

引　　言

本章从理论和实际两个方面来论述矩阵本征值问题．其中理论是为了直接用于后面几章（引入谱投影，摄动论，迭代加细技巧，及后验误差界）的要求来描述的；而关于大型稀疏阵的方法，是作为在 Krylov 子空间上的投影方法来分析的．本章有如下双重目的：

（1）研究计算与微分算子或积分算子离散逼近有关的矩阵本征元问题的实用方法；

（2）首先就有限维空间算子的简单内容来描述贯穿全书所使用的理论工具，以便读者熟悉它们．

关于矩阵本征值问题的主要参考书仍然是 Wilkinson（1965）．关于对称矩阵本征值问题的现代处理，Parlett（1980a）包含了相当近期的资料，关于一般矩阵计算的基本论述，读者可参阅Stewart（1973a）．

1.　$\mathbb{C}^N$中的本征值问题

1.1 记号

我们先介绍在本章所使用的有关矩阵及向量的一般记号和定义．分量为(ξ_i)的列向量x的复N维空间记为$\mathbb{C}^N$；分量为$(\bar{\xi}_i)$的行向量记为x^H．

关于$\mathbb{C}^N$中范数的主要例子，我们将引入欧几里得范数$\|x\|_2=(\Sigma_{i=1}^N|\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}$，和范数$\|x\|_1=\Sigma_{i=1}^N|\xi_i|$，及最大范数$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant N}|\xi_i|$．如不加特殊说明，$\|\cdot\|$就是$\mathbb{C}^N$中一个

任意的向量范数。

在$\mathbb{C}^N$中，内积是$(x, y)=y^H x$。如果$(x, y)=0$，那么，x与y是正交的。设$\{x_i\}_1^N$是$\mathbb{C}^N$的基，即N个无关向量的集合．基是标准正交的，当且仅当

$$(x_i, x_j)=\delta_{ij}, \qquad i, j=1, \cdots, N.$$

于是，x在标准正交基下的展开式是$x=\Sigma_{i=1}^N (x, x_i)x_i$。基不是标准正交时，展开式$x=\Sigma_{i=1}^N \xi_i x_i$的系数$\xi_i$能够用$\xi_i=(x, y_i)$，$i=1, \cdots, N$表示，其中$\{y_i\}_1^N$是$\mathbb{C}^N$的基，且使

$$(x_i, y_j)=\delta_{ij}, \quad i, j=1, \cdots, N. \qquad (1.1)$$

$\{y_i\}_1^N$的存在性与唯一性的证明留给读者。由（1.1）所定义的基$\{y_i\}_1^N$称为$\{x_i\}_1^N$的伴随基，且称$\{x_i\}$和$\{y_i\}$构成了$\mathbb{C}^N$中元素的一个双正交系。

习题

1.1 在$\mathbb{C}^N$中考虑基

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \qquad x_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}.$$

验算伴随基是

$$y_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}, \qquad y_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

计算展开式$x=\xi_1 x_1+\xi_2 x_2$，其中

$$x=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

设$A=(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,N}$是复方阵，$A^H=(\overline{a_{ji}})_{i,j=1,\ldots,N}$是$A$的共轭转置矩阵，$A$是正规阵，当且仅当$AA^H=A^H A$。$A$

是Hermite阵，当且仅当$A=A^H$；当A是 Hermite 阵时，对于$x\in \mathbb{C}^N, x^HAx$是实的。Hermite 阵A是正定的（或半正定的），当且仅当

$$x\neq 0\Rightarrow x^HAx>0 \qquad (\text{或} x^HAx\geqslant 0).$$

矩阵Q是酉矩阵，当且仅当$Q^HQ=I$。这时，$Q^{-1}=Q^H$，且$\|x\|_2=\|Qx\|_2$。

在$\mathbb{C}^N$的典范基下，方阵A表示一个线性算子（或变换）。零空间是$\mathrm{Ker}A=\{x\in\mathbb{C}^N;\ Ax=0\}$及值空间$\mathrm{Im}A=\{y\in\mathbb{C}^N;\ y=Ax$ 对 $x\in\mathbb{C}^N\}$。给定$\mathbb{C}^N$上的一种向量范数$\|\cdot\|$，则A的算子（或矩阵）范数是

$$\|A\|:=\max_{0\neq x\in\mathbb{C}^N}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|.$$

长方形阵的范数能够相应地定义。容易验证

$$\|A\|_1:=\max_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1=\max_{1\leqslant j\leqslant N}\sum_{i=1}^{N}|a_{ij}|$$

及

$$\|A\|_{\infty}=\max_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}|=\|A^H\|_1.$$

算子范数满足$\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|$。正则矩阵$A$的条件数（相对于逆矩阵）是$K(A):=\|A\|\|A^{-1}\|$。

习题

1.2 证明$K(A)\geqslant 1$。

1.3 对于酉矩阵Q，证明$\|Qx\|_2=\|x\|_2$，$x\in\mathbb{C}^N$，及

$$K_2(Q)=\|Q\|_2\|Q^H\|_2=1.$$

于是酉矩阵有最小的条件数。

矩阵P是投影，当且仅当它是幂等的：$P^2=P$。它是沿$W:=\mathrm{Ker}P$在子空间$M:=\mathrm{Im}P$上（或平行于W在M上）的投影：它定义了直和$\mathbb{C}^N=M\oplus W$。M与W是互补子空间。反之，分解$\mathbb{C}^N=M\oplus W$定义了沿W在M上的唯一的投影。

我们定义M的正交补$M^\perp$为

$$M^\perp=\{y\in\mathbb{C}^N;\ (x,y)=0\text{ 对所有的 }X\in M\}.$$

M与$M^\perp$是互补子空间的特殊情况。在这种情况下，对应的直和记为$\oplus$：$\mathbb{C}^N=M\oplus M^\perp$是$\mathbb{C}^N$的正交直和分解。

沿$M^\perp$在M上的投影是在M上的正交投影P_M。因此，对于$x\in\mathbb{C}^N$，$\|x-P_Mx\|_2=\min_{y\in M}\|x-y\|_2$。

对于任何方阵A，均有$\mathrm{Ker}(A^H)=(\mathrm{Im}A)^\perp$且$\mathrm{Im}(A^H)=(\mathrm{Ker}A)^\perp$.

习题

1.4 定义$Q=I-P$，证明Q是沿M在W上的投影。

1.5 $\mathbb{C}^N=M\oplus W$。设P是沿W在M上的投影。证明P^H是沿$W'=M^\perp$在$M'=W^\perp$上的投影。

1.6 证明P是正交投影，当且仅当$P=P^H$。

1.2 定义及性质

设A是N阶实的或复的方阵。我们考虑本征值问题：

$$\boxed{\text{求 }\lambda\in\mathbb{C},\ 0\neq\varphi\in\mathbb{C}^N,\text{ 使得 }A\varphi=\lambda\varphi}.$$

称λ是A的本征值，φ是A的本征向量，λ和φ是A的本征元。

复数λ是A的本征值，当且仅当$A-\lambda I$是奇异的。因此，A的任何本征值是本征多项式$\pi(\lambda)=\det(\lambda I-A)$的根，$\det(\lambda I-A)$是$\lambda I-A$的行列式。

如果$A-\lambda I$是奇异的，那么，$A^H-\bar{\lambda}I$也是奇异的，且$\bar{\lambda}$是

A^H的本征值。因此，如果$A\varphi=\lambda\varphi$，那么就存在$\psi\neq 0$使得$A^H\psi=\bar{\lambda}\psi$：$\psi$是$A^H$的相关于$\bar{\lambda}$的本征向量。类似地，$\psi^H A=\lambda\psi^H$：称$\psi$是$A$的相关于$\lambda$的左本征向量。

根据Gauss—d'Alembert定理，N次本征多项式$\pi(\lambda)$有N个复根，其中有些可能是重复的。这些根是A的本征值。如果一个根λ重复了m次，那么，称λ是代数重数为m的重本征值。如果$m=1$，则称这个本征值是单的。

设λ_1，λ_2，…，λ_k（$1\leqslant k\leqslant N$）是A的相异本征值。由A的全部本征值构成的集$\sigma(A):=\{\lambda_i\}_1^k$是$A$的谱。$A$的谱半径是$r_\sigma(A):=\max_{1\leqslant i\leqslant k}|\lambda_i|$。

注记 在数值线性代数中，往往把$r_\sigma(A)$记为$\rho(A)$，而这个记号可能与矩阵A的预解集发生混淆，A的预解集是使得$A-zI$为正则的复数z的集合（参阅第二章）。

习题

1.7 如果λ是A的相应于本征向量φ的本征值，证明对于任何整数$k>0$，λ^k是A^k的相应于本征向量φ的本征值。

1.8 证明：如果P是幂等的，那么，$\sigma(P)\subseteq\{0, 1\}$。

1.9 如果对于某整数$k>0$，$D^k=0$，那么矩阵D是幂零的。证明：$\sigma(D)=\{0\}$，因而$r_\sigma(D)=0$。

1.10 证明：如果Q是酉矩阵且$\lambda\in\sigma(Q)$，那么$|\lambda|=1$。

1.11 证明：对于任何一种矩阵范数，$r_\sigma(A)\leqslant\|A\|$。

1.12 设λ是A的具有本征向量φ的本征值，证明：$\lambda=\varphi^H A\varphi/\varphi^H\varphi$。$\lambda$是$A$的以$\varphi$为基础的Rayleigh商。

1.13 由习题1.12推出：Hermite阵的本征值是实的，正定（或半正定）矩阵的本征值是正的（或非负的）。

1.14 设φ_1是A的对应于λ_1的右本征向量，ψ_2是相应于

$\lambda_2 \neq \lambda_1$的左本征向量，证明：$\psi_2^H \varphi_1 = 0$（提示：计算$\psi_2^H A \varphi_1$）。推出：如果A是Hermite阵，相应于相异本征值的本征向量是正交的这一结论。

相应于λ的本征向量是$(A-\lambda I)x=0$的解。它们张成零空间$\mathrm{Ker}(A-\lambda I)=\{x \in \mathbb{C}^N; (A-\lambda I)x=0\}$，称之为本征空间；它的维数是$\lambda$的几何重数g，即相应于$\lambda$的无关的本征向量的最大个数。而且，能够证明$g \leqslant m$。

引理1.1 设$\varphi_1, \cdots, \varphi_K$是$A$的对应于相异本征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_K$的本征向量，则向量$\{\varphi_i\}_1^K$是无关的。

证明　证明是关于K用归纳法。对于$K=1$，$\varphi_1 \neq 0$且$\{\varphi_1\}$是无关的。假定对于$K-1$个向量，定理成立。设$X=(\varphi_1, \cdots, \varphi_{K-1})$是$N\times(K-1)$矩阵，它的列是本征向量$\varphi_1, \cdots, \varphi_{K-1}$。假定$\varphi_K$是$\{\varphi_i\}_1^{K-1}$的线性组合，那么，存在向量$u \neq 0$，$u \in \mathbb{C}^{K-1}$使得$\varphi_K = Xu$。于是$\lambda_K\varphi_K = A\varphi_K = AXu = X\Delta u$，其中$\Delta$是对角阵$\Delta=\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{K-1})$且$0=\lambda_K\varphi_K - X\Delta u = X(\lambda_K I-\Delta)u$。由于$\lambda_K$与其它的本征值相异，所以$\lambda_K I-\Delta$是正则的，$v=(\lambda_K I-\Delta)u \neq 0$，但$Xv=0$。这与向量$\{\varphi_i\}_1^{K-1}$的无关性矛盾。　□

现在转入下面的理论问题：借助相似变换把A化为较简单的形式。

1.3 谱分解

设$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N$是$A$的$N$个重本征值，按照它们的代数重数来计数。例如，重数为m_1的λ_1重复了m_1次：$\mu_1=\cdots=\mu_{m_1}=\lambda_1$，$\mu_{m_1+1}=\cdots=\cdots\lambda_2$。

1.3.1 A是可对角化的

A是可对角化的，当且仅当它相似于对角矩阵。在本节中，假定A是可对角化的。设D是对角矩阵$D=\mathrm{diag}(\mu_1, \cdots,$

μ_N)。

定理1.2 A是可对角化的，当且仅当A有N个无关的本征向量$\{\varphi_i\}_1^N$。这时，A能够被分解为

$$A = VDV^{-1} \qquad (1.2)$$

其中V的第i列（或V^{-1}的第i行）是相应于μ_i（或$\bar{\mu}_i$）的A的本征向量φ_i（或A^H的ψ_i）。

证明 如果有N个无关的本征向量$\{\varphi_i\}_1^N$，并设V是列为φ_1，…，φ_N的正则矩阵，$V^{-1}V = I$蕴涵V^{-1}的行ψ_i^H满足关系$\psi_i^H\varphi_j = \delta_{ij}$，i，j=1，…，$N$。注意到$A\varphi_i = \mu_i\varphi_i$，i=1，…，$N$，可以写成$AV = VD$，或等价地写为$A = VDV^{-1}$：$A$是可对角化的。$AV = VD$等价于$V^{-1}A = DV^{-1}$，即$A^H(V^{-1})^H = (V^{-1})^H D^H$或$A^H\psi_i = \bar{\mu}_i\psi_i$，i = 1，…，$N$：$\psi_i$是$A^H$的由$\psi_i^H\varphi_j = \delta_{ij}$(i，j=1，…，$N$)规范化的本征向量。并注意$\{\psi_i\}_1^N$是$\{\varphi_i\}_1^N$的伴随基，其逆留给读者证明。 □

习题

1.15 证明具有N个相异本征值的任何矩阵是可对角化的。

1.16 证明：借助于酉相似变换：$A = QDQ^H$，任何Hermite矩阵是可对角化的，本征向量基是标准正交的。

1.17 如果每个重数为m_i的本征值λ_i恰好有m_i个无关的本征向量，i = 1，…，K，那么，称矩阵A是非亏损的。证明A是非亏损的，当且仅当A是可对角化的。

对于 i=1，2，…，K，设$M_i = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$是相应于相异本征值$\lambda_i$的本征空间，$\lambda_i$的重数$m_i$．由假设$\dim M_i = m_i$且$X = \oplus_{i=1}^K M_i$。考虑分解$X = M_i \oplus (\oplus_{j\neq i} M_j)$。相应于$\lambda_i$的本征投影$P_i$是$\mathbb{C}^N$沿$\oplus_{j\neq i} M_j$在本征空间$M_i$上的投影。显然，

$$\sum_{i=1}^{K} P_i = I\ ,\ P_iP_j = \delta_{ij}P_i$$

及

$$AP_i = P_iA = P_iAP_i = \lambda_iP_i,\quad i=1,\ \cdots,\ K. \tag{1.3}$$

定理1.3 任何可对角化的矩阵A有谱分解

$$A = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i P_i \tag{1.4}$$

证明　(1.3) 与 (1.4) 的证明留给读者。谱分解 (1.4) 是唯一的：除了每个本征空间M_i中基的选取外，分解 (1.2) 实质上是唯一的。 □

习题

1.18　如果A是Hermite阵，P_i是正交投影且$\|P_i\|_2=1$，证明：$M_i^\perp = \oplus_{j\neq i} M_j$。

1.19　设λ是单的，且其相应的右本征向量φ，左本征向量ψ，使得$\|\varphi\|_2=\psi^H\varphi=1$，证明本征投影$P$是线性算子$\xi\in\mathbb{C}^N\mapsto P\xi=(\psi^H\xi)\varphi$的矩阵（在典范基下）。（提示：由$P$定义的$M=\{\varphi\}$的补子空间是$\{\psi\}^\perp=\{z\in\mathbb{C}^N:\psi^Hz=0\}$）。证明：$\|P\|_2=\|\psi\|_2\geqslant 1$，并且证明$P=\varphi\psi^H$。

1.20　设A是可对角化的，证明A^H也是可对角化的，且它的谱分解是$A^H=\Sigma_{i=1}^K\bar{\lambda}_i\ P_i^H$。推导$\lambda_i$与$\bar{\lambda}_i$的重数是相同的.

1.21　再考虑右本征向量基$\{\varphi_i\}_1^N$及左本征向量基$\{\psi_i\}_1^N$. 设λ是m重本征值，其相应的本征空间是$M=\{\varphi_i,\ i\in I\}$，其中I的基数等于m。并且考虑补子空间$W=\{\varphi_i;\ i\notin I\}$。证明$W=\{\psi_i;\ i\in I\}^\perp=\{z\in\mathbb{C}^N;\ \psi_i^Hz=0,\ i\in I\}$。于是

相应于λ的本征投影P是$P=\Sigma_{i\in I}\varphi_i\psi_i^H$.

例1.1

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

有本征值$\lambda_1=3$，$\lambda_2=-1$及其相应的本征向量

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix},\qquad \varphi_2=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}.$$

$$A^H=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

有本征向量

$$\psi_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix},\qquad \psi_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

相应于λ_1的本征投影是

$$P_1=\varphi_1\psi_1^H,\qquad P_1\xi=\frac{1}{2}\left(\xi_1+\frac{1}{2}\xi_2\right)\varphi_1.$$

类似地，对于λ_2，

$$P_2=\varphi_2\psi_2^H,\quad P_2\xi=\frac{1}{2}\left(\xi_1-\frac{1}{2}\xi_2\right)\varphi_2.$$

最后，A具有分解$A=3P_1-P_2$.

投影P_1是沿$W=\{\psi_1\}^\perp$在$M=\{\varphi_1\}$上的投影（参见图1.1）.

因为对角形式非常容易处理，所以分解（1.2）是有吸引力的．然而在实际中，虽然矩阵V是非奇异的，它相对于求逆也可能是病态的，从而使$V^{-1}AV$构造起来非常困难．因此，我们期望把相似变换限制到一类良态矩阵上，例如酉矩阵，它有等于1的条件数.

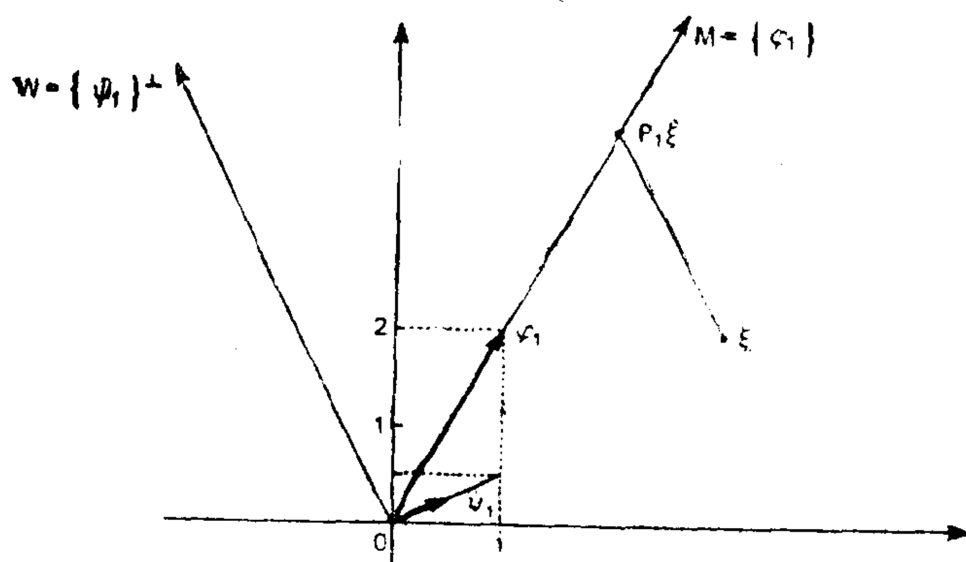


图 1.1

1.3.2 酉相似变换

定理1.4 (Schur) 设A有本征值$\{\mu_i\}_1^N$，以它们的代数重数计数．则存在一个酉矩阵Q使得Q^HAQ是上三角的，其对角元素依次为μ_1，μ_2，…，μ_N．

证明 证明是关于N使用归纳法．对于$N=1$，定理成立．假设对于$N-1$阶矩阵，定理成立．我们利用一种压缩技巧：知道了本征值μ_1及本征向量φ_1，引入一个$N-1$阶矩阵，使这个矩阵的本征值除了μ_1外和A的本征值是相同的．

假设$\|\varphi_1\|_2=1$．存在一个$N\times(N-1)$矩阵U使得(φ_1, U)是酉矩阵；U的列与φ_1正交，即$U^H\varphi_1=0$．因为$A\varphi_1=\mu_1\varphi_1$，所以，

$$A(\varphi_1, U)=(\mu_1\varphi_1,\ AU)$$

且

$$(\varphi_1, U)^HA(\varphi_1, U)=\begin{pmatrix}\varphi_1^H\\ U^H\end{pmatrix}(\mu_1\varphi_1,\ AU)$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_1 & \varphi_1^H AU \\ 0 & U^H AU \end{pmatrix}.$$

右端矩阵的本征值是A的本征值，因此，$U^H AU$有本征值μ_2，…，μ_N. 根据归纳法假设，$U^H AU$酉相似于对角元素是μ_2，…，μ_N的上三角阵. 从而得到所要的结果. □

注记（1）上述证明的是理论上的存在性。在第3节中，对某些类矩阵给出构造性算法。这算法称为QR法.

（2）如果A是实的，则我们希望利用实的酉(即正交的)变换。这时，能够把A简化为实的块上三角阵，其中对角块最多是2×2的，2×2对角块只有共轭本征值。

习题

1.22 证明：三角正规矩阵是对角矩阵。

1.23 证明：矩阵A是正规的，当且仅当存在酉矩阵Q，使得$Q^H AQ$是对角的。

1.24 证明：对于正规矩阵，$r_\sigma(A)=\|A\|_2$.

1.25 证明：正规矩阵是幂零的，当且仅当$A=0$。

1.26 对于任意的矩阵A，证明：$\|A\|_2^2=r_\sigma(A^H A)$.

有可能使用非酉变换化为三角阵，而将一般的矩阵化成较简单的Jordan形式.

1.3.3 Jordan标准形

现在假设λ_i的代数重数为m_i，且有少于m_i个无关的本征向量，因此，λ_i的几何重数g_i，满足$g_i<m_i$。为了得到$\mathbb{C}^N$的基，必须使本征向量集完全化。这能够按照如下来作。

定义$M_i:=\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)^{m_i}$， $i=1,\cdots,K$.

如果$AM\subseteq M$，那么称子空间M在A下是不变的。例如，本征空间$\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)$是不变的：每个本征方向是不变的。

定理1.5 (Jordan) 对于 $i=1,\cdots,K$，子空间M_i在A下

是不变的，$\dim M_i = m_i$且$X = \oplus_{i=1}^{K} M_i$，那么，在M_i中存在一个基，使得限制在M_i上的A用相应于λ_i的m_i阶的Jordan单元来表示：

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \Bigg\updownarrow m_i$$

其中ε是零或1。

这个定理说明了Jordan基的存在．证明是一般化的，可以在任何一本线性代数的教科书中找到．Jordan标准形是块对角的．它有对应于相异本征值的K个对角单元J_i，$i=1,\cdots,K$。每个单元J_i由一个或几个Jordan块组成，而Jordan块则由为零的ε来确定。Jordan形除了Jordan块的次序外是唯一的。

称M_i为相应于λ_i的不变子空间（或广义本征空间)。M_i的基由相应于λ_i的g_i个无关的本征向量组成，用广义本征向量（或主向量）完备化得到m_i个无关的向量。主向量是整体不变的：它们在A下仍在M_i中，但是方向改变了。主向量x_k^i可由前一个向量x_{k-1}^i（主向量或本征向量）靠解下述方程来计算：

$$(A-\lambda_i I)x_k^i = x_{k-1}^i .$$

关于Jordan基结构的全面描述，参阅Wilkinson (1965)。

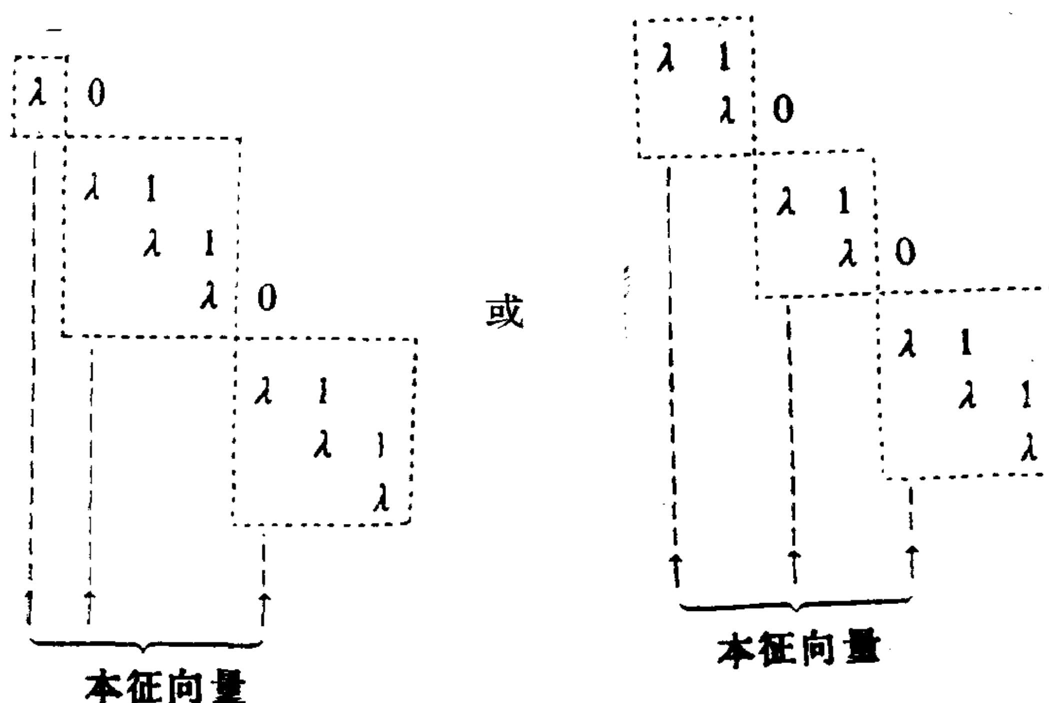
定理1.5的证明表明了

$$\begin{aligned}\{0\} \subset \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I) \subset \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)^2 \subset \cdots \\ \subset \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)^{l_i} = \cdots = \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)^{m_i} \\ = M_i .\end{aligned}$$

包含是真包含，直到达到M_i。$1 \leqslant l_i \leqslant m_i$；$l_i$是使得$M_i = \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)^l$[或等价地，$(A-\lambda_i I)^{l_i} M = \{0\}$]的最小数．

称它是λ_i的陡度（或指标、高度）。如果$l_i=1$，那么称λ_i是半单的：不变子空间简化为本征子空间。

例1.2 设λ是一个本征值，它的代数重数$m=7$，几何重数$g=3$，及陡度$l=3$。相应于λ的Jordan单元有两种可能，每个Jordan单元由三块组成：



有三个本征向量及四个主向量，并且，因为$l=3$，所以有不多于两个的逐次主向量：对于不变子空间中的任何x，$(A-\lambda I)^3x=0$。每个本征向量确定一个块，块具有阶数1，3，3或2，2，3．

习题

1.27 计算

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

的本征值及 Jordan 基。

1.28 在 Jordan 单元 J_i 中，在第一个上三角中恰好有 g_i-1 个零（不必相邻）而相邻的零不多于 l_i-1 个。

1.29 证明：$\lim\limits_{n\to}A^n=0$，当且仅当 $r_\sigma(A)<1$（提示：利用 Jordan 形）.

1.30 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}=r_\sigma(A)$。

对于一般矩阵，把本征投影的概念推广为谱投影：P_i 是沿 $\oplus_{j\neq i}M_j$ 在不变子空间 M_i 上的投影。仍然有 $\Sigma_{i=1}^K P_i=I$，$P_iP_j=\delta_{ij}P_i$，及

$$AP_i=P_iA=P_iAP_i=\lambda_iP_i+D_i,\quad i=1,\cdots,K, \tag{1.5}$$

其中 D_i 是使得 $D_i^{l_i}=0$ 的幂零矩阵。

定理1.6 一般矩阵 A 有谱分解

$$A=\sum_{i=1}^{K}(\lambda_iP_i+D_i). \tag{1.6}$$

习题

1.31 用 A 的Jordan标准形证明（1.5）。给定 A 的Jordan形式，证明（1.6）是唯一的.

1.32 证明：如果 $i\neq j$，那么 $P_iD_j=D_jP_i=\delta_{ij}D_j$，$D_iD_j=0$.

1.33 证明$\oplus_{j\neq i} M_j = \mathrm{Im}(A-\lambda_i I)^{l_i}$。推出$P_i$是相应于分解$\mathbb{C}^N = \mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)^{l_i} \oplus \mathrm{Im}(A-\lambda_i I)^{l_i}$的投影这一结论.

1.34 证明 A^H 的谱分解是

$$A^H = \sum_{i=1}^{K} (\overline{\lambda}_i P_i^H + D_i^H).$$

导出λ_i与$\overline{\lambda}_i$的重数及陡度相同的结论.

1.35 设λ是单本征值，具有相应的右本征向量φ及左本征向量ψ，证明谱投影是沿$\{\psi\}^\perp$在$\{\varphi\}$上的投影。

1.36 设$\{x_i\}_1^N$是A的 Jordan 基。利用习题1.34说明在伴随基$\{y_i\}_1^N$下A^H的形式。例如，考虑

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 本征值问题的稳定性

当用数值方法求解问题时，首要的是：知道数据中微小的变化在解中是否产生微小（或大）的变化。如果是的话，那么称这个问题是稳定的或良态的（或不稳定的或病态的）。稳定的与不稳定的问题之间通常没有严格的界限。在任何一种情况下，不稳定性的某种适当的度量将是有用的，并且这种度量将进入大多数的误差估计中。这种不稳定的度量通常称为条件数。

作为一个基本例子，可以考虑$K(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$，它是正则矩阵A相对于求逆的条件数。从数学观点看，方程$Ax = y$有唯一确定的解$x = A^{-1}y$，当且仅当A是正则的。但在数值分析中，情况变得更复杂了。数值分析者要求解不仅是唯一的，而且，在某种程度上，对于数据中的摄动是不灵敏的。如果使

A摄动ΔA，y摄动Δy，那么就引起一个摄动解$x+\Delta x$使得：

$$若\|\Delta A\|<\frac{1}{\|A^{-1}\|},则\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\leqslant\frac{K(A)}{1-\|A^{-1}\|\|\Delta A\|}\left[\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|}+\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right].$$

因此对于解x的相对灵敏度，$K(A)$是一个好的度量。这说明了在欧几里得范数下，条件数为1的酉矩阵在数值分析中起着中心的作用。

现在转入本征值问题的稳定性。我们在第3节中将要介绍的数值方法引出了A的近似本征元的集合，这些近似本征元是摄动矩阵$A'=A+H$的精确本征元。用H表示的A与A'的本征元之间的差，其界在第4节中给出。

如果本征值是本征多项式的病态根，那么，它们可能是病态的。众所周知，一个多项式的重根可以是病态的。例如，$\lambda^2-2\lambda+(1-10^{-8})$有根$1\pm10^{-4}$。如果把常数项变为1，那么两个根全都变为1，因此，系数改变了10^{-8}，在根中引起的改变是10^4倍。但是分离好的根也可以是病态的。对于本征值说来，这可以对应于本征向量的一个几乎退化基。在Wilkinson（1965，P.90—91）中可以看到一个非常明了的例子，这个例子是20阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}20 & 20 & & 0\\ & 19 & \ddots & \\ & & \ddots & 20\\ & & 2 & 20\\ 0 & & & 1\end{pmatrix}.$$

借助于摄动技巧，在此，我们研究摄动对单本征值λ及其本征向量φ的影响。设A有一个单本征值λ，具有右本征向量φ及左本征向量ψ，使得$\|\varphi\|_2=\varphi^H\psi=1$。谱投影是$P=\varphi\psi^H$。

把限制到不变子空间$\{\psi\}^\perp$上的算子$A-\lambda I$记为$\hat{A}_\lambda$；$\hat{A}_\lambda$

$:= (A-\lambda I)|_{\{\psi\}^{\perp}}$. 因为 λ 是 A 的单本征值，所以 $\hat{A}_{\lambda}$ 是双射。把表示算子 $\hat{A}_{\lambda}^{-1}(I-P)$ 的矩阵记为 S。S 是 $(A-\lambda I)$ 相对于谱投影 P 的广义逆：

$$S(A-\lambda I)=(A-\lambda I)S=I-P.$$

设给定摄动 H：$A' := A+H$ 及 $\varepsilon := \|H\|_2$，假设 ε 很小，λ 与 φ 是 A' 的近似本征元；A' 的相应剩余向量是

$$A'\varphi-\lambda\varphi=(A'-A)\varphi=H\varphi.$$

取 $\varepsilon' := \|H\varphi\|_2$，$\varepsilon' \leqslant \varepsilon$.

定理1.7 借助上述定义，如果 ε 足够小，那么，存在 A' 的单本征值 λ'，λ' 有由 $\psi^H\varphi'=1$ 规范化的本征向量 φ'，使得

$$\lambda'=\lambda+\psi^H H\varphi+O(\varepsilon^2), \tag{1.7}$$

$$\varphi'=\varphi-SH\varphi+O(\varepsilon^2). \tag{1.8}$$

证明 定义 $L=-(1/\varepsilon)H$，$\|L\|_2=1$。$A'=A-\varepsilon L$ 有本征元 λ' 及 φ'，对于足够小的 ε，这些本征元可以表示为 ε 的收敛级数。设 $\lambda' := \sum_{i=0}^{\infty}\nu_i\varepsilon^i$ 及 $\varphi' := \sum_{i=0}^{\infty}\eta_i\varepsilon^i$。在形式恒等式

$$(A-\varepsilon L)\Big(\sum_i \eta_i\varepsilon^i\Big)=\Big(\sum_i \nu_i\varepsilon^i\Big)\Big(\sum_i \eta_i\varepsilon^i\Big)$$

中令 ε 的同次幂相等，能够累次地计算出系数 ν_i 及 η_i。令常数项相等得出 $A\eta_0=\nu_0\eta_0$；选取解 $\nu_0=\lambda$，$\eta_0=\varphi$。

令 ε 的系数相等，给出方程

$$(A-\lambda I)\eta_1=\nu_1\varphi+L\varphi.$$

用 ψ^H 左乘，得到

$$\psi^H(A-\lambda I)\eta_1=0=\nu_1\psi^H\varphi+\psi^H L\varphi.$$

因而

$$\nu_1=-\psi^H L\varphi.$$

方程

$$(A-\lambda I)\eta_1=\nu_1\varphi+L\varphi$$

的右端在$\{\psi\}^{\perp}=(I-P)\mathbb{C}^N$内。定义$\eta_1$为这个方程在$\{\psi\}^{\perp}$内的唯一解；即

$$\eta_1=S(\nu_1\varphi+L\varphi),\quad P\eta_1=0\ .$$

注意，$S\varphi=S(I-P)\varphi=0$蕴涵$\eta_1=SL\varphi$.

使ε^2的系数相等给出方程

$$(A-\lambda I)\eta_2=\nu_2\varphi+L\eta_1+\nu_1\eta_1,$$

由此得出$\nu_2=-\psi^H L\eta_1$及$\eta_2=S[\nu_1\eta_1+L\eta_1]$.利用$\varepsilon^i$的系数相等得到：对于 i>2，

$$\nu_i=-\psi^H L\eta_{i-1},$$

$$\eta_i=S\left\{\sum_{k=1}^{i-1}\nu_k\eta_{i-k}+L\eta_{i-1}\right\},\quad P\eta_i=0\ .$$

对于足够小的ε，容易证明这两个级数几何收敛：

$$\left|\lambda'-\sum_{k=0}^{i}\nu_k\varepsilon^k\right|=O(\varepsilon^{i+1}),$$

$$\left\|\varphi'-\sum_{k=0}^{i}\eta_k\varepsilon^k\right\|_2=O(\varepsilon^{i+1}).$$

这个结果也是引理3.30的一种特殊情形。因为 $i\geqslant 1$时，$P\eta_i=0$，所以φ'使得$P\varphi'=P\varphi=\varphi$，或等价地，$\psi^H\varphi'=1$.

因为

$$\nu_0+\varepsilon\nu_1=\lambda+\psi^H H\varphi,\quad \eta_0+\varepsilon\eta_1=\varphi-SH\varphi,$$

所以，在上述方程中令 i=1，得到（1.7）和（1.8）．□

习题

1.37 设π是在$\mathrm{Im}(A-\lambda I)$上的正交投影．$A-\lambda I$的

Moore-Penrose逆是$(A-\lambda I)^{+}=[(A-\lambda I)_{\uparrow\{ker(A-\lambda I)\}^{\perp}}]^{-1}\pi$.
$x^{+}=(A-\lambda I)^{+}b$是

$$(A-\lambda I)x=b$$

的具有最小欧几里得范数的最小二乘解（参阅Stewart，1973a）.
证明$S=(A-\lambda I)^{+}$，当且仅当A是Hermit阵。

在第3.5节中，这种摄动技巧将作为计算本征元的迭代加细过程来研究。

2.1　λ的条件数

由（1.7）得到

$$|\psi^H H\varphi|\leqslant\varepsilon'\|\psi\|_2 \text{ 及 } |\lambda'-\lambda|\leqslant\varepsilon'\|\psi\|_2+O(\varepsilon^2).$$

所以，如果$\|\psi\|_2$是大的，λ就是病态的．如果ψ由$\psi^H\varphi=\|\varphi\|_2=1$规范化，那么，$\|\psi\|_2$就是λ的条件数；所以$\|\psi\|_2\geqslant 1$．

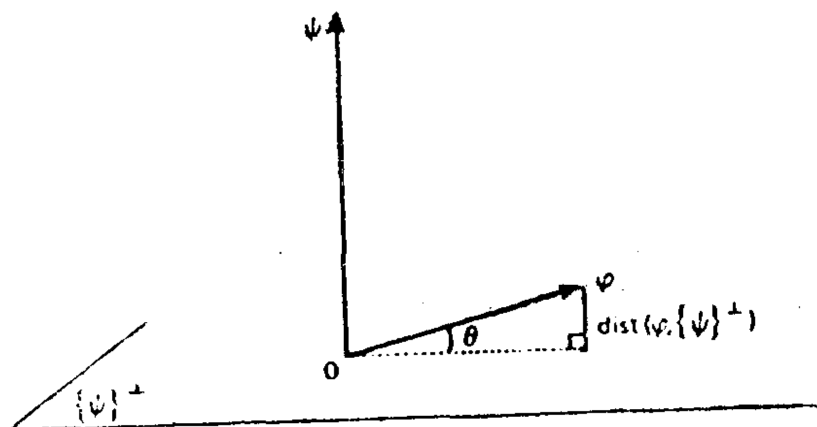


图　1.2

正交补$\{\psi\}^{\perp}$是由A的Jordan基中的向量（除φ外）张成的$N-1$维子空间（参见习题1.35）．设θ是φ与子空间$\{\psi\}^{\perp}$之间的锐角（参见图1.2）：

$$\mathrm{dist}(\varphi,\{\psi\}^{\perp})=\min_{u\in\{\psi\}^{\perp}}\|\varphi-u\|_2=\sin\theta.$$

性质 $\|\psi\|_2=\|P\|_2=1/\text{dist}(\varphi,\{\psi\}^{\perp})=1/\sin\theta$.

证明 第一个等式是显然的（参见习题1.19）. 设 $\hat{\psi}:=\psi/\|\psi\|_2$. 那么，

$$1/\|\psi\|_2=|\hat{\psi}^H\varphi|=\sin\theta=\text{dist}(\varphi,\{\psi\}^{\perp}). \qquad \square$$

由此得出，如果 λ 的谱投影的范数是大的，或等价地，如果 θ 是小的，则 λ 是病态的. 这时 φ 与 ψ 几乎正交，且 A 的 Jordan 基接近退化；即 φ 几乎是 Jordan 基中其它向量的一个线性组合.

例1.3 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 10^4\\ 0 & 11\end{pmatrix}.$$

1是单本征值，具有右及左本征向量

$$\varphi=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\qquad \psi=\begin{pmatrix}1\\ -10^3\end{pmatrix}.$$

$$\|\psi\|_2\approx 10^3,\quad A+H=\begin{pmatrix}1 & 10^4\\ -10^{-5} & 11\end{pmatrix}$$

有本征值$\lambda'\approx 1.01$. 在 A 中，10^{-5}阶的摄动，在 λ 中引起0.01阶的摄动；即，在 λ 中变化是在 A 中变化的10^4倍.

习题

1.38 考虑$A'=A-\varepsilon L$. 在定理1.7的假设下，定义$\lambda(\varepsilon)=\lambda'$. 证明

$$\frac{d\lambda}{d\varepsilon}(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda(\varepsilon)-\lambda}{\varepsilon}=-\psi^H L\varphi.$$

1.39 假设左本征向量 ψ 是由 $\|\psi\|_2=1$ 规范化的. 证明 $1/|\psi^H\varphi|$ 是 λ 的条件数. 如果没有施加规范化条件，证明 λ 的条件数是

$$\frac{\|\varphi\|_2\|\psi\|_2}{|\psi^H\varphi|}=\frac{1}{\sin\theta}.$$

1.40 证明$\lambda'=\lambda+\psi^H H\varphi-\psi^H HSH\varphi+O(\varepsilon^3)$。当$\psi^H H\varphi=0$时，给出$|\lambda'-\lambda|$的界。

上面的分析中有一个不能令人满意的特点，就是$\|\psi\|_2$不是对角相似变换的不变量.

例1.4 在$\mathbb{C}^N$中考虑 Hermite阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

相应于$\lambda=3$的A的右与左本征向量是相等的：

$$\psi=\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\quad 且\|\varphi\|_2=1.$$

本征值$\lambda=3$是良态的. 然而，如果

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix},$$

我们有

$$D^{-1}AD=\begin{pmatrix}2 & \alpha\\ 1/\alpha & 2\end{pmatrix}.$$

而现在

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\begin{pmatrix}\alpha\\ 1\end{pmatrix},\quad \psi=\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{2\alpha}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}，且$$

$\|\psi\|_2=\dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha}$. 若选择一个小的$\alpha$，能够使$\|\psi\|_2$任意地大.

由于，若α是小的，则$\|D^{-1}AD\|_2\gg\|A\|_2$，所以这个例子有几分不自然. 在实际中，$\|\psi\|_2$的有关值是$D^{-1}AD$的有关值，这里的D是这样选择的：使得$\|D^{-1}AD\|_2$接近于它的最小值.

这是矩阵的平衡（参阅 Parlett和Reinsch，1969）。

当$\|\psi\|_2$大时，用下面的注记可以解释单本征值对摄动的高灵敏度。如果$\|\psi\|_2$大，那么A必然相当地接近一个具有重本征值的矩阵（参阅Ruhe，1970；Golub和Wilkinson，1976）。

2.2 φ 的条件数

设$P^{\perp}=xx^H$是$\{x\}$上的正交投影．考虑$\hat{A}'_{\lambda}=(I-P^{\perp})(A-\lambda I)_{\restriction\{x\}^{\perp}}$，且用$\Sigma^{\perp}$表示矩阵$\hat{A}'^{-1}_{\lambda}(I-P^{\perp})$：它是$A-\lambda I$在$\{x^{\perp}\}$中的广义逆．类似于定理1.7，存在一个由$x^H\varphi''=1$规范化的本征向量$\varphi''$，使得

$$\varphi''=\varphi-\sum{}^{\perp}H\varphi+O(\varepsilon^2). \qquad (*)$$

当令$s:=\|s\|_2$且$\sigma:=\|\Sigma^{\perp}\|_2$时，由（*）和（1.8）得到

$$\|\varphi''-\varphi\|_2=\mathrm{tg}\theta\leqslant\sigma\varepsilon'+O(\varepsilon^2).$$

$$\|\varphi'-\varphi\|_2\leqslant s\varepsilon'+O(\varepsilon^2).$$

（见图1.3）

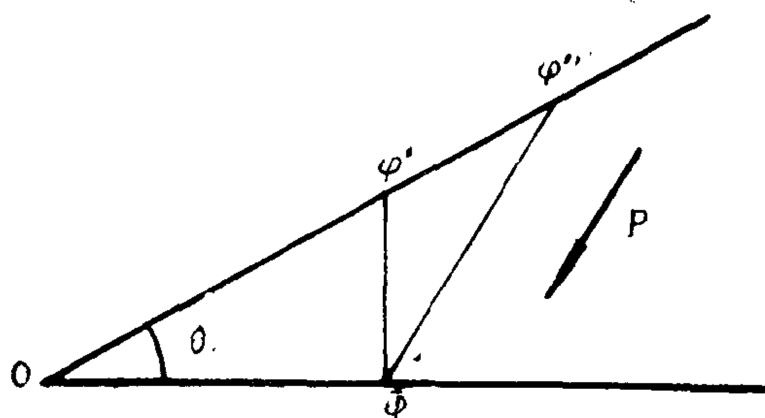


图 1.3

性质 $s\geqslant\sigma\geqslant 1/d(\lambda)$.

证明 易见$s\geqslant\sigma$，且$\sigma\geqslant 1/d(\lambda)$. □

如果 λ 接近 A 的另一个本征值，那么它的本征向量将是病态的。

例1.5 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-\varepsilon\end{pmatrix}.$$

如果 $\varepsilon\neq 0$，那么 1 是一个具有本征向量

$$\varphi=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

的单本征值。且 $s=1/|\varepsilon|$。如果 ε 是小的，那么 φ 就会是病态的。事实上，

$$A+H=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 10^{-5} & 1-\varepsilon\end{pmatrix}$$

有对应于 $\lambda'=1$ 的本征向量

$$\varphi'=\begin{pmatrix}1\\ 10^{-5}/\varepsilon\end{pmatrix}.$$

如果 ε 小，那么 φ' 显著地与 φ 不同。

注意，对于非正规矩阵，即使 λ 与谱的剩余分离得好，s 也可能大（参阅Wilkinson，1965，pp. 90—91）。

习题

1.41 根据定理 1.7 的定义，对于可对角化的矩阵 A，证明

$$\varphi'=\varphi+\sum_k \frac{\psi_k^H H\varphi}{\lambda-\mu_k}\varphi_k+O(\|H\|^2),$$

其中 μ_k，φ_k，ψ_k 则为不同于 λ，φ，ψ 的 A 的所有本征值、右本征向量与左本征向量，其中 ψ_k 是由 $\psi_k^H\varphi_k=\|\varphi_k\|_2=1$ 而规范

化的。

1.42 考虑矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1+10^{-10}\end{pmatrix}.$$

计算三个条件数 $\|\psi_1\|_2\|\psi_2\|_2$ 及 $\|\psi_3\|_2$，其中 ψ_i 是由 $\psi_i^H\varphi_i=\|\varphi_i\|_2=1$，$i=1、2、3$，规范化的左本征向量.

关于本征值的条件，你得出什么结论？对于本征向量解同一问题.

1.43 说明在关于矩阵 A 的酉相似变换下，A 的条件数 s 及 $\|\psi\|_2$ 是不变的.

尽管相应于一组本征值中的每个个别的本征向量是病态的，但是由所有这些本征向量张成的子空间却可能对矩阵的摄动是不敏感的，如例2.27所示。如果 P（或 P'）是相应于该组中 A（或 A'）的全部本征值的投影的直和，那么，当 $\|A'-A\|\to 0$ 时，$\|P'-P\|\to 0$（参见第五章）.

上述研究不适于重本征值。适合于这种情况的摄动理论需要利用谱投影及不变子空间。这将在下面几章内，在无限维空间的框架中深入地研究，不管是对本征值还是对本征向量，重本征值的陡度 l 将起着一个重要的作用（参阅 Wilkinson, 1966, 第二章 Kato, 1976, 第二章）

例1.6 在 $X=\mathbb{C}^N$ 中考虑，对于 $\varepsilon>0$，

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & 1 & \ddots & \\ \varepsilon & & & \ddots & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} A=\begin{pmatrix}1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\end{pmatrix}.$$

$A(\varepsilon)$ 的本征值是 $\lambda_k(\varepsilon)=1+\varepsilon^{1/N}e^{2ik\pi/N}$，$|\lambda_k(\varepsilon)-1|=\varepsilon^{1/N}$，$k=0,\cdots,N-1$。注意到算术平均 $\hat{\lambda}$ 使得

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\lambda_k(\varepsilon) = 1.$$

A的本征值是1并且代数重数与其陡度相等(即 $l = N$)的Jordan矩阵。

至于与 $\lambda_0(\varepsilon)=1+\varepsilon^{1/N}$ 相应的本征向量 $\varphi_0(\varepsilon)$，$\varphi_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}e_1$，$e_1$是$A$相应于1的本征向量，且得到

$$\|\varphi_0(\varepsilon)-e_1\|_2=O(\varepsilon^{1/N}).$$

2.3 A是Hermite阵或是正规阵

当A是 Hermite 阵或是正规阵的时候，由于以下两个理由上面的研究被简化了：

（1） $\varphi=\psi$ 且$\|\varphi\|_2=\|\psi\|_2=1$；及

（2） $s=1/d(\lambda)$。

因此对于具有单本征值的 Hermite（正规的）矩阵，其病态的原因只有一个：存在相近的本征值。$1/d(\lambda)$是具有单本征值的 Hermite（正规的）矩阵的本征向量的条件数，而前者是良态的且条件数是1。

3. 一些数值方法

我们不打算介绍，对于计算阶数N适度的，满阵A之本征元的一切有效方法；主要介绍：用酉相似变换，把一般（或 Hermite）的矩阵化为上三角（或对角）形式的一类方法。其中最重要的是求全部本征值的QR算法与计算某些本征值的同时迭代法。其中后一种方法是老的幂法的一种推广。老的幂法是以（向量）Krylov 序列x，Ax，$A^2x,\cdots$的变化性态为基础的。给出r个独立的初始向量x_1，$\cdots$，x_r，它们张成子空间$U=\{x_1, \cdots, x_r\}$，我们考虑（子空间）Krylov 序列 U，AU，

A^2U，…。首先研究这个序列的收敛性。

设A的N个重本征值按模减小的次序排列：$|\mu_1|\geqslant|\mu_2|\geqslant\cdots\geqslant|\mu_N|$。对应的Jordan基是$\{\varphi_i\}_1^N$。

3.1 Krylov序列A^kU（$k=0,1,2,\cdots$）的收敛性

我们假设$1\leqslant r<N$。在整个这一节中我们将假定

$$|\mu_1|\geqslant|\mu_2|\geqslant\cdots\geqslant|\mu_r|>|\mu_{r+1}|\geqslant\cdots\geqslant|\mu_N|。\qquad(1.9)$$

前r个本征值是r个主本征值。相应的不变子空间$M=\{\varphi_1\cdots\varphi_r\}$是不变主子空间：$\dim M=r$且根据假定（1.9），$M$是唯一的。$M$是相应于相异本征值的那些不变子空间的直和。

设P是相应的谱投影。P是沿$W:=(I-P)\mathbb{C}^N$在M上的一个投影，且$\mathbb{C}^N=M\oplus W$。

在假定（1.9）下，我们想给出一个关于U的充分必要条件，使得当$k\to\infty$时，A^kU收敛到主不变子空间M。为此目的，我们定义子空间序列$X_k\subset\mathbb{C}^N$到子空间$Y\subset\mathbb{C}^N$的收敛性，并且引入下面的记号：

给出一个子空间$Y\subset\mathbb{C}^N$，$\dim Y=r$。$\mathbf{Y}$是$N\times r$矩阵，它的列是Y的一组基。用$\mathbf{Z}$的$N-r$列把Y的这个基完备化使之成为$\mathbb{C}^N$的基。给定$\mathbb{C}^N$的子空间X_k，$\dim X_k\leqslant r$。$\mathbf{X}_k$是$N\times r$矩阵，它的列张成X_k。

定义 设$\{X_k\}$是$\mathbb{C}^N$的子空间的序列，$\dim X_k\leqslant r$。当$k\to\infty$时，$X_k\to Y$，$\dim Y=r$，当且仅当$\mathbf{X}_k=\mathbf{Y}C_k+\mathbf{Z}D_k$，其中$C_k$是$r\times r$矩阵，对于足够大的$k$，$C_k$是正则的，又$D_k$是当$k\to\infty$时，使得$\|D_kC_k^{-1}\|\to0$的$(N-r)\times r$矩阵。

两个子空间之间的距离不需定义；而有限维空间中矩阵范数的下述基本性质则需用到：一个有固定的有限阶的复矩阵序列$\{A_k\}$收敛于零矩阵，当且仅当每个元素列$\{a_{ij}^{(k)}\}$都收敛于零。

习题

1.44　证明：在 $\mathbb{C}$ 中上述定义与基的选择无关.

1.45　证明：对于足够大的 k，有 $\dim X_k = \dim Y = r$.

1.46　证明：如果 $X_k \to Y$，$X_k' \to Y'$，那么 $X_k + X_k' \to Y + Y'$.

1.47　证明：给定序列 $\{X_k\}$，其极限子空间 Y 是唯一的.

我们现在转入定理 1.8 的证明，这个定理是所考虑的数值方法收敛性理论的核心. 一般的叙述取自 Parlett 和 Poole (1973).

定理1.8　在假定 (1.9) 下，当 $k\to\infty$ 时，$A^kU\to M$，当且仅当 $\{Px_i\}_1^r$ 是无关的. 其收敛是线性的，收敛速率以 $\left|\frac{\mu_{r+1}}{\mu_r}\right|$ 为界.

证明　设 $(\mathbf{M},\mathbf{W})$ 对应于 $\mathbb{C}^N$ 的一个基，其中 $\mathbf{M}$（或 $\mathbf{W}$）对应于 M（或 W）的基。设 $\mathbf{U}$ 是其列为 U 的基 $x_1,\cdots,x_r$ 的矩阵. 显然 $\mathbf{U}=\mathbf{M}C+\mathbf{W}D$，其中 C 是正则的，当且仅当 $\{Px_i\}_1^r$ 是无关的. 设 A_M（或 A_W）是 r（或 $N-r$）阶矩阵，它表示限制于 M 上的算子 A，$A_{\restriction M}$：在已选择的 M（或 W）的基下，$M\to M$（或 $A_{\restriction W}:W\to W$）. 由假定 (1.9)，因为只有 A_W 的本征值可能是零，所以 A_M 显然是正则的. 从而，对于 $k=1,2,\cdots$，$\dim A^kU=r$，且对于 $X_k:=A^kU$：

$$\mathbf{X}_k=A^k\mathbf{U}=\mathbf{M}A_M^kC+\mathbf{W}A_W^kD,$$

$$\|A_W^kDC^{-1}A_M^{-k}\|\leqslant\|A_W^k\|\,\|A_M^{-k}\|\,\|DC^{-1}\|.$$

利用 $\lim_{k\to\infty}\|A^k\|^{1/k}=r_\sigma(A)$ 这个事实，我们推导出，对于 $\varepsilon>0$，存在 k_0，使得对于 $k>k_0$ 有

$$(\|A_w^k\| \|A_M^{-k}\|)^{1/k} \leqslant r_\sigma(A_W) r_\sigma(A_M^{-k}) + \varepsilon = \left|\frac{\mu_{r+1}}{\mu_r}\right| + \varepsilon.$$

因为 $|\mu_r| > |\mu_{r+1}|$，所以能够选择 ε，使得 $|\mu_{r+1}/\mu_r| + \varepsilon < 1$，从而证得 $\|A_W^k D C^{-1} A_M^{-k}\| \to 0$． □

当假定（1.9）不满足时，不存在唯一的 r 维的不变子空间．在 Parlett 和 Poole(1973) 中，对于这种情况，作了全面的研究．

设$\{e_i\}_1^N$是$\mathbb{C}^N$的典范基，E_r是由 $e_1, \cdots, e_r$ 张成的．现在证明对于一类特殊矩阵，不可约上 Hessenberg 矩阵，初始子空间满足定理 1.8 的条件．

定义 矩阵 $H = (h_{ij})$是上Hessenberg 阵，当且仅当对于 $i > j+1$，$h_{ij} = 0$．它是不可约的，当且仅当对于 $i = 2, \cdots, N, h_{i,i-1} \neq 0$．

由 Givens 或 Householder 算法(参阅Wilkinson,1965)，任何矩阵酉相似于上 Hessenberg 矩阵．如果某些 $h_{i,i-1} = 0$，那么，这个问题就被简化为关于不可约 Hessenberg 矩阵的一系列子问题．

习题

1.48 如果H是不可约 Hessenberg 矩阵，证明秩 $H \geqslant N-1$．推出带有重本征值的不可约 Hessenberg 矩阵是亏损的．特别是，有非零的对角元素的 Hermite 三对角矩阵具有单本征值．

引理1.9 在假定（1.9）下，$\{Pe_i\}_1^r$是无关的，其中 P 是对应于一个不可约上 Hessenberg 矩阵H的主谱投影．

证明　设$x \in E_r$，但$x \notin E_{r-1}$，那么，$Hx \in E_{r+1}$，但 $Hx \notin E_r$．通过重复前面的论证，$x, Hx, \cdots, H^{N-r}x$ 是无关的：任何含 x 的不变子空间必定有大于$N-r$ 的维数．这表明了E_r与维

数小于或等于 $N-r$ 的任何子空间，例如像 $N-r$ 维子空间 $W=\mathrm{Ker}P$，都是不相交的。因此 $\mathbb{C}^N=E_r\oplus\mathrm{Ker}P$，$P\mathbb{C}^N=PE_r=\mathrm{Im}P$ 且 $\dim PE_r=r$。这证明了 r 个向量 $\{Pe_i\}_1^r$ 是无关的.□

推论1.10 在假设(1.9)下，当 $k\to\infty$ 时，$H^kE_r\to M$，其中 H 是不可约的上Hessenberg矩阵

证明 由引理1.9和定理1.8，显然成立。 □

当 $|\mu_r|=|\mu_{r+1}|$ 时，序列 H^kE_r 有时也能收敛（参阅 Parlett 和Pool，1973）。

3.2 子空间迭代法

子空间迭代法在于计算迭代子空间 A^kU，其中 U 是 r 维子空间。我们把 $r=1$，$r>1$ 讨论分开。

3.2.1 $r=1$，幂法

假设 $|\mu_1|>|\mu_2|$，相应于单的主本征值 $\mu_1=\lambda_1$ 的右(或左)本征向量是 φ_1（或 ψ_1），我们设 $\|\varphi_1\|=\psi_1^H\varphi_1=1$，那么，$Px=(\psi_1^Hx)\varphi_1$。幂法确定为

$$q_o:=\frac{x}{\|x\|},\quad q_k:=\frac{Aq_{k-1}}{\|Aq_{k-1}\|},\quad k=1,2,\cdots,$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^N$ 上的任意一种范数。

如果 $Px\neq 0$，即，$\psi_1^Hx\neq 0$，那么由定理1.8知序列 $\{q_k\}$ 趋向于 $\{\varphi_1\}$，数量 $\rho_k:=q_k^hAq_k/q_k^Hq_k$ 趋于 μ_1。收敛是线性的，其收敛速率是 $|\mu_2/\mu_1|$。为了改善这个速率，可以考虑引入原点的移动（参阅Wilkinson，1965，第9章）。一个类似的想法已被用来计算相应于近似本征值 λ 的本征向量。

假设 λ 接近 μ_1，而不接近任何一个其它的本征值 μ_i，$i=2,\cdots,N$；那么 $(A-\lambda I)^{-1}$ 有本征值 $(\mu_i-\lambda)^{-1}$ 且 $1/|\mu_1-\lambda|$ 比 $1/|\mu_i-\lambda|$ $(i\geqslant 2)$ 大得多。这是计算相应于一个单本征值的本征向量的逆迭代法的基础，对这个单本征值我们已知它的逼近 λ，且：

$$q_0 := \frac{x}{\| x \|}, \qquad q_k := \frac{z_k}{\| z_k \|},$$

其中 z_k 是

$$(A - \lambda I) z_k = q_{k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{1.10}$$

的解。这是关于$(A-\lambda I)^{-1}$的幂法。

显然$q_k \to \varphi_1$，而且λ越接近μ_1，系统(1.10)就越是病态的。然而，如果φ_1是良态的，那么解(1.10)时，大部分误差将在φ_1的方向上。故而我们仅仅对方向$\{\varphi_1\}$感兴趣。有兴趣的读者在 Parlett (1980a, P.65) 中可以找到关于这种想法（A是Hermite阵）的一个优美的几何拓展。重本征值及病态本征向量的处理是更细致的问题（参阅 Wilkinson, 1965, 第9章）。

逆迭代法的一个重要的变形是 Rayleigh 商迭代：

$$q_0 := \frac{x}{\| x \|}, \qquad \rho_0 := \lambda,$$

$$q_k := \frac{z_k}{\| z_k \|}, \qquad \rho_k := \frac{z_k^H A z_k}{z_k^H z_k}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

其中 z_k 是 $(A - \rho_{k-1} I) z_k = q_{k-1}$的解。
如果λ是A的半单本征值μ的一个逼近且若$\rho_k \to \mu$，那么收敛速率是二次的：

$$\text{当 } k \to \infty \text{ 时}, \qquad \mu - \rho_{k+1} = O[(\mu - \rho_k)^2].$$

如果A是正规的，则收敛是三次的：

$$\mu - \rho_{k+1} = O[(\mu - \rho_k)^3].$$

（参阅 Ostrowski, 1957—1959; Parlett, 1974）。

3.2.2 $r>1$，同时迭代法

设U由r个标准正交向量$\{x_i\}_1^r$张成，Q_0是$N x r$矩阵$Q_0 := (x_1, \cdots, x_r)$. 这一算法按下面的途径引入矩阵$Q_k$的序列，$Q_k$

的列是$X_k = A^k U$的标准正交基：

对于$k \geqslant 1$：

（1） 计算$N \times r$矩阵$Y_k = AQ_{k-1}$，及

（2） 把Y_k的列向量标准正交化，引入

$$Q_k := Y_k R_k,$$

其中R_k是$r \times r$上三角矩阵。

这里所引入的第i个列向量，若$|\mu_i| > |\mu_{i+1}|$，则第i个列向量的收敛速率（P.□ 证明的附注）是$|\mu_{i+1}/\mu_i|$阶的，就这个敛速来说，并未对幂法做出改进。

通过考虑原先的初始本征值问题$A\varphi = \lambda\varphi$在子空间$X_k$上的正交投影，就能得到改善。由此引出问题：

求 $\lambda^{(k)} \in \mathbb{C}$； $0 \neq \varphi^{(k)} \in X_k$，

使得$A\varphi^{(k)} - \lambda^{(k)}\varphi^{(k)}$与$X_k$正交。

设$\varphi^{(k)} = Q_k \xi^{(k)}$；$\xi^{(k)}$是方程

$$Q_k^H (AQ_k - \lambda^{(k)} Q_k) \xi^{(k)} = 0$$

的解；即，

$$B_k \xi^{(k)} = \lambda^{(k)} \xi^{(k)},$$

其中$B_k := Q_k^H A Q_k$是$r \times r$矩阵。于是，当$K \to \infty$时，$B_k \to B := Q^H A Q$，在M的基Q下，它表示矩阵A_M。第i个本征对$\mu_i^{(k)}$，$\{\varphi_i^{(k)}\}$收敛于μ_i，$\{\varphi_i\}$；在第5节，我们将看到，如果μ_i是单的，其收敛速率是$|\mu_{r+1}/\mu_i|$阶的，$i=1, 2, \cdots, r$（定理1.32）。

3.3 QR法

基本QR算法，按照下面的方法

$A_1 := A$，$A_k := Q_k R_k$，$A_{k+1} := R_k Q_k$，$k = 1, 2, \cdots$，引出酉相似矩阵A_k的序列，其中Q_k是酉矩阵，R_k是上三角阵。$A_{k+1} = Q_k^H A_k Q_k = \mathbf{Q}_k^H A_1 \mathbf{Q}_k$。我们定义$\mathbf{Q}_k := Q_1 Q_2 \cdots Q_k$，$\mathbf{R}_k$

$:=R_k\cdots R_2R_1$；那么，$A^k=\mathbf{Q}_k\mathbf{R}_k$。在假设中没有$A$是正则的限制。

引理1.11 对于$r=1,2,\cdots,N$，$\mathbf{Q}_k$的前r列张成子空间$X_k=A^kE_r$。

证明 证明由$A^k=\mathbf{Q}_k\mathbf{R}_k$得出，其中$\mathbf{R}_k$是上三角正则矩阵。 □

这样，QR法就是具有初始子空间套$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_N=\mathbb{C}^N$的$N$个子空间迭代法的总体。

如果对于$r=1,2,\cdots,N-1$，假定（1.9）成立，那么，由推论1.10就会立即得出关于Hessenberg矩阵的QR算法的收敛性。从而我们可假设本征值是单的：$\mu_i=\lambda_i$，$i=1,\cdots,N$.

定理1.12 设H是不可约正则上Hessenberg矩阵。如果单本征值是这样的，$|\lambda_1|>|\lambda_2|>\cdots>|\lambda_N|>0$，那么，应用于$H$的$QR$算法收敛于上三角矩阵，其本征值$\{\lambda_i\}_1^N$依次在对角线上。

证明 对于$r=1,2,\cdots,N$，应用推论1.10；由此得出收敛性。对于$r=N$，显然$E_N=M_N=\mathbb{C}^N$且对于任何一个k，有$H^kE_N=M_N$。对于$r=1,2,\cdots,N$，H_k的$r\times r$前主子矩阵趋向于H在r维不变子空间上的限制表示，由这个事实得出三角极限形式。 □

对于重本征值或等模本征值情况下的Hessenberg矩阵的收敛性，在Parlett(1968)中作了全面的研究。这时，极限矩阵可能是块三角的。

注记 定理1.12表明了用矩阵的Hessenberg形式所起的理论上的作用。由于在算法中这种形式保持不变，故而在实际中，这种形式也是极其重要的。对这样的矩阵进行运算时，需要的计算量比满阵少得多。

基本QR法的收敛速率如幂法一样，还是$\max_{i=1,\cdots,N-1}$

$|\lambda_{i+1}/\lambda_i|$ 阶的。然而，利用原点的适当移动（$\sigma_k \approx \lambda_k$），右下角项 $a_{NN}^{(k)}$ 到λ_N的收敛至少能成为二次的。移动的算法确定为

$$A_k - \sigma_k I = Q_k R_k, \quad A_{k+1} := R_k Q_k + \sigma_k I.$$

对非正规 Hessenberg 矩阵，关于某些移动 QR 法的整体收敛性还没有任何结果。

习题

1.49　对于基本 QR 算法，利用关系 $\mathbf{Q}_k = A\mathbf{Q}_{k-1}R_k^{-1} = A^k\mathbf{R}_k^{-1}$，证明$\{e_N^H \mathbf{Q}_k^H\} = \{e_N^H \mathbf{Q}_{k-1}^H A^{-1}\} = \{e_N^H A^{-k}\}$. 并用关于$(A^H)^{-1}$的算法，从向量 e_N 开始计算 $\mathbf{Q}_k$ 的第N列。

1.50　考虑带移动 $\sigma_k = a_{NN}^{(k)}$ 的 QR 法。利用 $A_k - \sigma_k I = Q_k R_k$，证明 $Q_k e_N$ 与$(A_k^H - \bar{\sigma}_k I)^{-1} e_N$成比例。对$a_{NN}^{(k)}$ 到 λ_N 的二次收敛可能性作出断言。（提示：$\sigma_k = a_{NN}^{(k)} = e_N^H A_k e_N$，把这种计算解释为由 e_N 开始的一种Rayleigh 商迭代，e_N是A_k^H的近似本征向量。）

3.4　A是Hermite阵

假设A是 Hermite 阵。对于子空间迭代法，本征值的收敛速率是本征向量收敛速率的平方（参阅第5节）。至于 QR 算法，它收敛于一个对角矩阵。对某些移动的技巧，Wilkinson（1968）和Parlett（1980a）已经证明了关于三对角矩阵的移动 QR法的整体收敛性。这时，收敛是三次的或比三次更好。如果A是正定的，可以利用基于 Cholesky 分解的 QR 法的一种变形：

$$A_k = R_k^H R_k, \qquad R_k R_k^H = A_{k+1}, \quad k = 0,1,2,\cdots.$$

除了上述算法外，还有 Jacobi(1846) 法，它利用平面旋转依次将非对角元素化为零。借助适当的技巧，最后，矩阵二次收敛于对角矩阵。收敛速率决不受相近本征值或重本征值存

在的影响。

3.5 近似本征元的迭代加细

首先回忆改进线性方程近似解的迭代加细技巧

3.5.1 近似解的迭代加细

我们想求$Ax=b$的精确解，但代之以解一个邻近方程$A'x'=b$，其中$A=A'-H$。由矩阵A'确定的方程组的解是向量x_k，而把x作为向量序列x_k的极限。

命题1.13 如果$\|H\|<1/\|A'^{-1}\|$，那么，$x=\lim_k x_k$，其中

$$x_0:=x'=A'^{-1}b,\ x_k:=x'+A'^{-1}Hx_{k-1},\quad k\geqslant 1.$$

证明 因为$\|A'^{-1}H\|<1$，所以

$$(A'-H)^{-1}=(1-A'^{-1}H)^{-1}A'^{-1}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}(A'^{-1}H)^k\right)A'^{-1}.$$

于是$x=\sum_{k=0}(A'^{-1}H)^k x'$. 设$x_0=y_0=x'$，$y_i=A'^{-1}Hy_{i-1}$，$i\geqslant 1$，且当$k\to\infty$时，$x_k=\sum_{i=0}^{k}y_i\to x$. 注意到对于$k\geqslant 1$，有$x_k=x_{k-1}+y_k$且$A'y_k=Hy_{k-1}=b-Ax_{k-1}$。 □

当A接近于一个易于求逆的矩阵时，如对角矩阵（参见习题1.52），可以应用这种技巧。或者，可以把它用于提高数值解的精度：可以认为$Ax=b$的数值解x'是$A'x'=b$的精确解，这种过程以下述方程序列

$$A'(x_k-x')=Hx_{k-1},\quad k\geqslant 1$$

的求解为基础。当然，矩阵A'不应当是过于病态的，及剩余Hx_k应以双精度来计算（参阅 Wilkinson 和 Reinsch，1971及Kulisch 和 Miranker，1981；并且参阅 Björck，1967b，关于

最小二乘解1968）.

习题

1.51　证明$x_k \to x$是以公比为$\|H\|$的几何级数的速率，即$\|x - x_n\| \leqslant C\|H\|^{k+1}$，$k \geqslant 0$.

1.52　用三次逐次迭代，计算方程组

$$x + 0.1y + 0.01z + 0.001t = 1,$$
$$0.1x + y + 0.01z + 0.001t = 1,$$
$$0.1x + 0.01y + z + 0.001t = 1,$$
$$0.1x + 0.01y + 0.001z + t = 1.$$

的近似解．证明最大范数意义下的误差小于2×10^{-4}.

3.5.2　近似本征元的迭代加细

为了求解$A\varphi = \lambda\varphi$，我们考虑邻近问题$A'\varphi = \lambda'\varphi'$，$A = A' - H$．假设$\lambda'$是单的，$\psi'$是$A'$的与$\lambda'$相应的左本征向量，$\psi'$由$\psi'^H\varphi' = \|\varphi'\|_2 = 1$规范化．$P'$是谱投影$\varphi'\psi'^H$且$S'$是广义逆

$$(A' - \lambda' I)^{-1}(I - P') = \widehat{A}'^{-1}_{\lambda'}(I - P').$$

命题1.14　对于足够小的$\|H\|_2$，存在A的单本征值λ，λ具有由$\psi'^H\varphi = 1$规范化的本征向量φ，使得（1.11）中的序列λ_k（或φ_k）收敛于λ（或φ）

$$\lambda_0 = \lambda', \quad \lambda_k = \psi'^H A\varphi_{k-1}, \qquad k \geqslant 1, \tag{1.11}$$

$$\varphi_0 = \eta_0 = \varphi', \quad \varphi_k = \varphi' + S'\left[H\varphi_{k-1} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}\nu_j\eta_{i-j}\right], \quad k \geqslant 1,$$

其中，对于$k \geqslant 1$有$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \nu_k$及$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \eta_k$.

证明　在定理1.7的证明中，设$H = \varepsilon L$，得到公式(1.11).

关于$\varepsilon=\|H\|_2$的充分条件将在第8节中，就Banach 空间的闭算子摄动的更一般内容来给出。 □

公式（1.11）需要解下列方程序列

$$
\begin{aligned}
&(A'-\lambda' I)\varepsilon_k=(I-P')b_k,\ \varepsilon_k=\varphi_k-\varphi',\\
&\qquad k\geqslant 1,\\
&P'\varepsilon_k=0. \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

习题

1.53 证明方程组

$$
\begin{aligned}
&(A'-\lambda' I')x=(I-P')b,\\
&\psi^H x=0
\end{aligned} \qquad (1.13)
$$

的唯一解是$x=S'b=S'(I-P')b$。证明这个方程组的条件是依赖于$\|S'\|$和$\|P'\|$的。

1.54 提出一种解（1.13）的数值算法，并给出评论。

1.55 如果A'是Hermite阵，验证（1.13）的解是

$$(A'-\lambda' I)x=b$$

的最小欧几里得范数的最小二乘解。

如果谱投影$P'=\varphi'\psi'^H$是病态的，那么方程组序列(1.12)也是病态的（习题1.53）。这样，考虑由与ψ'不同且使得$y^H\varphi'\neq 0$的向量y所确定的另一个投影Q可是合理的.假定$y^H\varphi'=1$；于是，如果$Q=\varphi' y^H$，那么$\|Q\|_2=\|y\|_2$.一种可能的选择是$y=\varphi'$；这时$Q=\varphi'\varphi'^H$是$\{\varphi'\}$上的正交投影，且$\|Q\|_2=1$。

定义$\mathring{A}'_{\lambda'}:=[(I-Q)(A'-\lambda' I)]|_{\{y\}^\perp}$。$\mathring{A}'_{\lambda'}$是正则的；今后把表示$(I-Q)\mathring{A}'^{-1}_{\lambda'}(I-Q)$的矩阵记为$\Sigma'$。

现在设$\hat{\varphi}$是A的由$Q\hat{\varphi}=\varphi'$规范化的本征向量；对于足够小的$\|H\|_2$，这总是可能的。确定λ_k和$\hat{\varphi}_k$为

$$\lambda_0=\lambda', \lambda_k=y^H A\widehat{\varphi}_{k-1}+y^H A'\widehat{\eta}_k, \quad k\geqslant 1, \tag{1.14}$$

$$\widehat{\varphi}_0=\widehat{\eta}_0=\varphi', \quad \widehat{\varphi}_k=\varphi'+\Sigma'\left[H\widehat{\varphi}_{k-1}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}\nu_j\widehat{\eta}_{i-j}\right], \quad k\geqslant 1,$$

其中$\lambda_k=\lambda_{k-1}+\nu_k$及$\widehat{\varphi}_k=\widehat{\varphi}_{k-1}+\widehat{\eta}_k$，$k\geqslant 1$，于是$\lambda$和$\varphi$是序列$\lambda_k$、$\widehat{\varphi}_k$的极限。

习题

1.56 用定理1.7证明中所使用的方法建立公式（1.14）。

1.57 比较公式（1.11）与（1.14）的复杂性。

1.58 考虑4×4矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 2 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0.2 & 3 & 0.5\\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 4\end{pmatrix}.$$

从A的对角部分迭代求解A的本征值问题。

1.59 研究解拟三角阵本征值问题的迭代加细技巧的应用。

1.60 考虑

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ \frac{1}{25} & 2\end{pmatrix}\text{及}\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

从D的本征元$\lambda'=1$，$\varphi'=\psi'=e_1$迭代计算A的本征值$\lambda=\frac{3}{2}(1-1/\sqrt{5})$。

读者可能已注意到，在习题1.60中，

$$A - D = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ \frac{1}{25} & 0 \end{pmatrix}$$

没有小的范数。然而，本征元的级数展开是收敛的。在第三章第 8 节中将对这一事实进行解释。

为了清晰起见，我们已经假定了λ'是单的。关于近似不变子空间基的迭代加细，也在第三章第 8 节中给出。

我们已介绍的近似本征元的迭代加细与近似解的迭代加细是相同类型的。收敛速率依赖于$\|H\|$，而且关键地依赖于条件数$\|S'\|$。这个方法的正反两个方面，与两个问题等价（Stewart，1973a）。利用在 Kulisch和Miranker（1981）中所定义的最大精度数量积，能够把加细技巧应用于任意的病态问题（参阅Kaucher和Rump，1982；Rump和Böhm，1982）。

在第三章第 7 和第 8 节中，将把这一方法推广到Banach空间中闭线性算子T与T'的摄动$H = T' - T$上。关于T'是T的数值逼近这一情形在第五和第七章中介绍。

3.6 文献注释

*LR*法（Rutishauser，1958）、*QR*法（Francis，1961—1962），梯迭代与双迭代法（Bauer，1957），Rayleigh商迭代（Ostrowski，1957—1959）及子空间迭代法实质上是相同的。Bauer（1958）指出了其中一些可以被看作Bernoulli过程，它们产生相同的不变子空间，区别在于构成不变子空间的基不同。这些方法的完整的几何研究是在Parlett和Poole（1973）的基本论文中；关于正规Hessenberg矩阵，也可参阅Buurema（1970）。对于三对角Hermite矩阵的*QR*法的各种移动策略之间的比较连同精辟的证明在Parlett（1980a）中给

出。关于Jacobi法，读者可参阅Forsythe和 Henrici (1960)，Wilkinson (1962) ，Van Kempen(1966)及 Ciarlet(1982)。

在同时迭代法中，$r\times r$ 矩阵 B_k 为对称情形时本征值的计算，见Rutishauser (1970)。在Clint和Jennings (1971) 、及Stewart (1976a) 中，把这种计算推广到非对称矩阵。对于广义本征值问题$Ax=\lambda Bx$ (当 B 是正则矩阵时，它在形式上等价于$B^{-1}Ax=\lambda x$) ，QZ法 (Moler和Stewart, 1973) 是QR算法的一种扩充，它避免了使用 B^{-1}。

实施这些方法，可用 ALGOL (Wilkinson 和 Reinsch, 1971) 及 FORTRAN (Smith et al., 1976) 中的标准程序，也可参考Harwell或NAG程序库以及IMSL软件包。

4 误差分析

4.1 先验误差界

A有本征值 λ，其代数 (或几何) 重数为m (或 g) ，陡度为 l ，$1\leqslant l\leqslant m$。设$A'=A+H$。如果 $\varepsilon=\|H\|$足够小，那么，在 λ 的一个邻域内，A'有m个本征值$\{\mu'_i\}_{i\in I}$ (I 的基数为m) ，以它们的代数重数计数，使得

$$\max_{i\in I}|\mu'_i-\lambda|=O(\varepsilon^{1/l}),$$

$$\min_{i\in I}|\mu'_i-\lambda|=O(\varepsilon^{g/m}),$$

$$\left|\frac{1}{m}\left(\sum_{i\in I}\mu'_i\right)-\lambda\right|=O(\varepsilon).$$

且A'有本征向量x'，$\|x'\|=1$，使得

$$\operatorname{dist}(x',\ \operatorname{Ker}(A-\lambda I))=O(\varepsilon^{1/l}).$$

l 是相应于 λ 的最大Jordan块的阶数. 有 g 个这样的块。于是$m\leqslant gl$。进而，如果Jordan块有相同的阶数，那么 $1/l<$

g/m。在例 1.2 中，$m=7$，$g=l=3$，且$\frac{1}{3}<\frac{3}{7}$。

设M是相应于λ的不变子空间，M'是相应于A'的相异近似本征值的不变子空间的直和。于是

$$\max\left[\sup_{\substack{x\in M\\ \|x\|=1}} \operatorname{dist}(x,M'),\right.$$

$$\left.\sup_{\substack{x'\in M'\\ \|x'\|=1}} \operatorname{dist}(x',M)\right]=O(\varepsilon).$$

在Wilkinson（1965，第二章）及Kato（1976，第二章）中可以找到它们的证明。在Banach 空间内的闭线性算子的一般框架中，类似的误差界，在第六章中已得到证明。

包含在上述等式中的常量的渐近性态，将由后验分析得出。

4.2 后验误差分析

在整个这一节中，把$\mathbb{C}^N$中的范数$\|\cdot\|$看作是单调的；即，对于任意对角矩阵$D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$，对应的算子范数满足$\|D\|=\max_{i=1,\ldots,N}|\lambda_i|$. 欧几里得范数$\|\cdot\|_2$及最大范数$\|\cdot\|_\infty$是单调的.

上面的定义等价于下面的特性（Householder，1964）：$\mathbb{C}^N$上的范数$\|\cdot\|$是单调的，当且仅当对于$i=1,\cdots,N$，$|\xi_i|\leqslant|\eta_i|$蕴涵$\|x\|\leqslant\|y\|$，其中$x=(\xi_i)$，$y=(\eta_i)$。

4.2.1 剩余向量

在后验误差分析中，利用关于给定的近似本征元的知识来导出误差界.这些误差界应当是容易由已知的本征元来计算的.

假设给定了λ和x，$\|x\|=1$. 为了考虑作为A的近似本征元的这些数据的精度，很自然地，要考虑剩余向量$r=Ax-\lambda x$。下面的结果成立：

命题1.15 设A是可对角化的：$A=VDV^{-1}$，其中$D=$

$\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_N)$. 给定 λ 和 x，使得 $r = Ax - \lambda x$ 且 $\|x\| = 1$，那么存在 A 的本征值 μ_i，使得

$$|\lambda - \mu_i| \leqslant \|V\|\|V^{-1}\|\|r\|. \tag{1.15}$$

证明　如果 $r = 0$，则无须讨论. 于是假设 $D - \lambda I$ 是正则的. 这时 $r = Ax - \lambda x = V(D - \lambda I)V^{-1}x$，且

$$1 = \|x\| = \|V(D - \lambda I)^{-1}V^{-1}r\| \leqslant \|V\|\|V^{-1}\| \frac{\|r\|}{min_i |\mu_i - \lambda|}.$$

$\|V\|\|V^{-1}\| = K(V)$ 是 V 的关于求逆的条件数. 如果 A 是正规的，那么 $K_2(V) = 1$，且 $|\lambda - \mu_i| \leqslant \|r\|_2$. □

例1.7 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -10^{10} \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$\lambda = 1$ 及

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-10} \end{pmatrix}, \quad \|x\|_\infty = 1.$$

于是 $\|Ax - \lambda x\|_\infty = 10^{-10}$. 但是 1 不是 A 的本征值，A 仅有一个双重本征值 2. 验算

$$\begin{pmatrix} 2 & -10^{-10} \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$$

对于 $\varepsilon > 0$ 是一个病态的本征值问题.

我们看到，在命题1.15中，没有假设 $\|r\|$ 是小的. 相反地，我们现在去掉 A 是可对角化的假设，考虑 x 和 y 使得 $\|x\|_2 = y^H x = 1$，其中 x 是 A 的一个近似本征向量，而 y 可以是也可以不是 A^H 的本征向量. 注意 $\|y\|_2 \geqslant 1$.

$\zeta := y^H Ax$ 是 A 的以 x 和 y 为基础的广义Rayleigh商. 相应

于 ζ 与 x （或 $\widehat{\zeta}$ 与 y）的剩余向量是 $u:=Ax-\zeta x$（或 $v:=A^Hy-\widehat{\zeta}y$）。$\widehat{y}=y/\|y\|_2$ 是规范化了的且 $\widehat{v}:=v/\|y\|_2$ 是对应的剩余。

设 $Q=xy^H$ 是沿 $\{y\}^\perp$ 在 $\{x\}$ 上的投影的矩阵。若 ζ 不是 $[(I-Q)A]_{\uparrow\{y\}^\perp}$ 的本征值，则

$$\mathring{A}_\zeta:=[(I-Q)(A-\zeta I)]_{\uparrow\{y\}^\perp}$$

是正则的。我们定义

$$\begin{aligned}\Sigma:&=(I-Q)(A-\zeta I)^{-1}(I-Q)\\&=(I-Q)\,\mathring{A}_\zeta^{-1}(I-Q),\end{aligned}$$

且设 $\quad\sigma:=\|\Sigma\|_2$。

现在打算分别按照剩余的范数 $\varepsilon:=\|u\|_2$ 和 $\varepsilon^*:=\|\widehat{v}\|_2$ 定出 ζ 的精度的界。这里的 ζ 是 A 的近似本征值，为此，考虑 A 的分解：

$$\begin{aligned}A&=QAQ+(I-Q)A(I-Q)+(I-Q)AQ\\&\quad+QA(I-Q)\\&=\underbrace{\zeta Q+(I-Q)A(I-Q)}_{\widetilde{A}}+\underbrace{(A-\zeta I)Q+Q(A-\zeta I)}_{\widetilde{H}}\end{aligned}$$

把 A 看作是矩阵 $\widetilde{A}$ 及摄动 $\widetilde{H}$ 的和。

习题

1.61　验证 $[(I-Q)(A-\zeta I)]_{\uparrow\{y\}^\perp}=(\widetilde{A}-\zeta I)_{\uparrow\{y\}^\perp}$。

1.62　证明　如果 ζ 是 $\widetilde{A}$ 的单本征值，那么，ζ 是 $\widetilde{A}$ 的具有谱投影 Q 的本征值。然后，证明 $(\widetilde{A}-\zeta I)\Sigma=\Sigma(\widetilde{A}-\zeta I)=I-Q$，$\Sigma$ 是 $\widetilde{A}-\zeta I$ 相对于 Q 的广义逆。

1.63　证明矩阵 $\widetilde{H}$ 表示算子

$$\xi \mapsto \widetilde{H}\xi = (y^H\xi)u + (v^H\xi)x, \quad 对于 \xi \in \mathbb{C}^N.$$

考虑由（1.16）定义的形式级数 $\Sigma_{k=0}^{\infty}\nu_k$ 及 $\Sigma_{k=0}^{\infty}\eta_k$

$$\begin{aligned}
&\nu_0 = \zeta\,,\ \nu_k = y^H\widetilde{H}\eta_{k-1}, && k \geqslant 1\\
&\eta_0 = x,\ \eta_1 = -\Sigma\widetilde{H}x, &&\\
&\eta_k = \Sigma\left[-\widetilde{H}\eta_{k-1} + \sum_{i=1}^{k}\nu_i\eta_{k-i}\right] && k \geqslant 2 \quad (1.16)
\end{aligned}$$

引理1.16 如果上述级数是收敛的且满足

$$\sum_{k=0}^{\infty}\nu_k = \lambda\,,\ \sum_{k=0}^{\infty}\eta_k = \varphi\,,\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}\nu_i\eta_{k-i}\right) = \lambda\varphi,$$

那么，λ 和 φ 当 $y^H\varphi = 1$ 时有 $A\varphi = \lambda\varphi$。

证明 对于 $k \geqslant 2$，有

$$(\widetilde{A} - \zeta I)\eta_k + \nu_k x = -(I - Q)\widetilde{H}\eta_{k-1} + \sum_{i=1}^{k}\nu_i\eta_{k-i}.$$

所以

$$\widetilde{A}\eta_k + (I - Q)\widetilde{H}\eta_{k-1} + \nu_k x = \sum_{i=0}^{k}\nu_i\eta_{k-i},$$

且有

$$\nu_k x = Q\widetilde{H}\eta_{k-1}.$$

于是

$$\widetilde{A}\eta_k + \widetilde{H}\eta_{k-1} = \sum_{i=0}^{k}\nu_i\eta_{k-i}.$$

关于 $k \geqslant 1$ 相加，得到

$$\widetilde{A}(\varphi - x) + \widetilde{H}\varphi = \lambda\varphi - \zeta x,$$

也就是说，由于$y^H\varphi = 1$，有$A\varphi = \lambda\varphi$，$\varphi \neq 0$。 □

令 $r := \max(\sigma|v^H \Sigma u|, \|\Sigma u\|_2 \|\Sigma^H v\|_2)$. 对于$0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{4}$，设g是一个函数

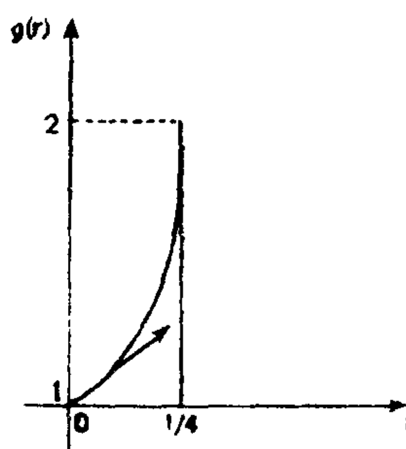


图 1.4

$$r \mapsto \frac{1-\sqrt{1-4r}}{2r}.$$

$1 \leqslant g(r) \leqslant 2$，当$r \to 0$时，$g(r) \to 1$，如图1.4所示.

对于$0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{4}$，$g(r)$有级数展开式

$$g(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k r^k，其中\nu_k = \frac{1}{k+1} C_{2k}^k = \sum_{i=1}^{k} \nu_{i-1}\nu_{k-i}.$$

令 $g_i(r) := \Sigma_{k=i}^{\infty} \nu_k r^k$。

定理1.17 (Redont) 如果ζ是$\tilde{A}$的单本征值，且如果$r < \frac{1}{4}$，那么就存在A的单本征值λ及相应的由$y^H\varphi = 1$规范化的本征向量φ，使得

$$|\lambda - \zeta| \leqslant g(r)|v^H \Sigma u|,$$
$$\|\varphi - x\|_2 \leqslant g(r)\|\Sigma u\|_2.$$

λ是A的在圆盘$\{z \in \mathbb{C}; |z-\zeta| \leqslant 1/2\sigma\}$内的仅有的一个本征值.

证明 我们通过对$k \geqslant 1$定出$|\nu_k|$及$\|\eta_k\|_2$的界来证明引理1.16的形式级数收敛. 首先，用归纳法可以证明，对于$k \geqslant 1$，

（1）$\eta_{2k}=0$，及

（2）$\eta_{2k+1}=\Sigma M_k \Sigma u$，

其中M_k是使得$\|M_k\|_2 \leqslant |v^H \Sigma u| \nu_k r^{k-1}$成立的一个矩阵.检验归纳（$\eta_1=-\Sigma \widetilde{H} \eta_0$），留给读者去做。容易推导出，对于$k \geqslant 2$，由于$\|\Sigma u\|_2 \|\Sigma^H v\|_2 \leqslant r$（对于$k=1$，$\nu_1=0$及$|\nu_2|=\nu_0 |v^H \Sigma u|$），所以有

$$\nu_{2k-1}=0, \quad |\nu_{2k}|=|y^H \widetilde{H} \Sigma M_{k-1} \Sigma u| \\ \leqslant |v^H \Sigma u| \nu_{k-1} r^{k-1}.$$

类似地，有

$$\|\eta_{2k+1}\|_2 \leqslant a \nu_k r^k，其中 a:=\frac{\sigma}{r}\|\Sigma u\|_2 |v^H \Sigma u|, \quad k \geqslant 1.$$

于是，对于$r<\frac{1}{4}$，级数$\Sigma_{k=0}^{\infty}|\nu_k|$与$\Sigma_{k=0}^{\infty}\|\eta_k\|_2$是收敛的。因此，如果$\lambda=\Sigma_{k=0}^{\infty}\nu_k$，$\varphi=\Sigma_{k=0}^{\infty}\eta_k$，那么$\lambda\varphi=\Sigma_{k=0}(\Sigma_{i=0}^{k}\nu_i \eta_{k-i})$，且引理1.16适用.

关于$k \geqslant 1$相加，由上面确定的界容易得到

$$\left|\lambda-\sum_{k=0}^{2i}\nu_k\right|=\left|\lambda-\sum_{k=0}^{2i+1}\nu_k\right| \leqslant g_i(r)|v^H \Sigma u|, \quad i \geqslant 0$$

$$\left\|\varphi-\sum_{k=0}^{2i-1}\eta_k\right\|_2=\left\|\varphi-\sum_{k=0}^{2i}\eta_k\right\|_2 \leqslant g_i(r)a, \quad i \geqslant 1.$$

所以，对于$i=0$，$|\lambda-\zeta| \leqslant g(r)|v^H \Sigma u|$，及对于$i=1$，$\|\varphi-x-\eta_i\|_2 \leqslant g_1(r)a$；即有

$$\|\varphi-x\|_2 \leqslant \|\eta_1\|_2+g_1(r)a \leqslant (1+g(r)-1)\|\Sigma u\|_2 \\ =g(r)\|\Sigma u\|_2,$$

现在证明 λ 是在圆盘

$$D := \left\{ z \in \mathbb{C}, |z-\zeta| \leqslant \frac{1}{2\|\Sigma\|_2} \right\}$$

中 $\sigma(A)$ 的唯一的点。首先，λ 属于 D，这因为当 $r < \frac{1}{4}$ 时，

$g(r)|v^H \Sigma u| < 2|v^H \Sigma u| \leqslant 2r/\sigma < 1/2\sigma$ 成立。

对于 $z \in D$，求解方程 $A\xi - z\xi = b$。我们分解

$$\xi = (y^H \xi)x + (I-Q)\xi,$$

且令

$$\mathring{A}_z := [(I-Q)(A-zI)]_{\restriction \{y\}^\perp}.$$

记矩阵 $(I-Q)\mathring{A}_z^{-1}(I-Q)$ 为 $\Sigma(z)$，并回忆 $\Sigma(\xi) \equiv \Sigma$。我们形式地得到

$$y^H\xi[(\zeta - z) - v^H \Sigma(z) u] = y^H Q b - v^H \Sigma(z)(I - Q)b, \quad (I-Q)\xi = \Sigma(z)[(I-Q)b - y^H \xi u].$$

因为 $\Sigma(\zeta) = \Sigma$ 存在，所以对于使得 $|z-\zeta| < 1/\|\Sigma\|_2$ 的 z，$\Sigma(z)$ 也存在，尤其是对于 $z=\lambda$；$\sum(z) = \sum_{k=0}^{\infty}[(z-\zeta)\sum]^k \Sigma$。只需证明，对于 $z \in D - \{\lambda\}$，$|z-\zeta+v^H \Sigma(z) u| > 0$ 的情形。因为 λ 是 A 的一个本征值，所以 $(A-\lambda I)^{-1}$ 不存在，从而 $\lambda - \zeta + v^H \Sigma(\lambda) u = 0$。于是

$$z - \zeta + v^H \Sigma(z) u = z - \lambda + v^H [\Sigma(z) - \Sigma(\lambda)] u$$
$$= (z-\lambda)[1 + v^H \Sigma(z) \Sigma(\lambda) u].$$

而由

$$\frac{\|\Sigma u\|_2}{1 - |\lambda - \zeta| \|\Sigma\|_2} \frac{\|\Sigma^H v\|_2}{1 - |z-\zeta| \|\Sigma\|_2}$$
$$\leqslant 4\|\Sigma u\|_2 \|\Sigma^H v\|_2,$$

推知

$$(\Sigma^H(\bar{z})v)^H\Sigma(\lambda)u = \left(\sum_{k=0}^{\infty}[(\bar{z}-\bar{\zeta})\Sigma^H]^k\Sigma^H v)\right)^H$$

$$\sum_{k=0}[(\lambda-\zeta)\Sigma]^k\Sigma u$$

是按模有界的.这就证明了对于除 $z=\lambda$ 外的 D 中的所有的 z，$(A-zI)^{-1}$是存在的。沿着围绕 λ 的一条 Jordan 曲线来积分 $(A-zI)^{-1}$（参见第二章，第 7 节），我们得到相应于 λ 的谱投影 P；对于 $\xi\in\mathbb{C}^N$，

$$P\xi=\frac{y^H\xi-v^H\Sigma(\lambda)\xi}{1+v^H\Sigma^2(\lambda)u}(x-\Sigma(\lambda)u).$$

显然 P 是秩为 1 的投影，而且 λ 是 A 的单本征值。 □

例1.8 考虑如同定理 1.17 证明中所定义的 $\varphi_1=x+\eta_1$，φ_1是 φ 的比 x 更好的逼近（如果$\|\Sigma u\|_2$ 不小，而$\|\Sigma^H v\|_2$ 是小的，φ 甚至于可以不接近于 x）：

$$\|\varphi-\varphi_1\|_2\leqslant g_1(r)\alpha=\frac{g_1(r)}{r}\sigma|v^H\Sigma u|\,\|\Sigma u\|_2\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{g_1(r)}{r}\right)r\|\Sigma u\|_2,$$

其中$g_1(r)/r$当 $r\to 0$ 时趋向于 1。注意到，φ_1 与 $(A-\zeta I)^{-1}x$ 是共线的。实际上，$\eta_1=-\Sigma\hat{H}x$，且

$$(I-Q)(A-\zeta I)\Sigma\tilde{H}x=(I-Q)(A-\zeta I)x$$

可证$(I-Q)(A-\zeta I)\varphi_1=0$，所以 $(A-\zeta I)\varphi_1=Q(A-\zeta I)\varphi_1$ 是与 $x=Qx$共线的。以 ζ 作为 λ 的逼近，x 作为φ 的逼近，则向量 φ_1就对应于应用于A 的逆迭代的一个步.

令

$$\varphi_k=\sum_{i=0}^{k}\eta_i,\qquad \lambda_k=\sum_{i=0}^{k}\nu_i=y^HA\varphi_{k-1},$$

我们可以把递推公式（1.16）考虑为由ζ与x来计算λ与φ的数值方法。这种方法与Rayleigh商迭代之间的差别是，在这里我们有一个包含某个固定矩阵$A-\zeta I$的方程序列。试将Rayleigh商迭代与$A-\rho_k I$相比较（见第3.2节）。另一方面，这里在广义Rayleigh商λ_k中仅有右向量φ_{k-1}被校正.

习题

1.64　把（1.16）解释为一种迭代加细方法，研究由摄动$\widetilde{H}$的特殊结构而得出的这种方法的特征。

1.65　比较（1.16）与Rayleigh商迭代的收敛速率。

下面的推论是直接可得的。

推论1.18　如果ζ是$\widetilde{A}$的一个单本征值，且$r':=\varepsilon\varepsilon^*\|y\|_2\sigma^2<\frac{1}{4}$，那么，

$$|\lambda-\zeta|\leqslant g(r')\,|v^H\Sigma u|<2\sigma\|y\|_2\varepsilon\varepsilon^*,$$
$$\|\varphi-x\|_2\leqslant g(r')\,\|\Sigma u\|_2<2\sigma\varepsilon.$$

证明　$r\leqslant r'$及g是单调增加的。　□

推论1.18仅要求ε或ε^*是小的。如果ε及ε^*都是小的。那么广义Rayleigh商ζ是λ的具有更高阶$\varepsilon\varepsilon^*$的逼近。在这种情形下，$x\approx\varphi$及$y\approx\psi$；于是，$Q=xy^H\approx P=\varphi\psi^H$及$\Sigma\approx S$。因此$\|y\|_2\approx\|\psi\|_2$且$\sigma\approx s$。这又一次表明了谱条件数是$\|\psi\|_2$与$s$。$\|y\|_2$与$\sigma$提供了这些条件数的一种后验估计。然而在实际中求关于σ的上界问题却是一件琐碎的工作。

因为

$$|\lambda-\zeta+v^H\Sigma u|\leqslant g_1(r)\,|v^H\Sigma u|=O(r^2),$$

所以在误差 $\lambda-\zeta$ 中，$-v^H\Sigma u$ 是主要的项。它可以比 ε 与 ε^* 小得多；甚至 ε 与ε^*不小，它却可以很小。以后，这将用于拟三角矩阵。

就数据 x，y 和 $\zeta=y^HAx$ 说来，定理1.17的界是最优的。例如，在$\mathbb{R}^2$ 中考虑

$$A=\begin{pmatrix}0 & -a\\ a & 1/b\end{pmatrix}，其中\ x=y=e_1,\ \zeta=0.$$

Q是$\{e_1\}$上的正交投影，

$$u=\begin{pmatrix}0\\ a\end{pmatrix},\qquad v=\begin{pmatrix}0\\ -a\end{pmatrix}.$$

因此 $\varepsilon=\varepsilon^*=|a|$.

$$\Sigma=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix},\ \|\Sigma\|_2=\sigma=|b|.$$

$$v^H\Sigma u=-a^2b,\qquad 且\quad \|\Sigma u\|_2=|ab|.$$

A 的本征值是 $\lambda=(1/2b)(1\pm\sqrt{1-4a^2b^2})$。设 θ 是本征向量与e_1或与e_2之间的锐角。$\tan\theta=|\lambda|/a$。如果$r:=(ab)^2<\frac{1}{4}$，那么定理 1.17中的界是精确的：$|\lambda|=g((ab)^2)|b|a^2$ 且 $\tan\theta=g((ab)^2)|ab|$。

Redont（1979a）在更一般情况下，对Banach空间中的闭算子证明了定理1.17。当 T 有界时，在Fiedler和Pták（1964）及Pták（1976）中给出了定理1.18关于本征值的界。

习题

1.66 对矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a & v^H\\ u & C\end{pmatrix}$$

应用推论1.18，其中 $a\in\mathbb{C}$，$uv\in\mathbb{C}^{N-1}$，C是$(N-1)\times(N-1)$

阶的，且$\|u\|_2$及$\|v\|_2$足够小。

1.67　对于A是 Hermite 阵的情形，给出定理1.17 的相应变形。

1.68　对于$\mathbb{C}^N$上的任意一种范数$\|\cdot\|$，建立一个类似于定理1.17的结果。

正如在第 3 节中我们已经看到的，计算一个矩阵的全部本征值的数值方法，是用相似变换最终把这个矩阵化为上三角或对角的形式.因为过程是无限的，故而当迭代矩阵足够接近于极限矩阵时，我们就停止计算。设Δ是简单形式的矩阵，其本征值已完全知道，并设$A=\Delta+H$是本征值未知的迭代矩阵，对于这个矩阵，其本征值是原始问题的精确本征值。因为我们现在感兴趣的是方法本身的误差，不考虑在原始矩阵A的计算中的舍去误差的影响。由数值观点看来，两种情形是有趣的：Δ是对角阵或上三角阵，这是因为它们的对角元素都是A的近似本征值。当A是拟对角阵的时候，其所有右的及左的近似本征向量也是已知的。

4.2.2　A是拟对角阵

研究以关于任意矩阵A的下述定理为基础：

定理1.19　$A=(a_{ij})$ 的任意一个本征值至少在N个Gershgorin 圆盘$\{z\in\mathbb{C};\ |z-a_{ii}|\leqslant\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\}$ $(i=1,\cdots,N)$的一个之内。

证明　我们写出$A=D+H$，其中$D=\mathrm{diag}(a_{ii})$ 是A的对角部分，H是A的非对角部分。设λ是A的本征值。对于某些i，如果$\lambda=a_{ii}$，则定理是平凡的。于是假设$\lambda\neq a_{ii}$，$i=1,\cdots,N$。$\lambda I-D$是正则的，且

$$\lambda I-A=\lambda I-D-H=(\lambda I-D)[I-(\lambda I-D)^{-1}H].$$

容易看到$\|(\lambda I-D)^{-1}\|\|H\|<1$是$A-\lambda I$为正则的一个充分条件。对于$A$的任意本征值$\lambda$，得到

$$\|(\lambda I-D^{-1})\|_\infty\|H\|_\infty$$
$$=\max_i\left(|\lambda-a_{ii}|^{-1}\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right)\geqslant 1. \quad \square$$

推论1.20 如果N个Gershgorin圆盘不重叠，那么其中每个圆盘包含一个且仅有一个本征值，从而这个本征值是单的。

证明 我们假设a_{ii}不同，而且考虑$A(\varepsilon)=D+\varepsilon H$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$。对于$\varepsilon=0$，$N$个圆盘就是点$a_{ii}$。由连续性，当$\varepsilon$增大时，只要圆盘仍然是不相交的每个圆盘仍只包含一个本征值。 □

Gershgorin 局部化适用于一般矩阵，当应用于拟对角矩阵A时，它给出了误差界：A的非对角部分是小的，而且$\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$也同样是小的。当圆盘不重叠时，这提供了确定$|\lambda-a_{ii}|$的界的一种方法。在某些重叠情况下，对A可应用对角相似变换（参阅Wilkinson，1965；Varga，1965）。

习题

1.69 设$\{x_i\}_1^N$是N个正数的集合。证明

$$\forall\lambda\in\sigma(A),\ \exists\ i:$$
$$|\lambda-a_{ii}|\leqslant\frac{1}{x_i}\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j.$$

1.70 对于

$$A=\begin{pmatrix}1 & 10^{-4} & 2\times10^{-4}\\ -10^{-4} & 2 & 1.1\times10^{-4}\\ 1.2\times10^{-4} & -10^{-4} & 3\end{pmatrix},$$

利用对角相似变换与Gershgorin圆把接近1，2，3的本征值以10^{-8}阶的精度局部化。应用定理1.7与习题1.40于$A=D+H$上，其中$e_i^H He_i=0$，$i=1,2,3$，对上述结论加以解释。

1.71 证明下述命题（Ky Fan），它借助对角相似，用Gershgorin圆说明局部化的最优性。设$B=(b_{ij})$是一个不可约非负矩阵，满足$b_{ii}=0$，$b_{ij}\geqslant 0$，$i,j=1,\cdots,N$。对于任一N个正数的集$\{\rho_i\}_1^N$，及对于任意一个矩阵A满足

（i）$|a_{ij}|=b_{ij}$，$i\neq j$，

（ii）A的任意一个本征值至少落在下列圆盘

$$\{z:\ |z-a_{ii}|\leqslant\rho_i\},\quad i=1,\cdots,N$$

之一内，那么存在N个正数$\{x_i\}_1^N$，使得

$$\frac{1}{x_i}\sum_{j\neq i}b_{ij}x_j\leqslant\rho_i,\quad i=1,\cdots,N.$$

1.72 对角优势矩阵A满足：$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$，$i=1,\cdots,N$。证明它是正则的（Hadamard）。

1.73 证明具有正对角元素的对角优势Hermite阵是正定的。

1.74 当A是拟对角阵时，比较推论1.18及1.20所给出的局部化结果。

4.2.3 A是拟三角阵

如果仅有关于摄动H大小的某些信息，那么，对于任意可对角化的矩阵Δ，下述定理成立。

定理1.21 （Bauer-Fike）设Δ是可对角化的：$\Delta=VDV^{-1}$，$D=\mathrm{diag}(\mu_1,\ \cdots,\ \mu_N)$。那么，对于$A=\Delta+H$的任意一个本征值$\lambda$，存在$\Delta$的一个本征值$\mu_i$使得

$$|\lambda-\mu_i|\leqslant\|V^{-1}HV\|\leqslant\|V\|\|V^{-1}\|\|H\|.$$

证明 如果对某些i，$\lambda=\mu_i$，那么定理显然成立。于是设$\lambda\neq\mu_i$，$i=1,\cdots,N$。$\lambda I-D$是正则的且

$$\lambda I-\Delta-H=V(\lambda I-D-V^{-1}HV)V^{-1}.$$

对于A的任何一个本征值λ，

$$\|(\lambda I-D)^{-1}V^{-1}HV\|=\max_i|\lambda-\mu_i|^{-1}\|V^{-1}HV\|\geqslant 1. \quad \square$$

习题

1.75 说明定理1.21是命题1.15的一个推论。

命题 1.15 和定理 1.21 中的不等式两者都表明了$K(V)=\|V\|\|V^{-1}\|$对于可对角化矩阵Δ的所有本征值是一个整体条件数。如果Δ是Hermite阵或是正规的，则有$\|V\|_2=\|V^{-1}\|_2=1$. 但是，一般说来，要知道$K(V)$需要先知道Δ的全部本征向量。而在另一方面，推论1.18在仅需知道A的一个近似本征向量的情况下给出了误差界。

在实际中，往往A是拟三角阵就够了，例如QR法中的A. 设$A:=R+H$，其中$R=(a_{ij})$（$i\leqslant j$）是A的上三角部分，H是A的严格下三角部分，并且是小的。那么e_1（或e_N）是A（或A^H）的一个近似本征向量。定理1.17或1.19给出$|\lambda-a_{11}|$及$|\lambda-a_{NN}|$（$\lambda\in\sigma(A)$）的界。估计A的其它本征值的界需要知道R的其它本征向量，且这种计算可能是病态的，尤其当本征值相近的时候。在这方面，Lemordant (1977)及Chatelin(1983)给出了拟三角阵一组本征值的后验误差界。这种不需要计算近似本征向量而给出后验误差界的方法是有价值的。这些界基于下述定理，其中采用了定理1.17中用到的记号$\|\cdot\|$，它现在是$\mathbb{C}^N$上的任意一种范数，a是一个数量，满足$a\geqslant\|\Sigma\|$。引入下述条件：存在$\hat{\varepsilon}$，使得对于$k\geqslant 1$有：

$$|v^H\Sigma^Hu|\leqslant a^k\|Q^k\|\hat{\varepsilon}. \tag{1.17}$$

又令$\hat{r}:=a^2\|Q\|\hat{\varepsilon}$.

定理1.22 (Lemordant) 设ζ是$\tilde{A}$的一个单本征值且满足式（1.17）. 于是，如果$\tilde{r}<\frac{1}{4}$，那么，存在A的一个单本

征值λ使得$|\lambda-\zeta|\leqslant g(\widetilde{r})|v^H\Sigma u|$，λ是$A$的在圆盘$\{z\in\mathbb{C}:|z-\zeta|\leqslant 1/2a\}$内的唯一的本征值。如果$y^HPx\neq 0$，其中$P$是相应于λ的本征投影，那么，存在一个由$y^H\varphi=1$的规范化的本征向量$\varphi$，使得$\|\varphi-x\|\leqslant g(\widetilde{r})\|\Sigma u\|$。

证明　这个定理将在第六章（定理6.27中）就Banach空间中闭算子的更一般内容进行证明。证明基于泛函分析的摄动技巧。如果$\widetilde{r}<\frac{1}{8}$，命题6.28证明条件$y^HPx\neq 0$成立。 □

习题

1.76　借助$\mathbb{C}^N$上的欧几里得范数与$\sigma=\|\Sigma\|_2=a$，证明选取$\hat{\varepsilon}=\varepsilon\varepsilon^*$得出推论1.18，选取$\hat{\varepsilon}=r/\sigma^2\|y\|_2$得出定理1.17.

现在证明适用于A是拟三角阵的情形，存在满足式(1.17)的$\hat{\varepsilon}$的一种选择，其中ε，ε^*及r都不是小的。在$\mathbb{C}^N$上选取范数$\|\cdot\|_1$，且$Q=e_1e_1^T$是在$\{e_1\}$上的正交投影。$\zeta=e_1^TAe_1=a_{11}$。对于$i\neq 1$或$i\neq N$，e_i不是A或A^H的近似本征向量。

但是当A是拟三角阵时，Σ也是第i行第i列为零的拟三角阵。这蕴涵着对于$k>1$，不仅$v^H\Sigma u$而且$v^H\Sigma^k u$也同样是小的。更确切地，有下述引理。

引理1.23　(Lemordant) 假设A没有两个对角元素等于a_{11}，当A足够接近于三角矩阵时，则对于

$$x=y=e_1,\quad Q=e_1e_1^T$$

及对于范数$\|\cdot\|_1$满足条件（1.17）.

证明　设$A=R-H$，其中R是A的上三角部分。我们定义，对于$Q=e_1e_1^T$，$\mathring{A}_{a_{11}}:=[(I-Q)(A-a_{11}I)]_{\restriction\{e_1\}^\perp}$及

$$\Sigma:=(I-Q)\mathring{A}_{a_{11}}^{-1}(I-Q).$$

如果$\varepsilon:=\|H\|_1$足够小，且没有两个对角元素等于a_{11}，那么，

$\mathring{A}_{a_{ii}}$是正则的且Σ是有意义的。从而定义

$$\mathring{R}_{a_{ii}} := [(I-Q)(R-a_{ii}I)]_{\restriction\{e_i\}^{\perp}},$$

$$\mathring{H} := [(I-Q)H]_{\restriction\{e_i\}^{\perp}}.$$

如果$\mathring{R}_{a_{ii}}^{-1}$存在，即如果没有两个对角元素等于$a_{ii}$，那么，对于$k \geqslant 1$，$\Sigma^k = (I-Q)\mathring{A}_{a_{ii}}^{-1}(I-Q)$，且在$\{e_i\}^{\perp}$上有

$$\mathring{A}_{a_{ii}}^{-k} = [(\mathring{R}_{a_{ii}} - \mathring{H})^{-k} - \mathring{R}_{a_{ii}}^{-k}] + \mathring{R}_{a_{ii}}^{-k}.$$

定义$s_1 := \|\mathring{R}_{a_{ii}}^{-1}\|_1$及$\varepsilon_1 := \|\mathring{H}\|_1$且假设$\varepsilon_1 s_1 < 1$；注意到$\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$。利用恒等式

$$(R-H)^{-k} - R^{-k} = \sum_{j=0}^{k-1} (R-H)^{-j}[(R-H)^{-1} - R^{-1}]R^{-(k-j-1)}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} (R-H)^{-j-1}HR^{-k+j}$$

及

$$(R-H)^{-1} = R^{-1}(1-HR^{-1})^{-1} = R^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}(HR^{-1})^i,$$

得到

$$\|(\mathring{R}_{a_{ii}} - \mathring{H})^{-k} - \mathring{R}_{a_{ii}}^{-k}\|_1 \leqslant k\varepsilon_1 s_1\left(\frac{s_1}{1-\varepsilon_1 s_1}\right)^k,\quad k \geqslant 1.$$

取向量u和v为如下形式

$$u = Ae_i - a_{ii}e_i,\quad v = A^H e_i - \bar{a}_{ii}e_i.$$

它们的范数分别是

$$\|u\|_1 = \sum_{j=1}^{i-1}|a_{ji}| + \sum_{j=i+1}^{N}|a_{ji}|,\quad \|v\| = \max_{j\neq i}|a_{ij}|.$$

定义 $\varepsilon_u := \Sigma_{j=i+1}^{N} |a_{ji}|$，$\varepsilon_v := \max_{j<i} |a_{ij}|$，及

$$\overset{\circ}{u} := [(I-Q)u]_{\{e_i\}^\perp}, \quad \overset{\circ}{v} := [(I-Q)v]_{\{e_i\}^\perp}.$$

注意到$\max(\varepsilon_u, \varepsilon_v) \leqslant \varepsilon$。于是

$$|\overset{\circ}{v}^H[(\overset{\circ}{R}_{a_{ii}} - \overset{\circ}{H})^{-k} - \overset{\circ}{R}_{a_{ii}}^{-k}]\overset{\circ}{u}|$$

$$\leqslant k\varepsilon_1 s_1 \left(\frac{s_1}{1-\varepsilon_1 s_1}\right)^k \|u\|_1 \|v\|_\infty,$$

$$|\overset{\circ}{v}^H \overset{\circ}{R}_{a_{ii}}^{-k} \overset{\circ}{u}| \leqslant s_1^k(\|u\|_1 \varepsilon_v + \|v\|_\infty \varepsilon_u).$$

又注意到对于$k \geqslant 1$，$\left(\frac{3}{2}\right)^k > k$，所以由

$$a = \frac{3}{2}\frac{s_1}{1-\varepsilon_1 s_1} > \frac{3}{2}s_1 > s_1, \qquad (s_1\varepsilon_1 < 1)$$

及

$$\tilde{\varepsilon} = s_1\|u\|_1\|v\|_\infty \varepsilon_1 + \|u\|_1 \varepsilon_v + \|v\|_\infty \varepsilon_u \leqslant c\varepsilon$$

有

$$|v^H \Sigma^k u| = |\overset{\circ}{v}^H A_{a_{ii}}^{-k} \overset{\circ}{u}| \leqslant a^k \tilde{\varepsilon}. \quad \square$$

习题

1.77　验证在引理1.23中，$a \geqslant \|\Sigma\|_1$。对于足够小的ε，验证$e_i^1\varphi \neq 0$，其中φ是A的相应于接近a_{ii}的本征值的本征向量。

1.78　利用与定理1.17相同的例子，证明定理1.22中所给出的界对于数据x和y是最优的。

如果ε使得$\tilde{r} = a^2\tilde{\varepsilon} < \frac{1}{4}$及$\varepsilon_1 s_1 < 1$及如果$e_i^T\varphi \neq 0$（参阅习题1.77），那么，由定理1.22给出的局部化结果要求拟三

角矩阵满足引理1.23中的假定。注意到，由命题6.28，如果$\tilde{r}<\frac{1}{8}$，有$e_1^T\varphi\neq 0$ 且 $g\left(\frac{1}{8}\right)<1.2$.

例1.9 设在$\mathbb{R}^3$中，令

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1.6\\ 0 & 5 & 1\\ 10^{-3} & 10^{-3} & 9\end{pmatrix}.$$

为了限于在靠近5的本征值上，选取$x=y=e_2$。那么

$$\mathring{u}=\begin{pmatrix}1\\ 10^{-3}\end{pmatrix},\qquad \mathring{v}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

且$\varepsilon_u=10^{-3}$，$\varepsilon_v=0$。

$$\mathring{R}_5^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 1.6\\ 0 & 4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-0.25 & 0.1\\ 0 & 0.25\end{pmatrix}.$$

推导出

$s_1=\|\mathring{R}_5^{-1}\|_1\doteq 0.35$，$\varepsilon_1=\|\mathring{H}\|_1=10^{-3}$，$\varepsilon_1 s_1=35\times 10^{-5}<1$；因此$a=0.53$及$\tilde{\varepsilon}=1.4\times 10^{-3}$。$\|Q\|_1=1$及$\tilde{r}=a^2\tilde{\varepsilon}=3.9\times 10^{-4}<\frac{1}{4}$；于是，$g(\tilde{r})=1.0004$。通过解

$$\begin{pmatrix}-4 & 1.6\\ 10^{-3} & 4\end{pmatrix}\mathring{w}=\mathring{u}$$

计算出$w=\Sigma u$。我们得出这样的结论：存在A的一个本征值λ使得$|\lambda-5|\leqslant g(\tilde{r})|v^H\Sigma u|\leqslant 3.13\times 10^{-4}$，$\lambda$是$A$的在圆盘$\{z\in\mathbb{C};\ |z-5|\leqslant 1/1.06=0.94\}$内的唯一的本征值。精确值$\lambda=4.9996875$，从而$\lambda-5=3.125\times 10^{-4}$。

对应于λ，由$e_2^T\varphi=1$规范化的精确本征向量是$\varphi=(0.24989,\ 1,\ -0.00031)^T$。显然，与$\tilde{r}$相比，$\varphi-e_2$不是小

的．通过计算 $x = e_2 + w$：$w = (-0.24987,\ 0,\ 0.00031)^T$ 及

$$\varphi - x = (1.953\times10^{-5},\ 0,\ -0.002\times10^{-5})^T$$

来校正 e_2。所以 $\|\varphi - x\|_1 = 0.20\times10^{-4}$，且由第六章习题6.41中给出的它的界而得到

$$\|\varphi - x\|_1 \leqslant |g(\tilde{r}) - 1|\,\|w\|_1 \leqslant 0.25\times3.9\times10^{-4} = $$
$$= 0.96\times10^{-4}.$$

例1.10 在 $\mathbb{R}^5$ 中，令

$$B(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0.850 & 0.662 & 0.231 & 0.933 \\ 0 & 3-\delta & 0.726 & 0.216 & 0.214 \\ 0 & 0 & 3 & 0.663 & -0.247 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -0.481 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

及

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.118 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.092 & 0.101 & 0 & 0 & 0 \\ 0.032 & 0.030 & 0.092 & 0 & 0 \\ 0.129 & 0.030 & -0.034 & -0.067 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们感兴趣的是 $B(\delta) + \varepsilon H$ 接近于 3 的精确本征值 λ。用引理1.23，$i = 3$ 的情形中的记号，对于 δ 与 ε 的不同的值来比较精确的差 $\eta = \lambda - 3$ 与它的界 $\hat{\eta} = 2|v^H \Sigma u|$。我们有 $\|H\|_2 = 0.219$。其结果总结于下表中

ε	δ	η	$\hat{\eta}$
1	1	0.034	0.071
1	0.5	0.085	0.218
1	0.1	0.190	1.726
10^{-3}	0.1	7.4×10^{-4}	1.29×10^{-3}

这个例子表明了随着比 $\delta/\|H\|_2$ 的减小，界的精确程度降低。也说明了尽管条件 $\tilde{r}<\frac{1}{4}$ 不满足，但 $\tilde{\eta}$ 仍然是 η 的一个可靠估计。

习题

1.79 当利用 QR 算法计算 A 的本征值的时候，在第 k 步停止，其中 $A_k=R_k+H_k$。提出一个计算 H_k 的方法（参阅 Wilkinson，1965）。

至此，已经讨论了单本征值。重或相近本征值的情形需要更复杂的技巧，我们将在第六章中进行研究。

对于拟三角矩阵的这些界的实际利用，要求估计 s_1，即估计一个已知三角矩阵之逆的范数。这需要一定的计算量。严格说来，要求 s_1 只需要知道 A 是否充分接近于一个三角矩阵。因为 $g(\tilde{r})<2$，所以，在定理1.22中所给出的界的实际计算仅包含有向量 $w=\Sigma u$ 的计算，即求解方程

$$(I-Q)(A-\zeta I)(I-Q)w=(I-Q)u,$$

$$Qw=0.$$

4.3 A 是Hermite阵

当 A 是 Hermite 阵时，因为它的本征值是实的这就使得该理论得以简化，并存在由正交本征向量组成的基，且 $\|A\|_2=\max_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|$。设 $A=QDQ^H$，$D=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_N)$，按值的增加顺序 $\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_N$ 排列，$\{\varphi_i\}_1^N$ 是标准正交本征向量的集合。

假设给定一个向量 x，$\|x\|_2=1$。A 的以 x 为基础的 Rayleigh 商是 x^HAx。正如后面将看到的，Rayleigh 商的性质在 Hermite 矩阵理论中起了重要的作用。

定理1.24 （Courant—Fischer 最小—最大表示）设 A 是

具有本征值$\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_N$的Hermite矩阵，那么，对于$k=1, 2, \cdots, N$，$\mu_k = \min_{V_k} \max(x^H A x;\ x \in V_k,\ \|x\|_2 = 1)$，其中$V_k$是$\mathbb{C}^N$中一个任意的$k$维子空间。

证明　设M_k是由$\varphi_k, \cdots, \varphi_N$张成的，$\dim M_k = N-k+1$，因此$\dim V_k = k$蕴涵$M_k \cap V_k \neq \{0\}$。于是存在$x \in M_k \cap V_k$使得$\|x\|_2 = 1$且$x = \Sigma_{i=k}^N \xi_i \varphi_i$.

从而$x^H A x = \Sigma_k^N \mu_i |\xi_i|^2 \geqslant \mu_k \Sigma_k^N |\xi_i|^2 = \mu_k$。因为$V_k$是任意的，所以$\min_{V_k} \max(x^H A x;\ x \in V_k,\ \|x\|_2 = 1) \geqslant \mu_k$.

设V_k'是由$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$张成的，$\dim V_k' = k$，且设$x \in V_k'$，$\|x\|_2 = 1$，进而$x = \Sigma_{i=1}^k \eta_i \varphi_i$。于是$x^H A x = \Sigma_1^k \mu_i |\eta_i|^2 \leqslant \mu_k$，及

$$\max(x^H A x;\ x \in V_k',\ \|x\|_2 = 1) \leqslant \mu_k. \quad \square$$

应当注意，实际上这一结果回到了Poincare的结论（参阅Weinstein和Stenger，1972）.

推论1.25　当$x^H x = 1$时，$\mu_1 \leqslant x^H A x \leqslant \mu_N$.

证明　结论可以容易地由定理1.24得到。　□

如果x（$\|x\|_2 = 1$）是A的近似本征向量，Rayleigh商$\rho := x^H A x$可以用作后验误差分析。在$A = A^H$的情形下，$\rho = x^H A x$的选择（代替$\xi = y^H A x$）是必然的，它完全利用了x是A及A^H的一个近似本征值这一事实.

在Hilbert空间的自伴算子的一般内容中，我们给出的两个主要结果（引理1.26和定理1.28）是正确的；参阅lord Rayleigh（1899）和Temple（1928）。通常认为引理1.26是由Krylov和Weinstein提出来的。令$\varepsilon := \|Ax - \rho x\|_2$.

引理1.26　对于满足$\|x\|_2 = 1$的任意一个向量x，存在A的一个本征值λ，使得$|\lambda - \rho| \leqslant \varepsilon$.

证明　它是命题1.15的一个简单的应用，其中取λ是$\rho =$

$= x^H Ax$。于是$\|r\|_2 = \|Ax - \rho x\|_2 = \varepsilon$． □

正如在证明了下述预备引理以后将要看到的，如果我们有关于λ与A的其它本征值的距离的信息，上述不等式就可以被改进。(a, b)表示开区间

$$\{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}.$$

引理1.27 (kato)设a，b是两个实数，使得$a < \rho < b$且(a, b)不包含A的本征值；那么，$(b-\rho)(\rho-a) \leqslant \varepsilon^2$。

证明 $A = QDQ^H$；令$y := Q^H x$，$\|y\|_2 = \|x\|_2 = 1$，那么，$y = \Sigma_{i=1}^N \xi_i \varphi_i$，从而

$$(Ax - bx)^H(Ax - ax) = (Dy - by)^H(Dy - ay)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\mu_i - a)(\mu_i - b)\ |\xi_i|^2$$

是非负的．另一方面，

$$(Ax - bx)^H(Ax - ax) = (Ax - \rho x + (\rho - b)x)^H(Ax - \rho x + (\rho - a)x)^H$$

$$= \varepsilon^2 + (\rho - b)(\rho - a) \geqslant 0.$$ □

设$\theta = \theta(x, M)$是x与相应于λ的本征空间M之间的锐角．

定理1.28 (Kato—Temple) 假设存在一个区间$(\underline{\lambda}, \overline{\lambda})$不包含除λ外的$A$的本征值，且使得$\underline{\lambda} < \rho < \overline{\lambda}$，那么，

$$\rho - \frac{\varepsilon^2}{\overline{\lambda} - \rho} \leqslant \lambda \leqslant \rho + \frac{\varepsilon^2}{\rho - \underline{\lambda}},$$

$$\sin\theta \leqslant \frac{2}{\overline{\lambda} - \underline{\lambda}}\left[\left(\rho - \frac{\underline{\lambda} + \overline{\lambda}}{2}\right)^2 + \varepsilon^2\right]^{1/2}.$$

证明 它是推论1.27的直接应用（参阅定理6.21的证明）． □

与ε比较，$\overline{\lambda} - \rho$与$\rho - \underline{\lambda}$越大，与Krylov—Weinstein

不等式比较，其 Kato—Temple 界越好。定义

$$\delta(\rho):=\min_{\mu\in\sigma(A)-\{\lambda\}}|\rho-\mu|=\operatorname{dist}(\rho,\ \sigma(A)-\{\lambda\}),$$

推论1.29 $|\lambda-\rho|\leqslant\varepsilon^2/\delta(\rho)$ 且 $\sin\theta\leqslant\varepsilon/\delta(\rho)$。

证明 选取 $\underline{\lambda}=\rho-\delta(\rho)$ 及 $\overline{\lambda}=\rho+\delta(\rho)$。 □

注记 （1）当 ε 小时，$\delta(\rho)\approx d(\lambda)$，为 λ 的孤立距离。

（2）只要 $\varepsilon<\delta(\rho)$，推论1.29便改进了引理1.26。

（3）对于一个单本征值及一个非 Hermite 阵，推论1.18作为推论1.29的一个自然推广，其中 $x=y$，$\|x\|_2=1$，$\zeta=\rho$，$\varepsilon=\varepsilon^*$。推论1.29得出 $|\lambda-\rho|\leqslant2\sigma\varepsilon^2$ 且 $\|\varphi-x\|_2=\tan\theta\leqslant2\sigma\varepsilon$，其中 $\sigma\approx s=1/d(\lambda)$；参见图1.5。

（4）对于计算定理1.28所定义的 $\underline{\lambda}$ 及 $\overline{\lambda}$，Krylov-Weinstein 不等式是有用的。

例1.11 对于

$$A=\begin{pmatrix}1 & 10^{-5} & 10^{-5}\\ 10^{-5} & 2 & 10^{-5}\\ 10^{-5} & 10^{-5} & 3\end{pmatrix},$$

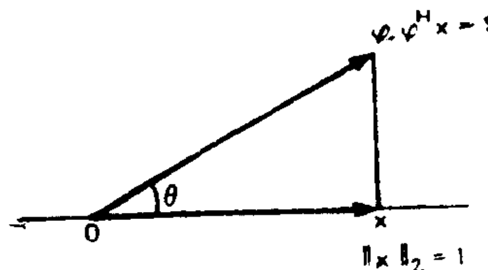


图 1.5

由 Krylov-Weinstein 不等式得知，当 $x=e_i$，$i=1,2,3$ 时，$|\lambda_i-i|\leqslant\sqrt{2}\times10^{-5}$。然后应用定理 1.28 得到

$$1-\frac{2\times10^{-10}}{1-\sqrt{2}\times10^{-5}}\leqslant\lambda_1\leqslant1,$$

$$|\lambda_2-2|\leqslant\frac{2\times10^{-10}}{1-\sqrt{2}\times10^{-5}},$$

及

$$3\leqslant\lambda_3\leqslant3+\frac{2\times10^{-10}}{1-\sqrt{2}\times10^{-5}}.$$

习题

1.80 设x是固定的，$\|x\|_2=1$，证明，对于$\lambda=x^H Ax$，可达到$\min_{\lambda\in\mathbb{C}}\|Ax-\lambda x\|_2$。

1.81 设A是有重本征值$\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_N$的Hermite矩阵，且设$A_{N-1}$是去掉$A$的最后一行及最后一列所得到$N-1$阶首主子阵。如果$\mu_1'\leqslant\mu_2'\leqslant\cdots\leqslant\mu_{N-1}'$是$A_{N-1}$的重本征值，证明$\mu_1\leqslant$

$\leqslant\mu_1'\leqslant\mu_2\leqslant\mu_2'\leqslant\cdots\leqslant\mu_{N-1}'\leqslant\mu_N$。

现将关于后验误差分析的这一节总结如下。这些结果或者是对于无论什么剩余范数都有效的局部化结果，或者是仅当剩余范数足够小时才有效的加细误差界.

我们给出下面的一些注记来结束本节.关于Hermite矩阵的某些方法是基于这样的事实，即A的本征值是Rayleigh商$\rho(x):=x^HAx$的唯一的稳定值，所以这时，可以认为这些方法是使$\varphi(x)$优化的方法。在这方面，$\rho(x)$的下述性质是有趣的：

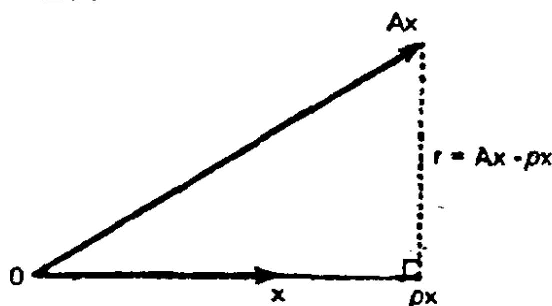


图 1.6

（i）$\rho(x)$的梯度是剩余的一个倍数

$$g(x):=\rho'(x)=2[Ax-\rho(x)x];$$

（ii）$\rho(x)$的Hesse矩阵是

$$H(x):=\rho''(x)=2[A-\rho(x)I-g(x)x^H-xg^H(x)].$$

因而$x^Hg(x)=0$，且$H(x)x=-g(x)$；参见图1.6。本征值μ_i是$\rho(x)$的稳定值；假设

$$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_N.$$

那么$\mu_1=\max_{x\in\mathbb{C}^N}\rho(x)$，且计算本征元$\mu_1,\varphi_1$的大多数迭代最优算法的收敛速率依赖于在$\varphi_1$处对$\rho$的Hesse阵求逆的条件数。假设$\mu_1$是单的：

$$H(\varphi_1)=2(A-\mu_1 I).$$

令 $\hat{H}:=H(\varphi_1)_{\restriction\{\varphi_1\}^\perp}$:

$$K(\hat{H})=\|\hat{H}\|\|\hat{H}^{-1}\|=\frac{\mu_1-\mu_N}{\mu_1-\mu_2}.$$

类似地，对于 $1<i\leqslant N$，$\mu_i=\max(x^H Ax: x\in\{\varphi_1,\cdots,\varphi_{i-1}\}^\perp$ 且 $x^H x=1)$。如果 μ_i 是单的，对应的条件数就是 $(\mu_i-\mu_N)/(\mu_i-\mu_{i+1})$。这些数将在Lanczos法的分析中起作用（第5.3节）。

5. 大型矩阵的本征值问题

在自然界、工程与社会科学中，各种各样的问题要求解大型本征值问题，大型本征值问题或是 $A\varphi=\lambda\varphi$，或更经常地是 $A\varphi=\lambda B\varphi$，其中 A 与 B 是稀疏的。有确定结构的，而且往往是对称矩阵，通常来自于连续问题的有限差分与有限元的离散化；而无确定结构的，非对称矩阵来自于社会科学。例如，引用排队系统的一个Markov 链模型（Carhard（1981））与大范围经济模型的动态稳定性（d'Almeida，1980）。

当 A 是大型、非结构的且一般是非对称矩阵的时候，我们对于计算 $A\varphi=\lambda\varphi$ 的某些本征值的流行的迭代数值方法作一综述．通常，这些方法只需要进行形如 Ax 型的矩阵乘向量的计算．

在Duff（1977）中给出了关于处理大型稀疏阵的大批文献目录。更近代的资料是Reid（1980）与Duff（1981）。

5.1 方法原理

我们的想法是用那些阶数 ν 比 N 小得多的矩阵的本征元来逼近阶数为 N 的矩阵的本征元，而这是通过 $X=\mathbb{C}^N$ 到它的一个 ν 维子空间 X_n 上的正交投影得到的。设 π_n 是 X 到 X_n 上的正交投影的矩阵。

在X中，用求

$$\lambda_n \in \mathbb{C},\quad 0 \neq \varphi_n \in X_n \quad \text{满足}$$
$$\pi_n(A\varphi_n - \lambda_n \varphi_n) = 0, \tag{1.19}$$

来逼近本征值问题：

$$\lambda \in \mathbb{C},\quad 0 \neq \varphi \in \mathbb{C}^N \quad \text{满足}$$
$$A\varphi = \lambda\varphi, \tag{1.18}$$

(1.19) 是 (1.18) 的Galerkin逼近（参阅第4章）。计算的方法在于产生X_n的一组标准正交基，且在这组基下解(1.19)。设Q_n是$N\times\nu$矩阵，它的列是X_n的ν个标准正交向量。令$\varphi_n := Q_n\xi_n$，$\xi_n \in \mathbb{C}^N$；ξ_n是

$$Q_n^H(AQ_n - \lambda_n Q_n)\xi_n = 0$$

的解．由$\nu\times\nu$矩阵$B_n := Q_n^H A Q_n$，于是，(1.19) 等价于$\mathbb{C}^\nu$中的本征值问题：

$$\text{求}\lambda_n \in \mathbb{C},\quad 0 \neq \xi_n \in \mathbb{C}^\nu \text{使得} B_n\xi_n = \lambda_n\xi_n. \tag{1.20}$$

习题

1.82　设V_n是$N\times\nu$矩阵，它的列是X_n的一组任意的基（不必标准正交）。写出在此基下的本征值问题 (1.19)。

1.83　验证在X_n的基Q_n下，矩阵B_n表示算子$\mathscr{A}_n = \pi_n A_{|X_n}$：$X_n \to X_n$。

1.84　证明$A_n = \pi_n A$，$A_n\pi_n = \pi_n A \pi_n$，且在X_n中，$\mathscr{A}_n$有相同的非零本征值λ_n和相应本征向量φ_n．

1.85　证明　如果A是Hermite阵，那么，$\mathscr{A}_n$与B_n也是，且证明，由$\|\varphi_n\|_2 = 1$，有$\lambda_n = \varphi_n^H A_n \varphi_n = \varphi_n^H A \varphi_n$。

1.86　提出一个类似的方法来逼近大型方程组$Ax = b$的解x。写出在$\mathbb{C}^\nu$中求解的相应的方程组．

在实际中，子空间X_n是由给定的初始向量x所得到的Krylov向量或r个线性无关的向量的集合$\{x_i\}_1^r$产生的。设U

是 x_1，x_2，…，x_r（$1 \leqslant r < N$）所张成的。由下面关于 X_n 的选择导出了两类主要的方法。

（a）整个迭代过程中，对于 $n=1,2,\cdots$，$X_n = A^n U$，$\dim X_n = r$ 是常量。这种选择，当 $r>1$ 时，得出同时迭代法；当 $r=1$ 时，得出幂法。

（b）对于 $n=1,2,\cdots,N$，$X_n=\{U, AU,\cdots,A^{n-1}U\}$，在全部迭代过程中，$\dim X_n = nr$ 增加。这种选择对应于广义块 Lanczos 法。它适用于一般（非 Hermite）矩阵，当 A 是 Hermite阵时，这种方法简化为块 Lanczos 法（$r=1$ 时为 Lanczos法）。实际上，这个方法意味着使 n 比 N 小得多，所以它是不完善的。

给出本征值 λ，相应的本征向量为 φ，$\|\varphi\|_2=1$，我们希望知道是否存在 $\mathscr{A}_n=\pi_n A_{\restriction X_n}$（或 $A_n=\pi_n A$）的本征元 λ_n，φ_n 的序列，使得当 n 增大时，分别迅速地收敛于 λ 和 φ。

这种逼近方法是一种投影方法。所以，根据 $\text{dist}(\varphi, X_n) = \|(I-\pi_n)\varphi\|_2 = \sin\theta(\varphi, X_n)$，设法确定误差 $|\lambda-\lambda_n|$ 与 $\|\varphi-\varphi_n\|_2$ 的界是合理的（参阅第四章，第六章），其中，$\theta(\varphi, X_n)$ 是 φ 与子空间 X_n 之间的锐角。其实，这种方法的收敛性分析可分成两步：

（1）证明对于所考虑的 X_n 的选择，存在一个或多个本征向量 φ，使得 $\alpha_n := \|(I-\pi_n)\varphi\|_2$ 是小的。

（2）根据 α_n 确定 $|\lambda-\lambda_n|$ 与 $\|\varphi-\varphi_n\|_2$ 的界.

所以将由对起关键作用的 α_n 的估计得出这些方法的收敛速率。一般地，假定 λ 是单的。如果 λ 是重的，则分析更复杂而且出现指数 $1/l$（l 是 λ 的陡度）。

5.2 子空间迭代法

假设 A 的 N 个重本征值满足 $|\mu_1| \geqslant \cdots \geqslant |\mu_r| > |\mu_{r+1}| \geqslant \cdots \geqslant |\mu_N|$。$\{\varphi_i\}_1^N$ 是相应的 Jordan 基.

设M是r维（$1\leqslant r<N$）不变主子空间．P是相应的谱投影．$W:=(I-P)X$，其中$X=M\oplus W$．

5.2.1 收敛性

根据定理1.8，一种方法收敛，当且仅当$\{Px_i\}_1^r$是无关的．于是借助第3.2节中的记号，X_n趋向于M，及$\mathscr{A}_n$趋向于$A_{\restriction M}$．$\mathscr{A}_n$的本征元收敛于$A_{\restriction M}$的本征元：A的r个主本征值，及相应的本征向量。

5.2.2 $\|(I-\pi_n)\varphi_i\|_2$的估计

相应于$\mu_1,\cdots,\mu_r$的向量$\varphi_1,\cdots,\varphi_r$或是本征向量，或是广义本征向量。假设$\varphi_i$是$A$的一个本征向量．

引理1.30 如果r个向量$\{Px_k\}_1^r$是无关的，那么，对于A的任意一个本征向量φ_i（$1\leqslant i\leqslant r$），存在唯一的$u_i\in U$，使得$Pu_i=\varphi_i$且$\|(I-\pi_n)\varphi_i\|_2\leqslant\|\varphi_i-u_i\|_2(|\mu_{r+1}/\mu_i|+\varepsilon_n)^n$，其中，当$n\to\infty$时，$\varepsilon_n\to 0$．

证明 任意一个$u\in U$，可以写成$u=\sum_{k=1}^r t_kx_k$。于是$Pu=\sum_{k=1}^r t_kPx_k$。给定$\varphi_i\in M$，由于$\{Px_k\}_1^r$无关，所以存在唯一的$u_i\in U$，使得$Pu_i=\varphi_i$，从而u_i可写成$u_i=\varphi_i+v_i$，其中$v_i=(I-P)u_i\in W$。因为φ_i是相应于μ_i的本征向量，所以由定义有

$$\|(I-\pi_n)\varphi_i\|_2=\min_{x\in X_n}\|\varphi_i-x\|_2\leqslant\|\varphi_i-\hat{x}_i\|_2,$$

其中$\hat{x}_i=(1/\mu_i^n)A^nu_i=\varphi_i+(1/\mu_i^n)A^nv_i$。如果$A$是可对角化的，那么，

$$\left\|\frac{1}{\mu_i^n}A^nv_i\right\|_2\leqslant\left|\frac{\mu_{r+1}}{\mu_i}\right|^n\|v_i\|_2,\text{ 对}v_i\in W.$$

如果A不是可对角化的，令$B:=(1/\mu_i)A_{\restriction W}$。于是有$r_\sigma(B)=|\mu_{r+1}/\mu_i|$。而且有

$$\|B^nv_i\|_2\leqslant\|B^n\|_2\|v_i\|_2=(\|B^n\|_2^{1/n})^n\|v_i\|_2$$

$$\leqslant (r_\sigma(B)+\varepsilon_n)^n \|v_i\|_2,$$

其中，当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 0$。$\|v_i\|_2=\|\varphi_i-u_i\|_2=\|(P-I)u_i\|_2$。 □

当 $n\to\infty$ 时，以 $|\mu_{r+1}/\mu_i|$ 的速率，$\text{dist}(\varphi_i,\ X_n)\to 0$.

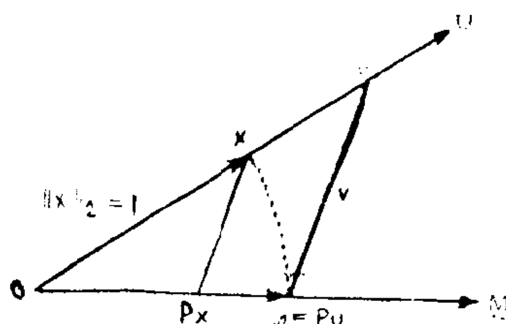


图 1.7

常量 $\|\varphi_i-u_i\|_2$ 表示了初始子空间 U 关于 φ_i 有多好的程度，参见图 1.7 中 $r=1$ 的情形. 如果 A 是 Hermite 阵，则有 $\|v_i\|_2=\tan\theta_i$，其中 $\theta_i=\theta(\varphi_i,u_i)$ 是本征向量 φ_i 与其在 U 中的对应向量 u_i 之间的锐角。

5.2.3 收敛速率

设 λ（或 λ_n）是 A（或 $A_n=\pi_nA$）的相应于本征向量 φ（$\|\varphi\|_2=1$）（或 φ_n，$\|\varphi_n\|_2=1$）的单本征值. λ 是在 A 的 r 个主本征值中选取的，c 是一般的常数。

引理1.31 给定 λ，φ，那么对于足够大的 n，存在 λ_n，φ_n 使得 $|\lambda-\lambda_n|\leqslant c\alpha_n$，$\|\varphi-\varphi_n\|_2\leqslant c\alpha_n$. 如果 A 是 Hermite 阵，那么 $|\lambda-\lambda_n|\leqslant c\alpha_n^2$。

证明 令 $x=\varphi$，$y=\psi$ 分别表示 A 的由 $\psi^H\varphi=\|\varphi\|_2=1$ 规范化的右，左本征向量，对 A_n 应用定理 1.17. 设 $\hat{\varphi}_n$ 是 A_n 的由 $\psi^H\hat{\varphi}_n=1$ 规范化的本征向量. 广义 Rayleigh 商是 $\zeta_n=\psi^HA_n\varphi$，剩余向量是 $A_n\varphi-\zeta_n\varphi$. 首先根据 α_n 确定它的界：

$$A_n\varphi-\zeta_n\varphi=(A_n-\lambda I)\varphi+(\lambda-\zeta_n)\varphi$$

$$=(A_n-A)\varphi+[\psi^H(A-A_n)\varphi]\varphi$$

$$=\lambda(\pi_n-I)\varphi+\lambda[\psi^H(I-\pi_n)\varphi]\varphi.$$

因此，当 $n\to\infty$ 时

$$\|A_n\varphi-\zeta_n\varphi\|_2\leqslant|\lambda|(1+\|\psi\|_2)\alpha_n,$$

趋于0．类似地，当$n\to\infty$时，$|\lambda-\zeta_n|\leqslant|\lambda|\|\psi\|_2\alpha_n$趋于0．$Q=\varphi\psi^H$是$A$的相应于$\lambda$的谱投影．如果$\zeta_n$不是$[(I-Q)A_n]_{|(\psi)^\perp}$的一个本征值，那么由定义$\Sigma_n:=(I-Q)(A_n-\zeta_n I)^{-1}(I-Q)$．剩下的是要证明$\|\Sigma_n\|_2$一致有界．由于$A^nU\to M$，所以在$A^nU$上的正交投影$\pi_n$趋向于在$M$上的正交投影$\pi$，进而$A_n=\pi_n A\to A':=\pi A$．$A'$的非零本征值是$A$的$r$个主本征值．因为$\lambda$是$A$的单本征值，所以它不再是$A'(I-Q)$的本征值．当$n\to\infty$时，$\zeta_n\to\lambda$，且不妨假设$\lambda\neq 0$．

故对于足够大的n，Σ_n是有意义的，且

$$\Sigma_n\to(I-Q)(A'-\lambda I)^{-1}(I-Q).$$

然后可应用定理1.17，得到

$$|\lambda_n-\zeta_n|\leqslant c\alpha_n,\quad \|\varphi-\hat{\varphi}_n\|_2\leqslant c\alpha_n.$$

于是等式

$$\begin{aligned}\lambda-\lambda_n&=\psi^H A\varphi-\psi^H A_n\hat{\varphi}_n\\&=\psi^H(A-A_n)\varphi+\psi^H A_n(\varphi-\hat{\varphi}_n)\end{aligned}$$

蕴涵$|\lambda-\lambda_n|\leqslant c\alpha_n$．

令$\varphi_n:=\hat{\varphi}_n/\|\hat{\varphi}_n\|_2$．因为$\|\hat{\varphi}_n\|_2\to 1$，所以容易证得$\|\varphi-\varphi_n\|_2\leqslant c\alpha_n$．

如果A是Hermite阵，那么，由于$\lambda_n=\varphi_n^H A\varphi_n$，所以，$|\lambda-\lambda_n|\leqslant c\|(A-A_n)\varphi_n\|_2^2$．由$(A-A_n)\varphi=\lambda(I-\pi_n)\varphi+(I-\pi_n)A(\varphi_n-\varphi)$得出$|\lambda-\lambda_n|\leqslant c\alpha_n^2$，$\lambda$可能是重的． □

定理1.32（Chatelin-Saad） 如果$|\mu_r|>|\mu_{r+1}|$，且$\{Px_k\}_1^r$是无关的，那么关于r个向量的同时迭代法是收敛的．此外，如果第i个主本征值是单的，则第i（i＝1，…，r）个本征对的收敛速度就是$|\mu_{r+1}/\mu_i|$阶的．如果A是Hermite阵，则第i个本征值的收敛速率为$|\mu_{r+1}/\mu_i|^2$．

证明　直接应用引理1.30和1.31。注意当A是Hermite阵时，可以去掉第i个本征值是单的假定。　□

习题

1.87　当A是Hermite阵且$\mu_1^{(n)}$是A_n的主本征值时，证明$0 \leqslant \mu_1 - \mu_1^{(n)} \leqslant (\mu_1 - \mu_N) |\mu_{r+1}/\mu_1|^{2n} \tan^2\theta(\varphi_1, u_1)$。

5.3　关于Hermite矩阵的Lanczos法

5.3.1 算法

假设A是Hermite阵。给定$x \neq 0$，现在用$X_n = \{x, Ax, \cdots, A^{n-1}x\}$（$n = 1, 2, \cdots, \nu < N$）定义序列$\{X_n\}$。Lanczos法提出了实现$A$在$X_n$上的Ritz投影的一条简单的途径。如果进行精确的计算，那么，Lanczos算法迭代产生X_n的一组标准正交基$\{v_i\}_1^n$，在这组基下，$\mathscr{A}_n$可用三对角阵T_n来表示：

（1）$v_1 := x/\|x\|_2$，　$a_1 := v_1^H A v_1$，$b_1 := 0$，

（2）对于 $j = 1, 2, \cdots, n-1$，作

$x_{j+1} := Av_j - a_j v_j - b_j v_{j-1}$，$b_{j+1} := \|x_{j+1}\|_2$；

$v_{j+1} := x_{j+1}/\|x_{j+1}\|_2$，$a_{j+1} := v_{j+1}^H A v_{j+1}$。

T_n是$n \times n$的三对角Hermite矩阵，其对角元素是a_i（$i = 1, \cdots, n$）及非对角元素是b_i（$i = 2, \cdots, n$）。

Lanczos把这种算法作为一种通过执行N步（$X_n = X$）以使Hermite矩阵三对角化的方法提出来的。但由于正交化的数值损失导致抛弃Householder法。然而对于大型矩阵，上述不完全的三对角化的使用（ν步），又使这种古老的方法得以复活。

如果对于$j = 2, \cdots, n$，$x_j \neq 0$，那么这种算法是可行的。如果初始向量x使得它的化零多项式的次数$\geqslant n$，即如果对于任意一个次数小于n的多项式p，$p(A)x \neq 0$时，就完成了算法。这时，T_n是一个不可约的三对角矩阵，且其结果，

它的全部本征值是单的（习题1.48）通常，称A的本征元为A的Ritz值与Ritz向量。

设$\{\lambda_i\}_1^k$是A的K个相异（可能为多重）的本征值。对于$1\leqslant n_0\leqslant n<N$，我们感兴趣的是$A$的$n_0$个最大本征值。

A（或T_n）的本征值按递减大小排列：

$\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_k$（或$\lambda_1^{(n)}>\lambda_2^{(n)}>\cdots>\lambda_n^{(n)}$，

令$\lambda_{min}:=\lambda_k$。对于$i=1,\cdots,k$，P_i是相应于λ_i的正交本征投影。$\varphi_i^{(n)}$是A_n相应于$\lambda_i^{(n)}$的本征向量，$P_i^{(n)}$是其对应的本征投影，$i=1,\cdots,n$。

$\theta(\cdot,\cdot)$表示一个向量与一个子空间（或一个向量）之间的锐角。由$\tan\theta(\varphi,X_n)$的界，以后将给出$\|(I-\pi_n)\varphi_i\|_2=\sin\theta(\varphi_i,X_n)$的估计.

5.3.2 $\tan\theta(\varphi_i,X_n)$的估计

当$\mathbb{P}_{n-1}$是次数少于或等于$n-1$的多项式的集. 假设$P_ix\neq 0$，且令

$$\varphi_i:=\frac{P_ix}{\|P_ix\|_2},$$

如果$(I-P_i)x\neq 0$，则$\hat{x}_i:=(I-P_i)x/\|(I-P_i)x\|_2$，否则，$\hat{x}_i:=0$。

如果$(I-P_i)x\neq 0$，则$\hat{x}_i:=(I-P_i)/\|(I-P_i)x\|_2$，否则，$\hat{x}_i:=0$。

引理1.33

$$\tan\theta(\varphi_i,\ X_n)=\left[\min_{\substack{p\in\mathbb{P}_{n-1}\\ p(\lambda_i)=1}}\|p(A)\hat{x}_i\|_2\right]\tan(\varphi_i,x).$$

证明　因为$X_n=\{x,\ Ax,\ \cdots,\ A^{n-1}x\}$，任意一个$u\in X_n$可以写成$u=q(A)x$，$q\in\mathbb{P}_{n-1}$。这就由$\sum_{j=1}^K P_j=I$得出$x=p_ix+\sum_{j\neq i}p_jx$，$u=q(\lambda_i)p_ix+\sum_{j\neq i}q(\lambda_j)p_jx$。如果$(I-$

$P_i)x \neq 0$ 有

$$\tan^2\theta(p_i x, u) = (\sum_{j\neq i} q^2(\lambda_j)\|p_j x\|_2^2 / q^2(\lambda_i)\|p_i x\|_2^2,$$

那么，

$$\sum_{j\neq i} q^2(\lambda_j)\|P_j x\|_2^2 = \|q(A)\hat{x}_i\|_2^2\|(I-P_i)x\|_2^2, \ \|\hat{x}_i\|_2=1.$$

如果 $x = p_i x$, 令 $\hat{x}_i=0$: $\theta(p_i x, x)=0$. 定义 $p(t) = q(t)/q(\lambda_i)$: $p\in\mathbb{P}_{n-1}$ 且 $p(\lambda_i) = 1$:

$$\tan\theta(p_i x, X_n) = \min_{u\in X_n} \tan\theta(p_i x, u)$$

$$= \min_{\substack{p\in\mathbb{P}_{n-1}\\ p(\lambda_i)=1}} \|P(A)\hat{x}_i\|_2 \frac{\|(I-P_i)x\|_2}{\|P_i x\|_2}$$

且

$$\|(I-P_i)x\|_2/\|P_i x\|^2 = \tan\theta(P_i x, x). \quad \square$$

现在，对于 $i\leqslant n_0$，定义

$$K_1 := 1, \ K_i := \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j-\lambda_{min}}{\lambda_j-\lambda_i}, \qquad i>1,$$

及

$$\gamma_i := 1+2\frac{\lambda_i-\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1}-\lambda_{min}}, \quad t_{in} := \min_{\substack{p\in\mathbb{P}_{n-1}\\ p(\lambda_i)=1}} \|p(A)\hat{x}_i\|_2.$$

对于 $|t|\geqslant 1$, $C_m(t) = \frac{1}{2}[(t+\sqrt{t^2-1})^m + (t-\sqrt{t^2-1})^m]$ 是关于 t 的 m 次第一类Chebyshev多项式。

定理1.34 (Saad)如果 $p_i x\neq 0$，那么，作 $\varphi_i = P_i x/\|p_i x\|_2$:

$$\tan\theta(\varphi_i, X_n) \leqslant \frac{K_i}{C_{n-i}(\gamma_i)} \tan\theta(\varphi_i, x), \ i\leqslant n_0.$$

证明　希望确定 t_{in} 的界。定义 $\beta_j = \|P_j \hat{x}_i\|_2$, $\beta_i = 0$, 因此 $\sum_{j\neq i}\beta_j^2 = 1$.

(a)　$i=1$ 的情形

$$t_{in} = \min_{\substack{p \in \mathbb{P}_{n-1} \\ p(\lambda_1)=1}} \left[\sum_{j \neq 1} \beta_j^2 p^2(\lambda_j) \right]^{1/2}.$$

$$\left(\sum_{j \neq 1} \beta_j^2 p^2(\lambda_j) \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{j \neq 1} p^2(\lambda_j) \right)^{1/2} \leqslant \max_{t \in [\lambda_{\min}, \lambda_2]} |p(t)|.$$

这时

$$\min_{\substack{p \in \mathbb{P}_{n-1} \\ p(\lambda_1)=1}} \max_{t \in [\lambda_{\min}, \lambda_2]} |p(t)| = \frac{1}{C_{n-1}(\gamma_1)},$$

其中$\gamma_1 = 1 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_2 - \lambda_{\min})$（参阅Cheney, 1966）.

（b） $i > 1$ 的情形

$$\sum_{j \neq i} \beta_j^2 p^2(\lambda_j) \leqslant \max_{j \neq i} |p(\lambda_j)|^2.$$

$$\min_{\substack{p \in \mathbb{P}_{n-1} \\ p(\lambda_i)=1}} \max_{j \neq i} |p(\lambda_j)| \leqslant \min_{\substack{p \in \mathbb{P}_{n-1} \\ p(\lambda_1)=\cdots=p(\lambda_{i-1})=0 \\ p(\lambda_i)=1}} \max_{j \neq i} |P(\lambda_j)|$$

这样一个 p 可以被分解为

$$p(t) = \left(\prod_{l=1}^{i-1} \frac{t - \lambda_l}{\lambda_i - \lambda_l} \right) \frac{q(t)}{q(\lambda_i)},$$

其中$q \in \mathbb{P}_{n-i}$。于是

$$\max_{j>i} |p(\lambda_j)| = \max_{j>i} \left| \left(\prod_{l=1}^{i-1} \frac{\lambda_j - \lambda_l}{\lambda_i - \lambda_l} \right) \frac{q(\lambda_j)}{q(\lambda_i)} \right|$$

$$\leqslant \left(\prod_{l=1}^{i-1} \frac{\lambda_l - \lambda_{\min}}{\lambda_l - \lambda_i} \right) \max_{j>i} \left| \frac{q(\lambda_j)}{q(\lambda_i)} \right|.$$

因此，

$$t_{in} \leqslant K_i \min_{\substack{q \in \mathbb{P}_{n-i} \\ q(\lambda_i)=1}} \max_{t \in [\lambda_{\min}, \lambda_{i+1}]} |q(t)| = \frac{K_i}{C_{n-i}(\gamma_i)}. \quad \square$$

定义$\hat{t}_{in}:=K_i/C_{n-i}(\gamma_i)$，$i\leqslant n_0$.定理1.34表明了$\theta(\varphi_i, X_n)$减小得至少与$\hat{t}_{in}$一样快。$\gamma_i>1$依赖于间隙$\lambda_i-\lambda_{i+1}$。定义$\tau_i:=\gamma_i+\sqrt{\gamma_i^2-1}>1$。对于足够大的$n$，$C_{n-i}(\gamma_i)\approx\frac{1}{2}\tau_i^{n-i}$且$\theta(\varphi_i,X_n)$的衰减速率是$1/\tau_i$；$\gamma_i=1+2(\lambda_i-\lambda_{i+1})/(\lambda_{i+1}-\lambda_{min})$越大越好。

这个定理也指出了对于任何一个本征值λ_i，$i\leqslant n_0$，在X_n中至少存在一个接近于本征向量$\varphi_i=p_ix/\|P_ix\|_2$的向量。现在证明仅存在一个．这意味着一个重本征值$\lambda_i$最多能用一个单本征值$\lambda_i^{(n)}$来逼近.设$E$是由$K$个非零的向量$\{p_ix\}_1^k$张成的不变子空间。非零的$P_ix$是相应于相异本征值的本征向量，因此是无关的，且$\dim E=K$。设$A'$是$A_{|E}$在$E$的标准正交基下对应的$K$阶矩阵。

命题1.35 Lanczos过程等价于逼近A'的本征元，其中A'的本征值是单的。

证明　设$x=\sum_{i=1}^{k}p_ix$。A是Hermite阵，那么，$A=\Sigma_{i=1}^{k}\lambda_ip_i$，进而得到$A^kx=\Sigma_{i=1}^{k}\lambda_i^kp_ix$，$k=1,\cdots,n-1$。因此，对所有的$n$，$X_n\subseteq E$。于是，对$A$或$A'$应用Lanczos法得到相同的矩阵$\mathscr{A}_n$与$T_n$，$A'P_ix=AP_ix=\lambda_iP_ix$；$\lambda_i$是$A'$的对应于本征向量$p_ix(P_ix\neq0)$的一个本征值，所以$K$阶矩阵$A'$有$K$个相异本征值，这些本征值必须是单的。□

5.3.3　"收敛"速率

因为n取一个有限数值，所以严格说来，是不能谈论这种方法的收敛性的。但是，在1.37中借助于$\beta_{in}:=\tan(\varphi_i, x)\hat{t}_{in}$，$\lambda_i-\lambda_i^{(n)}$与$\|\varphi_i-\varphi_i^{(n)}\|_2$将被$\tan(\varphi_i, X_n)$的界所确定。这就给出了Lanczos法的精度，它是n与x的函数。

令

$$K_{1n} := 1, \quad K_{in} := \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j^{(n)} - \lambda_{min}}{\lambda_j^{(n)} - \lambda_i}, \quad 1 < i \leqslant n_0.$$

（如果$\lambda_{i-1}^{(n)} > \lambda_i$，则有意义），$d_{in} := \min_{j \neq i} |\lambda_i - \lambda_j^{(n)}|$。

引理1.36 如果$P_i x \neq 0$，那么，对于 $i \leqslant n_0$，有

$$0 \leqslant \lambda_i - \lambda_i^{(n)} \leqslant (\lambda_i - \lambda_{min}) \left(\frac{K_{in}}{K_i}\right)^2 \beta_{in}^2,$$

$$\|(I - \pi_n)\varphi_i\|_2 \leqslant \|(I - P_i^{(n)})\varphi_i\|_2 \leqslant \sqrt{1 + \|A\|_2^2 / d_{in}^2}\, \beta_{in}.$$

证明 证明基于本征值的最小—最大原理（参阅Saad, 1980a）。□

命题1.37 如果$P_i x \neq 0$，那么，$0 \leqslant \lambda_i - \lambda_i^{(n)} \leqslant k\beta_{in}^2$，且

$$\|(I - p_i^{(n)})\varphi_i\|_2 \leqslant k\beta_{in},$$

其中 k 是一般的常数。

证明 如果β_{in}足够小，那么，引理 1.36 中的常数可以与 n 无关地被界定。对于这些本征值，对 i 用归纳法可以得到：对于 $i = 1$，$K_{1n} = K_1 = 1$，于是 $\lambda_1^{(n)} \longrightarrow \lambda_1$。现在假设对于 $j = 1, \cdots, i-1$，$\lambda_j^{(n)} \longrightarrow \lambda_j$ 蕴涵 $\lambda_{i-1}^{(n)} > \lambda_i$，$K_{in} \longrightarrow K_i$ 及 $\lambda_i^{(n)} \longrightarrow \lambda_i$。至于本征向量，如果对于 $j = 1, \cdots, i+1$，$\lambda_j^{(n)} \longrightarrow \lambda_j$。那么，$d_{in} \longrightarrow d_i := \min_{j \neq i} |\lambda_i - \lambda_j|$。□

在λ_i接近于λ_{i+1}的情形下，上述的界可以是弱的。通过利用谱结构的优点，即更合适地选择用于定理1.34证明中的多项式，界可以加强（参阅Saad, 1980a）。

当 n 比 N 小得多时，少数几个最大的本征值就能以较高的精度来逼近。另一方面，如果按递增排列本征值，那么，可以看到，最小本征值也能以较高的精度来逼近。因此 Lanczos 法

非常适合于计算谱的几个极端的本征值。为了如下目的设计了这种方法的几种变形。

（1）避免全部重正交化(Kahan和Parlett, 1976; Parlett和Scott, 1979)；

（2）通过进行$n>N$迭代，计算内部的本征值（Cullum和Willoughby, 1978a, 1979a, b; Parlett和Reid, 1981）。

本征向量的计算通常需要我们存贮全部向量$\{v_i\}_1^n$。在Saad (1979a) 中给出一种变形仅用存贮五个向量来代替n个。

处理一组主本征值或一个重本征值的另一条途径是利用块Lanczos法。

5.4 块Lanczos法

给定r个标准正交向量$\{x_k\}_1^r$的集合，设U是$U=\{x_1,\cdots,x_r\}$所张成的且$x_n=\{U, AU,\cdots,A^{n-1}U\}$。按下面的途径，块Lanczos算法获得在$X_n$上的一个投影. 设$Q_0$是$N\times r$矩阵$Q_0:=(x_1, \cdots, x_r)$. 这种算法引入$N\times r$阶标准正交矩阵$Q_j$($j=1,\cdots, n-1$)的序列，使得$Q_0$, Q_1, $\cdots$, Q_{n-1}的列是X_n的一组标准正交基，其中$\mathscr{A}_n$是用一个$r\times r$块对角阵$\mathring{T}_n$来表示的：

（1） $\mathring{A}_1:=Q_0^H A Q_0$； $\mathring{B}_1:=0$，

（2） 对于$j=1,2,\cdots,n-1$，作$D_j:=AQ_{j-1}-Q_{j-1}\mathring{A}_j-Q_{j-2}\mathring{B}_j^H$；

实行D_j的标准正交化，$D_j:=Q_jR_j$，其中R_j是一个$r\times r$正则三角矩阵，且令$\mathring{B}_{j+1}:=R_j$， $\mathring{A}_{j+1}:=Q_j^H A Q_j$。

$\mathring{T}_n$是带宽为$r+1$的$nr\times nr$带形矩阵。

如果$\dim X_n=nr$，这种算法是可行的（对于$j=1$，$\cdots$，

$n-1$，R_i是正则的）。如果初始向量$\{x_k\}_1^r$使得对于所有的$p_k \in \mathbb{P}_{n-1}$，$k=1, \cdots, r$，有$P_k(A)x_k \neq 0$，那么这一条件就能满足．可以证明一个类似于命题1.35的结果：块三角矩阵有重数不大于r的本征值，进而，不失一般性，可以假设A的本征值的重数不大于r．

设$\{\mu_i\}_1^N$是A的重本征值．相应的本征向量（或本征投影）是$\{\varphi_i\}_1^N$（或$\{P_i\}_1^N$）．注意与5.3节的记号的区别．假设

$$\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{i-1} > \mu_i \geqslant \mu_{i+1} \geqslant \cdots \geqslant \mu_{i+r-1} > \mu_{i+r} \geqslant \cdots \geqslant \mu_N.$$

设I是指标集$\{i, i+1, \cdots, i+r-1\}$，$P := \sum_{i \in I} P_i$．

用$\tan\theta(\varphi_l, X_n)$，$l \in I$的估计还可以再来研究收敛速率．对于$l \in I$，定义

$$\hat{\gamma}_l := 1 + 2\frac{\mu_l - \mu_{i+r}}{\mu_{i+r} - \mu_N}.$$

由于$\mu_{i-1} > \mu_i$，因而，在定理1.34中所引入的K_i也就确定了．

引理1.38 如果r个向量$\{Px_k\}_1^r$是无关的，那么，给定φ_l，$l \in I$，存在唯一的$u_l \in U$，使得$Pu_l = \varphi_l$．

证明 $u \in U$可以写成$u = \sum_{k=1}^r t_k x_k$，$Pu = \sum_{k=1}^r t_k Px_k$．$u_l$的存在性与唯一性由$\{px_k\}_1^r$的无关性得出．令$v_l := (I-P)u_l$：$u_l = \varphi_l + v_l$及$\|\varphi_l - u_l\|_2 = \tan\theta(\varphi_l, u_l)$． □

定理1.39 (Saad) 假设$\{Px_k\}_1^r$是无关的，且对于$l \in I = \{i, i+1, \cdots, i+r-1\}$，$\mu_{i-1} > \mu_l > \mu_{i+r}$，那么，

$$\tan\theta(\varphi_l, X_n) \leqslant \frac{K_i}{C_{n-i}(\hat{\gamma}_l)} \tan\theta(\varphi_l, u_l), \quad 对\ l \in I.$$

证明 给定φ_l，我们写$u_l = \varphi_l + \sum_{j \notin I} P_j u_l$．考虑$X_n$中具有形式$u = q(A)u_l \ (q \in \mathbb{P}_{n-1})$的$u$．于是$u = q(\mu_l)\varphi_l + \sum_{j \notin I} P_j u_l$．

(*a*) $i=1$的情形

$$\frac{\|(I-P_1)u\|_2^2}{\|P_1u\|_2^2} = \sum_{j\geq 1+r} \frac{q^2(\mu_j)\|P_j\dot{u}_1\|_2^2}{q^2(\mu_1)}.$$

当取遍$q\in \mathbb{P}_{n-1}$时，右端的最小值在$p\in \mathbb{P}_{n-1}$处达到。令

$$\bar{u}=p(A)u_1\in X_n，\ \alpha_1:=\frac{2}{\mu_{1+r}-\mu_N},\beta_1:=\frac{\mu_{1+r}+\mu_N}{\mu_{1+r}-\mu_N},$$

那么，对于 $j\geq 1+r$，$\alpha_1\mu_j-\beta_1=1-2(\mu_{1+r}-\mu_j)/(\mu_{1+r}-\mu_N)=\theta_j$，$|\theta_j|\leq 1$，因为在$[-1,1]$上$|C_{n-1}(t)|\leq 1$，所以有$|C_{n-1}(\theta_j)|\leq 1$。

$$\tan^2\theta(\varphi_1,X_n)\leq\frac{\|(I-P_1)\bar{u}\|_2^2}{\|p_1\bar{u}\|_2^2}=\sum_{j\geq 1+r}\frac{p^2(\mu_j)\|p_ju_1\|_2^2}{p^2(\mu_1)}$$

$$\leq\frac{C_{n-1}^2(\alpha_1\mu_j-\beta_1)\|P_ju_1\|_2^2}{C_{n-1}^2(\alpha_1\mu_1-\beta_1)}\leq\sum_{j\geq 1+r}\frac{\|P_ju_1\|_2^2}{C_{n-1}^2(\hat{\gamma}_1)},$$

且

$$\sum_{j\geq 1+r}\|P_ju_1\|_2^2=\|(I-P)u_1\|_2^2=\|\varphi_1-u_1\|_2^2.$$

(b) $i>1$的情形。

现在令

$$\alpha_i:=\frac{2}{\mu_{i+r}-\mu_N},\ \beta_i:=\frac{\mu_{i+r}+\mu_N}{\mu_{i+r}-\mu_N},$$

那么，$\alpha_i\mu_i-\beta_i=\hat{\gamma}_i$。定义

$$p_i(t):=\left[\prod_{j=1}^{i-1}(t-\mu_j)\right]C_{n-i}(\alpha_it-\beta_i),$$

且$\bar{u}=p_i(A)u_i\in X_n$，$p_i(\mu_j)=0$，其中$j=1,2,\cdots,i-1$。

$$\tan^2\theta(\varphi_l, X_n) \leqslant \frac{\|(I-p_l)\bar{u}\|_2^2}{\|p_l \bar{u}\|_2^2} \leqslant \sum_{j>i+r} \frac{p_i^2(\mu_j)\|P_j u_l\|_2^2}{p_i^2(\mu_l)}$$

$$\leqslant \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{\mu_j - \mu_N}{\mu_j - \mu_i}\right)^2 \left(\sum_{j>i+r} \|P_j u_l\|_2^2\right) \Big/ C_{n-i}^2(\hat{\gamma}_l)$$

$$\leqslant \frac{K_i^2}{C_{n-i}^2(\hat{\gamma}_l)} \|\varphi_l - u_l\|_2^2. \quad \square$$

如果 $r=1$，上述的界就简化为定理1.34的界。$\theta(\varphi_l, X_n)$ 至少减小得像$1/C_{n-i}(\hat{\gamma}_l)$那样快。这个量依赖于间隙 $\mu_l-\mu_{i+r}$。在许多方面，由Lanczos法到分块Lanczos法的推广相似于由幂法到同时迭代法的推广。

在Saad（1980a）中，条件$\{Px_k\}_1^r$无关是以$\{\pi\varphi_l\}_{i,l}$无关的等价形式给出，其中Π是到$\dot{U}$上的正交投影。

以一个类似于命题1.37的方法，由上述$\tan\theta(\varphi_l, X_n)$的估计可以得到$|\mu_l-\mu_l^{(n)}|$与$\|\varphi_l-\varphi_l^{(n)}\|_2$的收敛速率（参阅Saad，1980a）。不同的逼近可在Cullum和Donath（1974）与underwood（1975）中找到。

5.5 关于非Hermite矩阵的Arnoldi方法

我们现在讨论把Lanczos法推广到非Hermite矩阵的一种方法。Lanczos法的最简单的推广借助于Arnoldi算法（参阅Wilkinson，1965）它是由Saad（1980b）提出来的。

5.5.1 算法

再考虑$X_n=\{x, Ax, \cdots, A^{n-1}x\}$，用Arnoldi算法迭代地：计算$X_n$的一组标准正交基$\{v_i\}_1^n$，在其中，$\mathscr{A}_n$是用一上Hessenberg矩阵$H_n=(h_{ij})$，（$i>j+1$时$h_{ij}=0$）表示的：

（1）$v_1:=x/\|x\|_2$，$h_{11}:=v_1^H A v_1$，$A_{21}:=\|x\|_2$，

（2）对于 $j=1, \cdots, n-1$，作

$$x_{j+1} := Av_j - \sum_{i=1}^{j} h_{ij} v_i, \quad h_{j+1,j} := \|x_{j+1}\|_2,$$

$$v_{j+1} := x_{j+1}/\|x_{j+1}\|_2, \quad h_{i,j+1} := v_i^H A v_{j+1}, \quad i \leqslant j+1.$$

如果对于 j =1, …, $n-1$, $x_{j+1} \neq 0$，即对于所有的$p \in \mathbb{P}_{n-1}$, $p(A)x \neq 0$，那么这种算法是可行的．如果满足这个条件，H_n就是不可约的Hessenberg 矩阵：h_{j+1}, j $\neq$ 0，j =1, …, $n-1$。因此，如果A是可对角化的，那么$\mathscr{A}_n$与H_n也是，且H_n有n个单本征值（习题1.48）．

5.5.2　关于$\|(I-\pi_n)\varphi_i\|_2$的估计

设$\{\lambda_i\}_1^K$是A的K个相异本征值，$\{P_i\}_1^K$是其相应的谱投影。如果A是可对角化的，那么，$A=\sum_{i=1}^{K}\lambda_i p_i$ 且命题 1.35 适用于Arnoldi 过程。不失一般性，在本节其余部分中可以假设A的N个本征值是单的。

A(或H_n)的本征值按递减排列，我们假设

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|>\cdots>|\lambda_n|\ (\text{或}\ |\lambda_1^{(n)}|>|\lambda_2^{(n)}|>\cdots>|\lambda_n^{(n)}|).$$

$\varphi_i^{(n)}$是$A_n=\pi_n A$的相应于$\lambda_i^{(n)}$的本征向量。$P_i^{(n)}$是谱投影．我们分解$x=\sum_1^N P_i x$，如果$p_i x \neq 0$，定义

$$C_i := \left(\sum_{j \neq i} \|P_j x\|_2\right) \Big/ \|P_i x\|_2 \geqslant \frac{\|(I-p_i)x\|^2}{\|p_i x\|_2}.$$

对于次数小于或等于$n-1$，满足$p(\lambda_i)=1$的多项式p，在集合$\{\lambda_j\}_1^N$上的零函数的逼近次数是：

$$\varepsilon_i^{(n)} =: \min_{\substack{p \in \mathbb{P}_{n-1} \\ p(\lambda_i)=1}} \max_{j \neq i} |p(\lambda_j)|$$

(参阅lorentz(1966).

定理1.40 如果A是可对角化的且$P_i x \neq 0$，那么，对于$\varphi_i = P_i x / \|P_i x\|_2$，有$\|(I-\pi_n)\varphi_i\| \leqslant C_i \varepsilon_i^{(n)}$.

证明 任意一个$u \in X_n$可以写成$u = q(A)x$，$q \in \mathbb{P}_{n-1}$.

$$x = P_i x + \sum_{j \neq i} P_j x, \quad u = q(\lambda_i) P_i x + \sum_{j \neq i} q(\lambda_j) P_j x.$$

对于使得$p(\lambda_i) = 1$的$p \in \mathbb{P}_{n-1}$，有

$$\frac{1}{\|P_i x\|_2} u - \varphi_i = \sum_{j \neq i} p(\lambda_j) \frac{P_j x}{\|P_i x\|_2}.$$

$$\min_{u \in X_n} \|u - \varphi_i\|_2 \leqslant \left\| \sum_{j \neq i} \frac{P_j x}{\|P_i x\|_2} p(\lambda_j) \right\|_2$$

$$\leqslant \max_{j \neq i} |p(\lambda_j)| \underbrace{\left(\sum_{j \neq i} \|P_j x\|_2 \right) \Big/ \|P_i x\|_2}_{C_i}. \quad \square$$

C_i表示x相对于φ_i有多好；参见图1.8. $\varepsilon_i^{(n)}$随n增大而减小，然而，衰减速率的分析却是关于复变量的逼近理论的一个难题。除某些特殊形状的谱，如纯实谱或拟实谱以外，建立既准确又简单的$\varepsilon_i^{(n)}$的界是不容易的。例如，利用定理1.34的记号，有下面的命题.

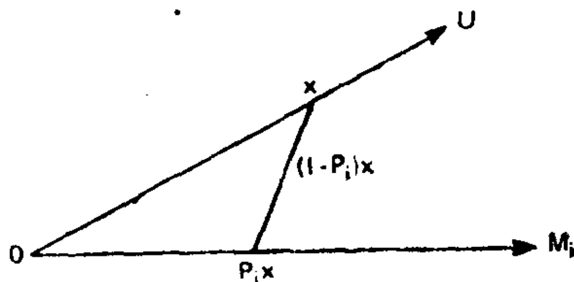


图 1.8

命题1.41 假设A是可对角化的，且有实本征值：$\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_N$，那么，$\varepsilon_i^{(n)}\leqslant K_i/C_{n-i}(\gamma_i)$。

证明 证明类似于定理1.34的证明。如果这谱位于复平面的一条直线上，那么类似的结果成立。 □

习题

1.88 如果主本征值λ_1使得$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geqslant|\lambda_i|$，$i\geqslant 3$，证明$\varepsilon_1^{(n)}\leqslant|\lambda_2/\lambda_1|^{n-1}$（提示：考虑圆盘$disk(0,\ |\lambda_2|)$与多项式$p(z)=(z/\lambda_1)^{n-1}$）。

更一般地，可以利用椭圆或圆域，且可以得到比习题1.88更准确的界。如果谱是拟实的，那么，其结果就变得接近于命题1.41中的界（参阅 Saad，1980b）。

5.5.3 收敛性

我们想说明对于足够大的n，能够用$\varepsilon_i^{(n)}$来定$|\lambda_i-\lambda_i^{(n)}|$与$\|(I-p_i^{(n)})\varphi\|_2$的界。由于$A$不是Hermite阵，这就使得我们不能像在引理1.36中那样利用本征值的最小—最大属性。设λ是A的一个单本征值；引用引理1.31中的记号，我们仍考虑$\Sigma_n=(I-Q)(A_n-\zeta_n I)^{-1}(I-Q)$。$c$是一般常数。

引理1.42 给定A的本征元λ，φ，λ是单的，假设Σ_n是一致有界的，那么，对于足够大的n，存在A_n的本征元λ_n，φ_n，使得$|\lambda-\lambda_n|<c\alpha_n$，$\|\varphi-\varphi_n\|_2<c\alpha_n$。

证明 当α_n足够小时，引理1.31的证明可用。 □

对于逼近问题，数$\|\Sigma_n\|_2$起着条件数的作用。只要逼近问题不是过分病态的，误差$|\lambda_i-\lambda_i^{(n)}|$与$\|\varphi_i-\varphi_i^{(n)}\|_2$是$\varepsilon_i^{(n)}$阶的.

习题

1.89 当A是大型的非对称矩阵时，基于 Arnoldi 算法，提出逼近$Ax=b$解的一种方法。在$\|(\pi_n A_{\restriction x_n})^{-1}\|_2$一致有界的假设下，研究它的精确度。

1.90 设x_0是$x^*=A^{-1}b$的一个初始估计。设$r_0:=b-Ax_0$及$x^*:=x_0+z^*$。设$K_n:=\{r_0, Ar_0, \cdots, A^{n-1}r_0\}$. 用$\pi_n Az^{(n)}=r_0$的解$z^{(n)}\in K^n$逼近$z^*$，其中$\pi_n$是在$K_n$上的正交投影。证明$\operatorname{dist}(z^*, K_n)=\min\limits_{p\in\mathbb{P}_n, P(0)=1}\|p(A)z^*\|_2$。

1.91 证明 $\pi_n(Ax^{(n)}-b)=0$的解$x^{(n)}\in K_n$满足$x^{(n)}=x_0+z^{(n)}$，导出$x^*-x^{(n)}=z^*-z^{(n)}$。

1.92 假设A是可对角化的，证明

$$\operatorname{dist}(z^*, K_n)\leqslant k\underbrace{\min_{\substack{p\in\mathbb{P}_n\\ p(0)=1}}\max_{j=1,\ldots,N}|P(\lambda_j)|}_{\varepsilon^{(n)}}.$$

1.93 如果A的本征值是实的且是正的，设λ_{min}(或λ_{max})是最小的（或最大的）．证明

$$\varepsilon^{(n)}\leqslant\frac{1}{C_n(\gamma)},\qquad \text{其中 } \gamma=\frac{\lambda_{max}+\lambda_{min}}{\lambda_{max}-\lambda_{min}}.$$

5.5.4 一个实用的算法

Saad（1979b，1980b）提出用不完全的Arnoldi 算法处理大型的非 Hermite 矩阵。当人们用重正交化时，这种算法是稳定的，但是它需要大量的存储。在第二篇文章中 Saad 已设计出几个不完全正交化的变形，这些变形部分地克服了这个缺点。它们是以观察当n增大时H_n的右上角趋于零为基础的。

在相近或重本征值的情形下，也可以考虑块 Arnoldi 算法

$(r>1)$.

5.6 "斜"投影法

在前面几段中，用正交投影法研究了(1.18)的逼近. 当A不是Hermite阵时，也可以考虑非正交的(或斜的)投影. 在如下的抽象框架中可将这个问题叙述为：给定两个子空间X_n与Y_n的序列，$\dim X_n=\dim Y_n$. 用下面的问题逼近(1.18)：

求 $\lambda_n\in\mathbb{C}$，$0\neq\varphi_n$，　　(1.21)

使得$A\varphi_n-\lambda_n\varphi_n$与$Y_n$正交.

(1.21)是(1.18)的Petrov逼近(参阅第4章).

习题

1.94 设π_n'是在Y_n上的正交投影. 以(1.19)的形式写出(1.21)，其中，用$\varpi_n=(\pi_n'{}_{|X_n})^{-1}\pi_n'$代替在$X_n$上的正交投影，假设：

$$\sup_n\|(\pi_n'{}_{|X_n})^{-1}\|_2<\infty.$$

1.95 设P_n(或Q_n)是一个$N\times\nu$矩阵，它的列构成X_n(或Y_n)的一个标准正交基. 在这个基下写出(1.21).

例1.12 最好的例子是由不完全的双正交化法提供的(Lanczos，1952). 在这种方法中，给定x与y，使得$x^Hy\neq 0$. 子空间是$X_n=\{x, Ax,\cdots,A^{n-1}x\}$与$Y_n=\{y, A^Hy, \cdots, (A^H)^{n-1}y\}$. 这种方法迭代地计算$X_n$与$Y_n$的双正交基. 其中，相应(1.21)中的$\pi_n'A\pi_n$的矩阵具有三对角形式. 作为三对角化一个非Hermite矩阵且计算它的本征值的一种方法，由于它的不稳定性，这种算法已经被忽视了很长时间. 尽管如此，这个事实已经重新被考虑了(Parlett和Taylor，1981)，当结

合预处理技术来处理大型非对称系统时，这种方法是有用的。在 Saad (1982a) 中介绍了这类中的其它各种算法。

5.7 文献注释

从1958年起，物理学家与工程技术人员已经把这种不完全的Lanczos法用于Hermite矩阵(例如,参阅Sebe和Nachamkin, 1969; Godunov和 Propkopov, 1970) . 在Paige (1971) 中首次做了数学上的分析。Lanczos 法与分块Lanczos 法的界是由 Saad (1980a) 提出的，他推广了Kaniel (1966) 的界。在 Parlett (1980a) 中可以找到关于 Lanczos 法的详尽的研究。往往在实际中，要解广义本征值问题$Ax=\lambda Bx$，其中 A 与 B 是Hermite阵，B 可能是正定的。为了应用 Lanczos 法，需要用 Cholesky 分解 $B=R^HR$，且分析研究$C=(R^H)^{-1}AR^{-1}$。要避免这点，可以使用迭代方法，例如，坐标松弛法 (Schwarz, 1974) ，逐次超松弛法 (Ruhe, 1974) ，关于$\rho(x)$的共轭梯度优化法 (Ruhe, 1977) 。关于一般本征值问题的Lanczos法的使用，读者可参阅Parlett (1980a, 1981) 与Scott(1981a).

关于非对称问题，在Saad (1980b)中把不完全的Arnoldi法应用于计算本征元，及在 Saad (1981) 中，应用于大型线性方程组的求解。

证明的附注：我们在 $P.23$已经看到了在假定 (1.9) 下，子空间 A^kU 收敛，当且仅当初始向量使得$\{Px_i\}_1^r$是无关的。让我们进一步假设 $|\mu_1|>|\mu_2|>\cdots>|\mu_r|>|\mu_{r+1}|\geqslant\cdots\geqslant|\mu_N|$，且对于 $s=1,\cdots,r$，设U_S (或M_S)是由$\{x_i\}_1^s$ (或$\{\varphi_i\}_1^s$) 张成的子空间。显然，$A^kU_S\to M_S$, $s=1,\cdots,r$，且关于 r 个向量的同时迭代法是一系列具有初始子空间套的 r 个子空间迭代法。在$M=M_r$中，设$\{q_i\}_1^r$是由 $\{\varphi_i\}_1^r$规范化的向量的集合。Q_k的列记为$q_1^k,\cdots,q_r^k$。由$\{q_1^k\}\to\{q_1\}$ ($k\to\infty$

时)，推出存在一个数量$z_1^{(k)}$，使得$|z_1^{(k)}|=1$且$z_1^{(k)}q_1^k \to q_1$用归纳法得到，存在一个$r \times r$酉对角矩阵Z_k使得$Q_k Z_k \to Q$，其中，$Q:=(q_1, \cdots, q_r)$。

第二章　泛函分析基础：基本概念

引　　言

本章概述了泛函分析中的经典结果，这些结果在有关本课程的任何一本教科书中都能找到。当没有提供结果的证明时，读者可参阅列出的以下参考书：Kato(1976)，Yosida(1965)，Taylor（1958），及Dunford和Schwartz（1958，1963）。

在本章的A部分，我们介绍复Banach空间中的有界线性算子及闭线性算子的某些性质。在B部分，我们引入关于闭线性算子T的谱理论，着重介绍在一个具有有限代数重数的孤立本征值的邻域内，闭线性算子T的性态。

A．有界算子及闭算子

1．Banach空间和Hilbert空间

下面的理论是建立任意的实或复的Banach空间X（即完备的赋范向量空间）。当范数是由内积引出(即，$\|x\|:=(x,x)^{1/2}$)时，就得到一个Hilbert空间。通常，字母X，Y表示Banach空间；字母H，V表示Hilbert空间。

1.1 Banach空间的例子

我们回忆一下几个将要用到的泛函空间的定义。

1.1.1 序列空间

对于$1\leqslant p<\infty$，l^p是实或复序列$x=\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$的集合，这些序列使得$\|x\|_p:=(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p)^{1/p}$是有限的．

以$\|\cdot\|_p$为范数，l^p是Banach空间。若$1\leqslant p<q\leqslant\infty$，则由于$x\in l^p$时有$\|x\|_q\leqslant\|x\|_p$，得知$l^p$是$l^q$的真子空时。$l^\infty$是以$\|x\|_\infty:=\sup_i|x_i|$为范数的全部有界序列的空间。$c_0$是所有收敛于0的序列的$l^\infty$的子空间。$c$是所有收敛序列的子空间，$c_0\subset c\subset l^\infty$。

1.1.2 函数空间

设Ω是$\mathbb{R}^n$中的有界开集。

$C(\Omega)$是定义在Ω中的实的或复的连续函数$t\mapsto x(t)$的空间，其范数是

$$\|x\|_\infty:=\sup_{t\in\Omega}|x(t)|.$$

$C(0,1)$是$[0,1]$上的连续函数的空间。$C^1(0,1)$是$[0,1]$上具有连续导数x'的函数x的空间，其范数为

$$\|x\|:=\|x\|_\infty+\|x'\|_\infty.$$

对于$1\leqslant p<\infty$，Lebesgue空间$L^p(\Omega)$是实或复函数类的空间，其中函数x满足，对$t\in\Omega$，$|x(t)|^p$Lebesgue可积，且以

$$\|x\|_p:=\left(\int_\Omega|x(t)|^p dt\right)^{1/p},\ dt=dt_1\cdots dt_n$$

为范数。$L^\infty(\Omega)$是本性有界的复或实函数类且以

$$\|x\|_\infty:=\operatorname{ess\,sup}_{t\in\Omega}|x(t)|=\inf(\alpha;\ |x(t)|\leqslant\alpha,\text{在}\Omega\text{中几}$$

乎处处成立）.

为范数的空间。显然$C(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$。

对于$1\leqslant p,k<\infty$，Sobolev空间$W^{k,p}(\Omega)$是实或复函数x类的空间，使得x及其广义偏导数$D^s x$（其阶数$|s|:=\sum_{j=1}^n s_j\leqslant k$）属于$L^p(\Omega)$，其范数为

$$\|x\|_{k,p}:=\left(\sum_{|S|\leq k}\int_{\Omega}|D^{s}x(t)|^{p}dt\right)^{1/p},$$

其中

$$D^{s}:=\frac{\partial^{s}}{\partial t_1^{S_1}\partial t_2^{S_2}\cdots\partial t_n^{S_n}}.$$

$W^{0,p}(\Omega)=L^{p}(\Omega)$。关于 Sobolev 包含定理，例如可在 Ciarlet（1978）中找到。

1.2 Hilbert 空间的例子

在上述定义中设 $p=2$。对应的范数是由下面的内积引出的：

$$l^2:\quad (x,y)_{l^2}:=\Sigma_{i=1}^{\infty}x_i\overline{y_i},\quad x,\ y\in l^2;$$

$$L^2(\Omega):\quad (x,y)_{L^2}:=\int_{\Omega}x(t)\overline{y}(t)dt,\ x,\ y\in L^2;$$

$$H^k(\Omega)=W^{k,2}(\Omega):\quad (x,y)_{H^k}:$$

$$=\sum_{|s|\leq k}\int_{\Omega}D^{s}x(t)\overline{D^{s}y(t)}dt,\quad x,y\in H^k.$$

2. 伴随空间

设X是$\mathbb{C}$上的 Banach 空间。

2.1 定义

定义在X上的复值函数$f[x]$，称为半线性形式(或泛函)，当且仅当

$$f[\alpha x+\beta y]=\overline{\alpha}f[x]+\overline{\beta}f[y],\qquad x,y\in X,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

f 也称为是反线性的或共轭线性的。

X的伴随空间X^*是X上的所有有界半线性形式的空间。为了同等对待 x 和x^*，把$f[x]$表示为$\langle f,x\rangle$；这是 $f\in X^*$与 x

$\in X$的数积，并且由定义可知它对于f是线性的，而对于x则是半线性的．X与X^*的范数，用同样的记号$\|\cdot\|$表示之．以

$$\|f\|:=\sup_{0\neq x\in X}\frac{|\langle f,x\rangle|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|=1}|\langle f,x\rangle|$$

为范数，X^*就是Banach空间．由$\|f\|$的定义即可得出Schwarz不等式

$$|\langle f,x\rangle|\leqslant\|f\|\,\|x\|,\quad f\in X^*,\quad x\in X.$$

X^*的伴随空间X^{**}仍是Banach空间．X是自反的，当且仅当在X与X^{**}之间通过一个保持范数且一对一的映射，使X能与X^{**}等同。通常，X与X^{**}的一个子空间等同使得对于$x\in X$，$f\in X^*$，$\langle x,f\rangle=\overline{\langle f,x\rangle}$（下面的定理2.1需要这个结论）．

例2.1 $X=\mathbb{C}^n$是向量$x=(\xi_i)_{i=1,\ldots,n}$的空间，X^*是向量$f=(\alpha_i)_{i=1,\ldots,n}$的空间．数积

$$\langle f,x\rangle:=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\xi}_i=x^Hf.$$

这是内积(f,x)（参阅第2.4节），并且$X=X^*$是Hilbert空间．

例2.2 对于$1\leqslant p<\infty$且$p^{-1}+q^{-1}=1$，$(l^p)^*$与l^q等同，其数积$\langle f,x\rangle:=\Sigma_{i=1}f_i\overline{x}_i$，其中$x=\{x_i\}_{\mathbb{N}}\in l^p$，$f=\{f_i\}_{\mathbb{N}}\in l^q$，$(C_0)^*=C^*=l^1$．

例2.3 对于$1\leqslant p<\infty$且$p^{-1}+q^{-1}=1$，$(L^p(\Omega))^*$以数积$\langle f,x\rangle:=\int_\Omega f(t)\overline{x(t)}dt$与$L^q(\Omega)$等同．

例2.4 $(C(a,b))^*=BV(a,b)$是适当正规化的所有有界变差函数空间（参阅Yosida，1965，P. 119），$\langle f,x\rangle=\int_a^b\overline{x}(t)df(t)$为其数积．

2.2 性质

在Banach空间理论中，基本重要的是 Hahn-Banach 扩张定理.

定理2.1 在X中定义的任何有界半线性形式可以扩张到定义在X上的有界半线性形式，且其范数不增.

该定理的证明见Yosida（1965，P.106）.

我们将需要下面的关于"拟正交"元的Riesz引理.

引理2.2 设M是X中的闭子空间，$M\neq X$。对于任意ε，$0<\varepsilon<1$，存在$x_\varepsilon\in X$使得$\|x_\varepsilon\|=1$，且

$$\operatorname{dist}(x_\varepsilon,\ M):=\inf_{m\in M}\|x_\varepsilon-m\|\geqslant 1-\varepsilon.$$

若$\dim M<\infty$，则能达到$\operatorname{dist}(x_\varepsilon,M)=1$.

证明　设$y\in X-M$。因为M是闭的，所以

$$\operatorname{dist}(y,M)=\inf_{m\in M}\|y-m\|>d>0$$

从而存在$m_\varepsilon\in M$使得$\|y-m_\varepsilon\|\leqslant d/(1-\varepsilon)$。向量$x_\varepsilon:=(y-m_\varepsilon)/\|y-m_\varepsilon\|$满足$\|x_\varepsilon\|=1$，且对于$m\in M$，

$$\|x_\varepsilon-m\|=\frac{1}{\|y-m_\varepsilon\|}(y-m_\varepsilon-\|y-m_\varepsilon\|m)$$

$$\geqslant\frac{d}{\|y-m_\varepsilon\|}\geqslant 1-\varepsilon.$$

若$\dim M<\infty$，并设Y由M与y所张成，则我们可应用上面结果于Y的子空间M。对$\varepsilon=1/n$，存在$x_n\in Y$使得$\|x_n\|=1$且$\operatorname{dist}(x_n,M)\geqslant 1-1/n$。由于$\dim Y<\infty$，故存在$\{x_n\}$的子序列收敛于$X$，使得$\|x\|=1$且$\operatorname{dist}(x,M)=1$. □

例2.5　设X是$[0,1]$上的所有连续函数x使得$x(0)=0$且其范数取为最大范数的空间。并设M是所有使得$\int_0^1 x(t)dt$

$=0$ 的 $x\in X$ 的子集。我们考虑 X 中的单位球面上不存在与 M 距离为单位长的点的情形。设 $x_1\in X$，$\|x_1\|=1$，且对于 $x\in M$，$\|x_1-x\|\geqslant 1$。对于 $y\in X-M$，令

$$\alpha:=\int_0^1 x_1(t)dt\Big/\int_0^1 y(t)dt.$$

则对于每个 $y\in X-M$，有 $x_1-\alpha y\in M$ 且

$$1\leqslant\|x_1-(x_1-\alpha y)\|=|\alpha|\,\|y\|,$$

$$\left|\int_0^1 y(t)dt\right|\leqslant\left|\int_0^1 x_1(t)dt\right|\|y\|.$$

对于 $\|y\|=1$，$\left|\int_0^1 y(t)dt\right|$ 可以任意地接近 1。因此，

$$1\leqslant\left|\int_0^1 x_1(t)dt\right|.$$

然而 $x_1(0)=0$，$\|x_1\|=1$，但由 x_1 的连续性得到矛盾

$$\left|\int_0^1 x_1(t)dt\right|<1.$$

推论2.3 设 M 是 X 的子空间，$\dim M=m$。则 M 有一个基 $\{x_i\}_1^m$，使得 $\|x_i\|=1$ 且对于 $i=1,\cdots,m$ 及任意选取的数 a_j，有 $\|x_i-\Sigma_{j\neq i}a_jx_j\|\geqslant 1$。

证明 直接应用引理 2.2 即可得证。 □

定理2.4 设 M 是 X 的闭子空间，且设 $x_0\in X$ 而不属于 M，则存在 $f\in X^*$ 使得

$$\langle f,x_0\rangle=1,\ \langle f,x\rangle=0,\quad x\in M;$$
$$\|f\|=1/\mathrm{dist}(x_0,M).$$

证明 设 M' 由 M 与 x_0 所张成，则每个 $x\in M$ 具有形式 $x=\xi x_0+y$，$y\in M$。ξ 由 x 确定。定义在 M' 上的函数 $f[x]'=$

ξ是半线性且是有界的：$|\xi|\leqslant\|x\|/d$，其中 $d:=\mathrm{dist}(x_0,M)$．当$\xi=0$时，显然有界，而当$\xi\neq0$时，由下式得出它的界：

$$\|\xi^{-1}x\|=\|x_0+\xi^{-1}y\|\geqslant d\ .$$

因此$\|f\|\leqslant d^{-1}$．对于任何ε，$0<\varepsilon<1$，对M'应用引理2.2，则存在$x\in M'$使得$\|x\|=1$且$\mathrm{dist}(x,M)\geqslant1-\varepsilon$．对这个$x$，

$$1-\varepsilon\leqslant\mathrm{dist}(x,M)=\mathrm{dist}(\xi x_0+y,M)$$
$$=|\xi|\mathrm{dist}(x_0,M)=|\xi|d;$$

即

$$|f[x]|\geqslant(1-\varepsilon)\|x\|/d.$$

于是$\|f\|=d^{-1}$．这个f可以扩张到X且保持范数不变．显然$f[x_0]=1$且对于$y\in M$，$f[y]=0$． □

2.3 零化子

设M是X的子空间．零化子$M^{\perp}:=\{f\in X^*;\ \langle f,x\rangle=0$，对任何$x\in M\}$是$X^*$的闭子空间．

设M和N是X上的两个闭子空间．它们是互补子空间，当且仅当$X=M\oplus N$，于是X^*有分解$X^*=N^{\perp}\oplus M^{\perp}$.

习题

2.1 设$M\subset X$，证明$M^{\perp}$是闭的．

2.2 设M和N是X的闭的互补子空间，证明$X^*=N^{\perp}\oplus M^{\perp}$.

2.3 X的每个有限维子空间M有补子空间N．（提示：$\dim M=1$；$0\neq x\in M$．设$f\in X^*$：$\langle f,x\rangle=1$且$N=\{y\in X;\ \langle f,y\rangle=0\}$）．

引理2.5 设M是X的有限维子空间，使得$X=M\oplus N$，其中N是X的闭子空间．则$N^{\perp}$是伴随空间M^*．

证明 设$\{x_i\}_1^m$是M的基．对于$j=1,\cdots,m$，令

$$N_j:=\{x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_m\}\oplus N,$$

则N_j是闭的（留给读者证明）且$x_j\notin N_j$；因此，由定理2.4，

存在$x_j^* \in X^*$使得

$$\langle x_j^*, x_j \rangle = 1, \quad \langle x_j^*, x_i \rangle = 0, \qquad i \neq j$$

$$\|x_j^*\| = 1/\mathrm{dist}(x_j, N_j),$$

且

$$\langle x_j^*, y \rangle = 0, \quad y \in N,$$

即，$x_j^* \in N^{\perp}$，$\langle x_j^*, x_i \rangle = \delta_{ij}$，$i, j = 1, \cdots, m$。从而证得了$\{x_j^*\}_1^m$是无关的．现在证明它们是$N^{\perp}$的基。对于任何$f \in N^{\perp}$，设

$$\alpha_j := \langle f, x_j \rangle, \quad j = 1, \cdots, m.$$

及

$$g = f - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j^*.$$

则

$$\langle g, x_i \rangle = \langle f, x_i \rangle - \sum_{j=1}^{m} \langle f, x_j \rangle \delta_{ij} = 0,$$

$$i = 1, \cdots, m,$$

且

$$\langle g, y \rangle = 0, \quad y \in N.$$

因此，对于$x \in X$，$\langle g, x \rangle = 0$；即$f = \Sigma_{j=1}^m \alpha_j x_j^*$且$\dim N^{\perp} = m$。把$X$的伴随空间$X^*$考虑为Banach空间，由于$\dim M^* = m$且$\{x_j^*{}_{\restriction M}\}_1^m$是无关的，所以$N^{\perp}$可以通过映射：$x^* \in N^{\perp} \mapsto x^*_{\restriction M} \in M^*$与$M^*$等同，这就证得$N^{\perp} = M^*$。□

用$\langle x_j^*, x_i \rangle = \delta_{ij}$，$i, j = 1, \cdots, m$，定义的$M^*$的基$\{x_j^*\}_1^m$称为$N^{\perp}$中的$M$的基$\{x_i\}_1^m$的伴随基（相对于$N$的伴随基）。

在此基下，$x\in M$有表示式$x=\Sigma_{i=1}^{m}\xi_i x_i$，$\xi_i=\langle x,x_i^*\rangle$，$i=1,\cdots,m$。

例2.6 设$X=C(a,b)$。用点t_i，$i=1,\cdots,m$，$t_1=a$，$t_m=b$把$[a,b]$分成$m-1$个区间。设M是X的$[a,b]$上的逐段线性函数组成的子空间，而每个函数在每个子区间$[t_i,t_{i+1}]$（$i=1,\cdots,m-1$）上是线性的。对于$i=1,\cdots,m$，设e_i是逐段线性函数，它在t_i取值为1，而在其它点t_j，$j\neq i$，取值为0。$\{e_i\}_1^m$是M的基。伴随基是由$\{e_i^*\}_1^m$组成，其中e_i^*是t_i点的赋值泛函：$\langle x,e_i^*\rangle=x(t_i)$。从而按照基$\{e_i\}_1^m$，$x\in M$有表示式$x=\sum_{i=1}^{m}x(t_i)e_i$.

习题

2.4 若$\dim M<\infty$，则$(M^{\perp})^{\perp}=M$.

通常，$(M^{\perp})^{\perp}\cap X=\overline{M}$，$\overline{M}$是$M$的闭包。

2.4 Hilbert空间的内积

设H是$\mathbb{C}$上的Hilbert空间。对于$x,y\in H$，内积(x,y)是复值半双线性形式（关于x线性及关于y半线性）的，它是Hermite的，$(x,y)=\overline{(y,x)}$。此外，对于$x\neq 0$，有$(x,x)>0$。范数由$\|x\|:=(x,x)^{1/2}$定义。

在Hilbert空间理论中，又一个基本的要点是Riesz表示定理：

定理2.6 给定定义在Hilbert空间H上的有界半线性形式f，存在唯一确定的向量$x_f\in H$使得

$$\langle f,y\rangle=(x_f,y)\text{，对所有 }y\in H\text{，}$$

且

$$\|f\|=\|x_f\|.$$

反之，任何一个向量$x\in H$，在H上定义了一个有界的半线性形式f_x：

$$(f_x, y) = (x, y), \quad \text{对所有的 } y \in H$$

且

$$\|f_x\| = \|x\|.$$

关于证明，参见Yosida（1965，P.90）。

定理2.6建立了H^*与H之间的保范的一对一的对应$f \longleftrightarrow x$。于是H^*可以与H等同（特别，$H^{**} = H^* = H$），且H是自反的。可以认为内积(x, y)是$x \in H^*$与$y \in H$之间所定义的数积的一种特殊情形。

若$(x, y) = 0$，则我们说x与y是正交的。

对于H的每个闭子空间M，子空间$M^\perp = \{y \in H, (x,y) = 0$，对$M$中的任何$x\}$使得$H = M \oplus M^\perp$，称$M^\perp$是$M$的正交补，且$(M^\perp)^\perp = M$（参阅Kato，1976，P.252）。为了区别任何一个直和$H = M \oplus N$与正交直和$H = M \oplus M^\perp$，对于后者我们用记号$\textcircled{\perp}$，即，$H = M \textcircled{\perp} M^\perp$。

若$\dim M = m < \infty$，并设$\{x_i\}_1^m$是M的基（不必是标准正交）。$M^* \equiv M$中的伴随基$\{x_i^*\}_1^m$是用$(x_j^*, x_i) = \delta_{ij}$（i，j＝$1, \cdots, m$）来定义的。$\{x_i\}_1^m$与$\{x_i^*\}_1^m$形成一个双正交系。$x_i^* = x_i$（j＝$1, \cdots, m$），当且仅当$\{x_i\}_1^m$是标准正交基。

Banach空间中基的概念，我们未予定义。而在Hilbert空间中，完备的标准正交族起到标准正交基的作用，即当i取遍某个集合时，，族$\{x_i\}$使得

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} \quad \text{且} \quad x = \sum_i \xi_i x_i = \sum_i (x, x_i) x_i .$$

如果H是可分的，则H含有稠密的可列子集，进而任何标准正交族至多可列。因此，对任何在H中稠密的序列，应用Schmidt正交化过程，均可构成完备的标准正交族。

例2.7 $L^2(0,1)$是一个可分的Hilbert空间。集$\{e_k\}_N$是

标准正交基，其中，$e_1(t)=1$，$e_k(t)=\sqrt{2}\cos(k-1)\pi t$，$k=2,3,\cdots$，及$0\leqslant t\leqslant 1$。

3. Banach 空间中的紧集

数值逼近法的分析很大程度上依赖于紧性。由于空间是完备的，因而在我们的论述中可作某些简化。

3.1 定义

设A是 Banach 空间X的子集。A是紧的，当且仅当A的每个开覆盖有有限子覆盖；A是相对紧的，当且仅当$\bar{A}$是紧的。A是列紧的，当且仅当A中的每个序列有收敛子序列且其极限在X中。若对所有的$\varepsilon>0$，A有直径小于ε的集合的有限覆盖，则A是准紧的（或完全有界的）.

下面的三条性质是等价的：

（1）A是相对紧的；

（2）A是列紧的；

（3）A是准紧的。

因此，A是紧的，当且仅当A中的每一个序列有收敛的子序列，且其极限在A中。

3.2 一些例子

我们将多次利用下面的两个定理：

（1）在$\mathbb{R}^n$中，我们有Borel-Lebesgue定理：

$A\subset\mathbb{R}^n$是相对紧的，当且仅当A是有界的。这个性质是有限维空间的特征：Banach 空间 X具有有限的维数，当且仅当它的单位球是紧的。

（2）在$C(\Omega)$中，其中Ω是$\mathbb{R}^n$中的有界开集，有Ascoli—Arzela定理：

$A\subset C(\Omega)$是相对紧的，当且仅当任何一个有界序列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset A$是：

(i) 等度连续：

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\sup_{\substack{i\geq 1\\ \mathrm{dist}(t,t')\leq\delta}}|x_i(t)-x_i(t')|\right)=0;$$

(ii) 等度有界

$$\sup_{i\geq 1}\sup_{t\in\overline{\Omega}}|x_i(t)|<\infty.$$

定理的证明参阅Yosida（1965, P.85）。

关于Ascoli—Arzela定理的应用，我们引用两个例子：

（1）$C^1(a,b)$ 的单位球是$C(a,b)$ 的相对紧集。

（2）设Ω是具有“光滑”边界的$\mathbb{R}^n$的有界开集．$H^1(\Omega)$的单位球是$L^2(\Omega)$的相对紧集（Rellich定理）．$H^s(\Omega)$的单位球是$H^{s'}(\Omega)$的相对紧集（$S'<S$）（Aubin，1972, P.203给出了证明）．

有兴趣的读者例如可在Natanson（1964，Vol, 2，P.202）或在Yosida(1965, P.275）中找到对于$1\leq P<\infty$，l^P和L^P空间中紧集的特征。

4. 有界线性算子

4.1 定义

设T是由X到Y的线性算子，其中，X与Y是复Banach空间。令

$\mathrm{Dom}T:=\{x\in X;\ Tx\in Y\}$是$T$的定义域，

$\mathrm{Im}T:=\{y\in Y;$ 在$\mathrm{Dom}T$中存在x使得$y=Tx\}$是$\mathrm{Dom}T$在T下的象，也称为T的值域，

$\mathrm{Ker}T:=\{x\in X;\ Tx=0\}$称为$T$的零空间（或核）．

T是有界的，当且仅当$\|T\|:=\sup_{0\neq x\in\mathrm{Dom}T}\|Tx\|/\|x\|<\infty$。

习题

2.5 证明

$$\|T\|=\sup(\|Tx\|;\ x\in \mathrm{Dom}T,\ \|x\|=1)$$
$$=\inf(a>0;\ \|Tx\|\leqslant a\|x\|,\ \text{对所有的}\mathrm{Dom}T\text{中的}\ x).$$

$\mathscr{L}(X,Y)$ 是X到Y中的有界线性算子空间（即$\mathrm{Dom}T=X$）。以 $\|T\|:=\sup_{0\neq x\in X}\|Tx\|/\|x\|$ 为范数，$\mathscr{L}(X,Y)$ 是Banach空间。当X＝Y时，$\mathscr{L}(X,Y)$ 记为$\mathscr{L}(X)$。

设$T\in\mathscr{L}(X)$。T是可逆的当且仅当 $\mathrm{Ker}T=\{0\}$。它的逆记为T^{-1}。

例2.8 设$X=Y=C(a,b)$。积分算子K用 $(Kx)(s)=\int_a^b K(s,t)dt$来定义，其中，核$K$在$[a,b]\times[a,b]$上连续。

K是$\mathscr{L}(X)$中的有界线性算子；它的范数是

$$\|K\|=\sup_{0\neq x\in X}\left(\max_{s\in[a,b]}\left|\int_a^b K(s,t)x(t)dt\right|\Big/\max_{t\in[a,b]}|x(t)|\right)$$
$$\leqslant\underbrace{\left(\max_{s,t\in[a,b]}|K(s,t)|\right)}_{M}(b-a)<\infty.$$

积分方程 $Kx=y$，

$$\int_a^b K(s,t)x(t)dt=y(s),\ a\leqslant s\leqslant b,$$

是第一类 Fredholm 方程。积分方程$x-Kx=y$是第二类的Fredholm方程。

例2.9 如果不引起混淆，X上的恒等算子就记为 $1\in\mathscr{L}(X)$。例如，第二类Fredholm方程可写为 $Tx=y$，其中 $T=1-K$。

例2.10 设$X=L^1(0,2\pi)$．设$\mathscr{A}$是在单位圆盘$\{z;\ |z|<1\}$内解析的函数f的类．对于$x\in X$，定义

$$x(\theta)\overset{T}{\longmapsto}f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x(\theta)}{1-ze^{-i\theta}}d\theta.$$

T是从X到$\mathscr{A}$中的有界线性算子．表征$\mathrm{Im}T$是困难的．对于某个$x\in X$，$f\in\mathscr{A}$表示为上述积分的一个简单的充分条件是：对于$|z|\leqslant 1$，$f\in\mathscr{A}$是连续的．利用Cauchy 公式

$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma\frac{f(t)}{t-z}dt,$$

其中Γ是圆周$\{t\in\mathbb{C};\ |t|=1\}$，令$t:=e^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，得到

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{1-ze^{-i\theta}}d\theta,$$

这个式子给出$Tx=f$，其中$x(\theta)=f(e^{i\theta})$．

定理2.7 设$T\in\mathscr{L}(X)$．极限

$$r_\sigma(T):=\lim_{k\to\infty}\|T^k\|^{1/k}=\inf_k\|T^k\|^{1/k}$$

存在．称这个极限是T的谱半径．

证明　令$a_k:=\log\|T^k\|$．必须证明$a_k/k\to b:=\inf_k a_k/k$．$\|T^{m+k}\|\leqslant\|T^m\|\|T^k\|$给出了$a_{m+k}\leqslant a_m+a_k$．对于一个固定的正整数$m$，令$k:=mq+r$，其中，$q$、$r$是满足$0\leqslant r<m$的整数．于是，$a_k\leqslant qa_m+a_r$且

$$a_k/k\leqslant(q/k)a_m+(1/k)a_r.$$

若对于固定的m，$k\to\infty$，则$q/h\to 1/m$．因此，$\limsup_k(a_k/k)\leqslant a_m/m$，其中$m$是任意的．从而，$\sup_k(a_k/k)\leqslant b$．另一方面，$a_k/k\geqslant b$；所以$\liminf_k(a_k/k)\geqslant b$．　□

定理2.7表明，对于任何正整数k，$r_\sigma(T)\leqslant\|T^k\|^{1/k}$．特别地，$r_\sigma(T)\leqslant\|T\|$．相反地，可以在$X$上构造一个等价于$\|\cdot\|$且可以任意地接近于谱半径$r_\sigma(T)$的范数$\|\cdot\|_*$．这个范数依赖

于T。

设给定$\varepsilon>0$。确定k使得

$$\|T^k\|^{1/k}\leqslant r_\sigma(T)+\varepsilon.$$

对于任何$x\in X$，令$r:=r_\sigma(T)$且

$$\|x\|_*:=(r+\varepsilon)^{k-1}\|x\|+(r+\varepsilon)^{k-2}\|Tx\|+\cdots+\|T^{k-1}x\|.$$

那么

$$(r+\varepsilon)^{k-1}\|x\|\leqslant\|x\|_*\leqslant[(r+\varepsilon)^{k-1}+(r+\varepsilon)^{k-2}\|T\|+\cdots+\|T^{k-1}\|]\|x\|;$$

即

$$m(\varepsilon,T)\|x\|\leqslant\|x\|_*\leqslant M(\varepsilon,T)\|x\|.$$

显然

$$\|Tx\|_*=(r+\varepsilon)^{k-1}\|Tx\|+\cdots+\|T^kx\|\leqslant(r+\varepsilon)\|x\|_*;$$

即

$$r\leqslant\|T\|_*\leqslant r+\varepsilon.$$

我们称使得$r_\sigma(T)=0$的算子T是拟幂零的。

例2.11 在$X=C(a,b)$中考虑用

$$(Kx)(s)=\int_a^s k(s,t)x(t)dt,\ a\leqslant s\leqslant b,$$

定义的Volterra积分算子，其中核k是连续的，$a\leqslant t$，$s\leqslant b$。为了看出K是拟幂零的，用归纳法可以证明

$$\|K^k\|\leqslant\frac{M^k(b-a)^k}{(k-1)!},\ k\geqslant1,$$

其中$M=\sup_{s,t\in[a,b]}|k(s,t)|$。

习题

2.6 证明，例2.11中的Volterra算子的定义可用例2.8中

给出的形式写出，其中，假设核 k 在三角形 $a\leqslant t\leqslant s\leqslant b$ 上是连续的，且当 $a\leqslant s<t\leqslant b$ 时为 0．

2.7 设 T，$U\in\mathscr{L}(X)$ 使得 $TU=UT$．证明，$r_\sigma(UT)=r_\sigma(TU)\leqslant r_\sigma(T)r_\sigma(U)$．若对于 $U\in\mathscr{L}(X,Y)$，$T\in\mathscr{L}(Y,X)$，$UT\neq TU$．证明 $r_\sigma(UT)=r_\sigma(TU)$．

2.8 利用 T 的线性证明 T 在 $x=0$ 连续则 T 在 $\mathrm{Dom}T$ 处处连续．T 是连续的，当且仅当它是有界的。

2.9 证明 $T\in\mathscr{L}(X)$ 的零空间是 X 的闭子空间．

2.10 设 $T:X\to Y$ 是定义在 X 上的线性算子，而 X 是有限维空间．证明 T 是连续的．

2.11 在 $X=C(a,b)$ 中考虑由 $x\in X\mapsto y\in Y=Tx$ 定义的算子 T，Tx 是微分方程

$$y''=x\ ,\ y(a)=y(b)=0\ ,$$

唯一的解，其中 y'' 是 y 的二阶导数．T 是线性的吗？证明

$$y(s)=\int_a^s du\int_a^u x(t)dt-\frac{s-a}{b-a}\int_a^b du\int_a^u x(t)dt$$

或

$$y(s)=\int_a^b k(s,t)x(t)dt,$$

其中

$$k(s,t)=\begin{cases}(s-b)(t-a)/(b-a), & a\leqslant t\leqslant s.\\(s-a)(t-b)/(b-a), & s\leqslant t\leqslant b.\end{cases}$$

推出 $T\in\mathscr{L}(X)$．

2.12 设 $T\in\mathscr{L}(X,Y)$，其中 X 和 Y 具有相同的有限维数．T^{-1} 存在，当且仅当 $\mathrm{Im}T=Y$．举出一个例子，当 X，Y 是无限维时虽有 $\mathrm{Im}T=Y$ 但 T^{-1} 不存在．

下面的定理给出了在某种条件下，关于逆 $(1-T)^{-1}$ 的存

在与性质的重要知识.

定理2.8 设$T\in\mathscr{L}(X)$使得$\|T\|<1$，那么，$\mathrm{Im}(1-T)=X$，$(1-T)^{-1}$存在及在X上有界，且

$$(1-T)^{-1}=1+T+T^2+\cdots+T^k+\cdots, \qquad (2.1)$$

其中级数在$\mathscr{L}(X)$中收敛，且$\|(1-T)^{-1}\|\leqslant 1/(1-\|T\|)$.

证明　因为$\|T\|<1$，级数$\sum_{k=0}^{\infty}\|T\|^k$收敛. 因为$\|T^k\|\leqslant\|T\|^k$，所以级数$\sum_{k=0}^{\infty}T^k$在$\mathscr{L}(X)$中收敛. 用$R$表示它的极限，$RT=TR=\sum_{k=0}^{\infty}T^{k+1}$；因此，$(1-T)R=R(1-T)=1$，这就证得了（2.1）. □

称等式（2.1)是$(1-T)^{-1}$的Neumann级数展开式.

对于X中的任何一个y，方程$x-Tx=y$的解x可表示为级数

$$x=y+Ty+T^2y+\cdots\cdots.$$

可以用Picard迭代法来计算x，Picard迭代法也称逐次逼近法：

$$x=\lim_{k\to\infty}x_k,\ x_0=y,\ x_k=Tx_{k-1}+y,\ k\geqslant 1.$$

x_k以公比为$\|T\|$的几何级数的速率收敛于x：

$$\|x_k-x\|\leqslant\frac{\|T\|^{k+1}}{1-\|T\|}\|y\|,\quad k\geqslant 0.$$

习题

2.13　证明积分方程

$$x(t)+0.1\int_0^1 e^{ts}x(s)ds=1,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

有唯一的连续解。给出一种在$C(0.1)$上按照最大范数精确到0.1的计算逼近解的算式.

2.14 考虑例2.11中的Volterra算子。利用 $\|K^k\| \leqslant M^k(b-a)^k/(k-1)!$，证明 $\Sigma_{k=0} K^k$ 在 $\mathscr{L}(X)$ 中收敛。推导出第二类的Volterra方程

$$x(s)-\int_a^s k(s,t)x(t)dt=y(s)$$

对于 $C(a,b)$ 中的每个 y，在 $C(a,b)$ 中有唯一解 x。

作为Hilbert空间 H 中的另一个有界算子的例子，现在证明Riesz 表示定理的一个变形，这个变形称为Lax—Milgram 引理。在椭圆型线性偏微分方程理论中，它是一个有用的工具。复数 z 的实部记为 $\mathscr{R}ez$。

定理2.9 设 $a(x,y)$ 是定义在乘积 Hilbert 空间 $H\times H$ 上的一个复值形式，满足下面的条件：

半双线性：$a(\cdot,\cdot)$ 关于 x 是线性的，关于 y 是半线性的。

有界性：

对于 H 中的所有的 x，y，有 $|a(x,y)| \leqslant \beta\|x\|\|y\|$； (2.2)

强制性：

对于 H 中的所有的 x，$\mathscr{R}e\, a(x,x) \geqslant \alpha\|x\|^2$，$\alpha>0$。 (2.3)

那么，存在唯一确定的有界算子 $S:H\to H$，具有有界逆 S^{-1}，使得当 x，$y\in H$ 时，$(x,y)=a(Sx,y)$ 且 $\|S\|\leqslant 1/\alpha$，$\|S^{-1}\| \leqslant \beta$。

证明 设 D 是 H 中所有这样 x 的集，对这个 x，存在 x^*，使得对所有的 $y\in H$ 有 $(x,y)=a(x^*,y)$ 因为 $0\in D$，所以 D 不空。因为对于所有的 y，若 z 使得 $a(z,y)=0$，则由 $0=a(z,z)\geqslant\alpha\|z\|^2$ 得 $z=0$，所以由 x 唯一地确定了 x^*。$x\mapsto x^*$ 定义了一个线性算子 S，其定义域 $\mathrm{Dom}S=D$，$Sx=x^*$。若

$$\alpha\|Sx\|^2\leqslant\mathscr{R}ea(Sx,Sx)\leqslant|(x,Sx)|\leqslant\|x\|\|Sx\|,$$

则

$$\|Sx\|\leqslant 1/\alpha\|x\|, \qquad x\in D.$$

D是H的闭子空间．设 $x_n \in D$， $x = \lim\limits_n x_n$．$\{Sx_n\}$ 是一个Cauchy序列且有极限 $t = \lim\limits_n Sx_n$．于是 $a(Sx_n, y) = (x_n, y) \to (x, y)$，从而又有 $a(Sx_n, y) \to a(t, y)$．因此，$(x, y) = a(t, y)$，这证得了$x \in D$且 $Sx = t$．

让我们假设$D \neq X$．存在 $z_0 \in H$使得 $z_0 \neq 0$ 且 $z_0 \in D^{\perp}$．考虑定义在H上的半线性形式 $f[u] = a(z_0, u)$．$|f[u]| = |a(z_0, u)| \leqslant \beta \|z_0\| \|u\|$．$f$ 在H上是有界的．由定理2.5，存在$z_0' \in H$使得对所有的$u \in H$满足$a(z_0, u) = f[u] = (z_0', u)$．于是$z_0' \in D$且 $Sz_0' = z_0$．但是

$$\alpha \|z_0\|^2 \leqslant \mathscr{R}e\, a(z_0, z_0) = \mathscr{R}e(z_0', z_0) = 0,$$

从而$z_0 = 0$．这与$z_0 \neq 0$矛盾．$Sx = 0$蕴涵了对所有的$y \in H$，有 $(x, y) = a(Sx, y) = 0$；即，$y = 0$．所以S^{-1}存在．如上所述，对于每个$x \in H$，存在x'使得对所有的$z \in H$，$(x', y) = a(x, z)$．因此，$x = Sx'$．且 S^{-1} 在H上有定义．这时

$$|(S^{-1}x, z)| = |a(x, z)| \leqslant \beta \|x\| \|z\|$$

蕴涵 $\|S^{-1}\| \leqslant \beta$． □

4.2 伴随算子

因为

$$|\langle y, Tx\rangle| \leqslant \|y\| \|Tx\| \leqslant \|T\| \|x\| \|y\|,$$

所以对于 Y^* 中的所有 y，$x \mapsto \langle y, Tx\rangle$ 是在X上有界的半线性形式。从而存在 $z \in X^*$使得$\langle y, Tx\rangle = \langle z, x\rangle$，且$z$依赖于$y$．因此，线性映射$y \mapsto z = T^*y$定义了从$Y^*$到$X^*$中的伴随算子 T^*：

$$\langle y, Tx\rangle = \langle T^*y, x\rangle, \quad x \in X, \quad y \in Y^*.$$

Banach 已经证明了下面的性质：

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

$$\mathrm{Ker}(T^*) = (\mathrm{Im}T)^{\perp}.$$

若$\mathrm{Im}T$是闭的，则$\mathrm{Im}(T^*)=(\mathrm{Ker}T)^{\perp}$(闭值域定理)．

若X与X^{**}的一个子空间等同，则$(T^*)^*$是T的一个扩张．

以上这些的证明，请参阅 Kato（1976，pp.24，154，155 及 234）．

例2.12 设$X=\mathbb{C}^m$具有内积$(x,y)=y^Hx$．考虑基$\{x_i\}_1^m$与$\{y_i\}_1^m$，它们构成双正交系$(x_i, y_j)=\delta_{ij}$，$i, j=1, \cdots, m$．设在给定基下，T是X上的线性算子，用矩阵A表示，其元素为

$$a_{ij}=(Tx_j, y_i)=y_i^HTx_j, \quad i, j=1, \cdots, m.$$

伴随算子T^*，在相同的基下，是用共轭转置矩阵A^H表示的．实际上，

$$(T^*y_j, x_i)=(y_j, Tx_i)=(Tx_i)^Hy_j=$$
$$=\overline{y_j^HTx_i}=\overline{a}_{ji}.$$

例2.13 设$X=L^p(a, b)$，$1\leqslant p<\infty$．T是由

$$(Tx)(s)=\int_a^b k(s, t)x(t)dt$$

定义的积分算子，其中$k(s, t)$使得

$$\int_a^b |k(s, t)|dt<c, \quad s\in[a, b],$$

$$\int_a^b |k(s, t)|ds<c', \quad t\in[a, b]$$

伴随算子T^*在$X^*=L^q(a,b)$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$上是有界的．其实T^*是具有核K^*的积分算子，核K^*是由$K^*(s, t)=\overline{K(t, s)}$ $(s, t\in[a, b])$所确定的．这可由下式得到：

$$\langle T^*y, x\rangle=\langle y, Tx\rangle=\int_a^b y(s)ds\int_a^b \overline{K(s,t)x(t)}\,dt$$

$$= \int_a^b x(t)dt\int_a^b \overline{K(s,\ t)}\,y(s)ds.$$

因此

$$(T^*y)(t) = \int_a^b K^*(t,s)y(s)ds = \int_a^b \overline{K(s,t)}\,y(s)ds.$$

例2.14 (相对于一个强制连续的半双线性形式的伴随算子)设半双线性形式$a(x,y)$满足定理2.9的条件(2.2)及(2.3),且设$T\in\mathscr{L}(H)$.用下式定义相对于a的T的伴随算子$T^\times$

$$a(Tx,\ y) = a(x,\ T^X y),\qquad x,\ y\in H.$$

现在设S是由Lax-Milgram定义的同构算子。它的伴随S^*使得对于H中所有的x,y,有,$a^*(S^*x,\ y)=(x,y)$,这里,令$a^*(x,y):=\overline{a(y,\ x)}$。我们证明$T^\times=(S^{-1}TS)^*=S^*T^*(S^{-1})^*$。一方面,

$$a(Tx,\ y) = (S^{-1}Tx,\ y) = (x,\ (S^{-1}T)^*y),$$

而另一方面

$$a(x,\ T^\times y) = (S^{-1}x,\ T^\times y) = (x,\ (S^{-1})^*T^\times y).$$

所以$(S^{-1})^*T^\times=(S^{-1}T)^*$且$T^\times=(S^{-1}TS)^*$。显而易见$S^\times=S^*$。注意到当伴随空间$H^*$按同构$I$与$H$等同时,$T^X$是$T$的伴随算子,这里同构$I$:$H^*\to H$,$H$是由$a(x,\ Iy)=\overline{y[x]}$,$x\in H$,$y\in H^*$:$T^\times=IT^*I^{-1}$来定义的。称$T^X$是$H$中的$T$的伴随算子。

习题

2.15 设$T\in\mathscr{L}(X,Y)$,其中$\dim X$与$\dim Y$是有限的。证明$\mathrm{Im}T=(\mathrm{Ker}(T^*))^\perp$,$\mathrm{Ker}T=(\mathrm{Im}(T^*))^\perp$,且$\mathrm{Im}(T^*)=(\mathrm{Ker}T)^\perp$。若$\dim X=\dim Y$,则$\mathrm{Im}T=Y$,当且仅当$T^*$有逆。

2.16 若$T\in\mathscr{L}(H)$,则$\|T^*T\|=\|T\|^2$。

在Hilbert空间H中，$T \in \mathscr{L}(H)$是正规的，当且仅当$T^*T = TT^*$；它是自伴的，当且仅当$T^* = T$．当T是自伴的时候，对于$x \in H$，(Tx, x)是实的．若对于$x \in H$（或$0 \neq x \in H$），$(Tx, x) \geqslant 0$（或> 0），称T是非负（或正）定的．

命题2.10 若$T \in \mathscr{L}(H)$是自伴的或正规的，则$r_\sigma(T) = \|T\|$。

证明　我们由证明$\|T^n\| = \|T\|^n$，$n = 2^m$，$m = 1, 2, \cdots$着手．为此，首先假设T是自伴的．利用$\|T^*T\| = \|T\|^2$（习题2.16），得到$\|T^2\| = \|T\|^2$，类似地，对于$n = 2^m, m = 1, 2, \cdots T$，可得到$\|T^n\| = \|T\|^n$，现设$T$是正规的，我们有$\|T^n\|^2 = \|(T^n)^*T^n\|$，且$(T^n)^*T^n = (T^*T)^n$，其中$T^*T$是自伴的．这证得了对于$n = 2^m$有$\|T^n\| = \|T\|^n$．这时

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \in N} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{\substack{n = 2m \\ m \in N}} \|T^n\|^{1/n} = \|T\|. \quad \square$$

4.3　紧算子

定义　$T \in \mathscr{L}(X, Y)$是紧的当且仅当X中的任何有界集的象是Y中的相对紧集．等价地，$T \in \mathscr{L}(X, Y)$是紧的，当且仅当X的任何有界序列$\{x_n\}_N$的象$\{Tx_n\}$在Y中有收敛的子列。

例2.15　设$T \in \mathscr{L}(X, Y)$满足$\dim(\mathrm{Im}T) < \infty$．由Borel-lebesgue定理，$T$是紧的。

例2.16　根据Ascoli-Arzela定理，具有例2.8所定义的连续核k的积分算子是紧的：设B是$C(a, b)$的单位球．对于$x \in B$，$\|Tx\| \leqslant M(b-a)\|x\|$，于是$TB$是等度有界的．由Schwarz不等式，

$$|(Tx)(s_1) - (Tx)(s_2)|^2 \leqslant \left(\int_a^b |K(s_1, t)\right.$$

$$- K(s_2,t)|^2 ds\Big)\cdot\Big(\int_a^b |x(t)|^2 dt\Big)$$

且TB是等度连续的；即

$$\lim_{\delta\to 0}\ \sup_{|s_1-s_2|\leqslant\delta}{}' |(Tx)(s_1)-(Tx)(s_2)| = 0 \text{ 关于 } x\in B$$

是一致的。所以TB在$C(a,b)$中是相对紧的。

例2.17　当Ω有一个"光滑的"边界时，在$C(a,b)$中的$C^1(a,b)$的单射及在$H^{s'}(\Omega)$中的$H^s(\Omega)$（$s'<s$）的单射都是紧算子。这可由3.2节所给的例子中得出。

对于紧算子，下面的性质成立：

（1）$\mathscr{L}(X,Y)$中的所有紧算子组成的集合是$\mathscr{L}(X,Y)$的闭子空间。

（2）紧算子与有界算子的乘积是紧算子，而与乘积的顺序无关。

（3）紧算子的伴随算子仍是紧算子。

其证明可参阅 Kato（1976，pp.158—159）。

习题

2.17　证明，若$X=l^2$且(a_{ij})是一个无穷矩阵，满足$\alpha:=\sum_{i,j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<\infty$，则对于$\sum_1^{\infty}|y_i|^2<\infty$，方程组$y_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j$，$i=1,2,\cdots$，定义了$X$到其自身的一个紧线性算子$T$，$y=Tx$且$\|T\|\leqslant\alpha^{1/2}$。（提示：考虑一个对角子列）

4.4　有限秩的有界算子

$T\in\mathscr{L}(X,Y)$是有限秩的，当且仅当秩$T:=\dim(\mathrm{Im}T)=m<\infty$。

假设$T\in\mathscr{L}(X)$且$\dim(\mathrm{Im}T)=m$，$M=\mathrm{Im}T$在T下是不变的；即，$TM\subset M$。设$\{x_i\}_1^m$是M的基，且$\{x_i\}_1^m$是M^*中的伴随基。设T_M表示T在子空间M上的限制：

$$x \in M \overset{T_M}{\longmapsto} Tx \in M.$$

在基 $\{x_i\}_1^m$与$\{x_i^*\}_1^m$下，T_M用矩阵

$$t_{ij} = \langle Tx_j, x_i^* \rangle, \quad i, j = 1, \cdots, m$$

表示。T 的迹用T_M 的迹来定义，亦即用矩阵（t_{ij}）的迹来定义：

$$\operatorname{tr} T := \sum_{i=1}^{m} \langle Tx_i, x_i^* \rangle.$$

习题

2.18 证明 若$T \in \mathscr{L}(X, Y)$是有限秩的，则T是紧的。

2.19 设$\{T_n\}_{\mathbb{N}}$是$\mathscr{L}(X, Y)$中有限秩算子的序列，满足$\|T - T_n\| \to 0$. 证明T是紧的而未必是有限秩的。（提示：考虑一个对角的子序列）

2.20 设$X = Y$，$A \in \mathscr{L}(X)$。证明若$T \in \mathscr{L}(X)$是有限秩的，则TA及AT也是有限秩的。推导 $\operatorname{tr} TA = \operatorname{tr} AT$。

2.21 证明 $\operatorname{tr} T$与M中的基$\{x_i\}_1^m$的选择无关。

4.5 投影

有界算子$P \in \mathscr{L}(X)$是一个投影，当且仅当$P^2 = P$。相应于P有分解：

$$X = M \oplus N, \text{ 其中 } M := PX = \operatorname{Ker}(1 - P), \text{ 及}$$

$$N := \operatorname{Ker} P = (1 - P)X.$$

P将X沿N投影到M上，$I - P$是沿M在N上的投影：

$$(1-P)^2 = 1 - P - P + P^2 = 1 - P.$$

M与N是X的闭子空间，且分别是$1 - P$与P的零空间. 反之，分解$X = M \oplus N$为两个闭子空间定义了沿N在M上的投影.［P的有界性是闭图象定理的推论；参阅本节与Kato(1976,

P. 167).]此外，给定X的闭子空间M，存在从X到M上的投影，当且仅当存在X上的闭子空间N使得$X = M \oplus N$.

习题

2.22　证明投影P是紧的，当且仅当$\dim(\mathrm{Im}P) < \infty$.

2.23　证明沿N在M上的投影P的伴随P^*是X^*中的投影，满足$M^* := P^*X^* = \mathrm{Ker}(1 - P^*) = (\mathrm{Im}(1 - P))^{\perp} = N^{\perp}$及$N^* := (1 - P^*)X^* = \mathrm{Ker}(P^*) = (\mathrm{Im}P)^{\perp} = M^{\perp}$.

2.24　证明 若$z(z - 1) \neq 0$，则$(z1 - P)^{-1} = (1/z)1 + [1/z(z-1)]P$.

设M是 Hilbert 空间H的闭子空间. 分解$H = M \oplus M^{\perp}$定义了沿$M^{\perp}$在M上的正交投影P_M.

命题2.11　正交投影是自伴的且非负定的.

证明　对于

$$x, y \in H,\ (P_Mx, y) = (P_Mx, P_My + P_{M^\perp}y) = (P_Mx, P_My) = (P_Mx + P_{M^\perp}x, P_My) = (x, P_My)$$

且

$$(P_Mx, x) = (P_Mx, P_Mx + P_{M^\perp}x) = (P_Mx, P_Mx) = \|P_Mx\|^2 \geqslant 0, \quad x \in H. \qquad \square$$

习题

2.25　证明$\|(1 - P_M)x\| = \mathrm{dist}(x, M)$，其中对于任意$x \in H$，$\mathrm{dist}(x, M) := \min\limits_{y \in M}\|x - y\|$.

2.26　在Hilbert空间中，也可以考虑斜的（即非正交的）投影. 证明对于这样的投影，若$P \neq 0$，则$\|P\| \geqslant 1$且$\|P\| = 1$，当且仅当P是一个正交投影.

例2.18　（相对于强制连续的半双线性形式的投影算子）设$a(x, y): H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$是满足（2.2）及（2.3）的半双

线性形式. 设V是H的闭子空间. 令$W:=\{x\in H;\ a(x,y)=0$, 对所有的$y\in V\}$. $a(\cdot,\cdot)$关于V的强制性蕴涵$V\cap W=\{0\}=V^{\perp}\cap W^{\perp}$. 因此$H=V\oplus W$. 沿$W$在$V$上的投影$\pi^{a}$是相对于$a(\cdot,\cdot)$在$V$上的投影; 也称这个投影为从$H$到$V$上的投影 (或椭圆投影). 它是用

$a((1-\pi^{a})x,y)=0$, 对于所有的$y\in V$及$x\in H$来表征的.

设π_{V}是相应于$H=V\oplus V^{\perp}$在V上的正交投影. 对于任意$x\in H$,

$$a((1-\pi^{a})x,\ (1-\pi^{a})x)=a((1-\pi^{a})x,(1-\pi_{V})x).$$

因此

$$\alpha\|(1-\pi^{a})x\|^{2}\leqslant\mathscr{R}e\,a((1-\pi^{a})x,(1-\pi^{a})x)$$

$$\leqslant|a((1-\pi^{a})x,\ (1-\pi_{V})x)|\leqslant\beta\|(1-\pi^{a})x\|\|(1-\pi_{V})x\|.$$

这证明了对于H中的所有的x,

$$\|(1-\pi^{a})x\|\leqslant(\beta/\alpha)\operatorname{dist}(x,V).$$

类似地, 对于H中的x, 利用$a(\pi^{a}x,\ \pi^{a}x)=a(x,\ \pi^{a}x)$, 并在$H$上利用(2.2)和(2.3), 容易证明$\|\pi^{a}\|\leqslant\beta/\alpha$是与$V$无关的常数. 相对于范数$a(\cdot,\cdot)$的伴随算子$\pi^{aX}$是使得

$a(x,\ (1-\pi^{aX})y)=0$, 对于所有的$x\in V$及$y\in H$.

如果a是 Hermite 的, 对所有的x, $y\in H$, 有$a(x,y)=\overline{a(y,x)}$, 那么, 由于在H上它的强制性, $a(x,x)\geqslant\alpha\|x\|^{2}$. $a(\cdot,\cdot)$定义了H上的一个内积$(\cdot,\cdot)_{a}$. 其相应的范数是, 对于H中的x, $\|x\|_{a}=\sqrt{a(x,x)}$. 显然, $\pi^{a}=\pi^{ax}$: 投影a是在V上的投影, 它关于内积$(\cdot,\cdot)_{a}$是正交的:

$$\|(1-\pi^{a})x\|_{a}=\min_{y\in V}\|x-y\|_{a},\ \text{对于所有的}\ x\in H.$$

5. 投影对及子空间之间的间隙

设 P，Q 是 $\mathbb{C}$ 上Banach空间 X 或 Hilbert 空间 H 的一对闭子空间上的投影．$M:=PX$，$N:=QX$．如果 P^* 与 Q^* 是伴随投影．那么

$$M^*:=\mathrm{Im}(P^*)=[(1-P)X]^{\perp} \text{ 及}$$

$$N^*:=\mathrm{Im}(Q^*)=[(1-Q)X]^{\perp}.$$

5.1 Hilbert 空间中的投影

M 和 N 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间．

设 P，Q 分别是在 M、N 上的正交投影．M 与 N 之间的间隙（或孔隙）为：

$$\Theta(M,N):=\max\left(\sup_{\substack{x\in M\\ \|x\|=1}}\|(1-Q)x\|,\ \sup_{\substack{x\in N\\ \|x\|=1}}\|(1-P)x\|\right).$$

也有

$$\Theta(M,N)=\max\left(\sup_{\substack{x\in M\\ \|x\|=1}}\mathrm{dist}(x,N),\ \sup_{\substack{x\in N\\ \|x\|=1}}\mathrm{dist}(x,M)\right)$$

$$=\max(\|(P-Q)P\|,\ \|(P-Q)Q\|)=\|P-Q\|.$$

在有限维空间中，我们可以解释 $\Theta(M,N)$ 的几何含义：

$$\Theta(M,N)=\sin\theta,$$

其中 θ 是超平面 M 与 N 之间的锐角．参见图2.1

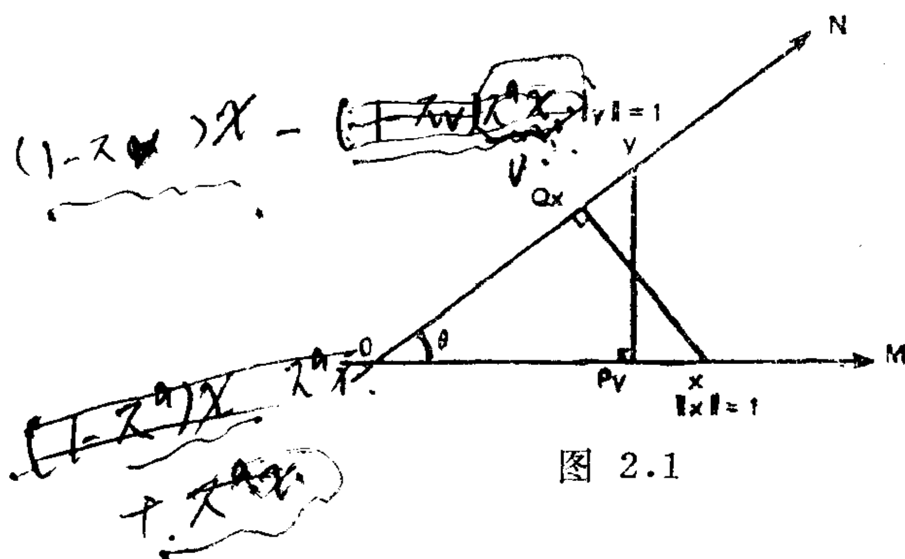


图 2.1

若$\|P-Q\|<1$，则$\dim M=\dim N$(Sz－Nagy，1946/47)．这对于斜投影亦真．若P'与Q'是使得$\mathrm{Im}P'=M$，$\mathrm{Im}Q'=N$的斜投影，则$\|P-Q\|\leqslant\|P'-Q'\|$（Kato，1976，P.58）

5.2 Banach空间中的投影

现在M和N是Banach空间X的闭子空间．

设

$$\delta(M,N):=\sup_{\substack{x\in M\\ \|x\|=1}}\operatorname{dist}(x,N)\leqslant\|(P-Q)P\|.$$

$\delta(M,N)$是使得$\operatorname{dist}(x,N)\leqslant\delta\|x\|$，$x\in M$，$\delta\geqslant 0$的最小数$\delta$．$\operatorname{dist}(x,N)\leqslant\|x\|$；因此，$\delta\leqslant 1$．注意$\delta(M,N)\neq\delta(N,M)$．

M与N之间的间隙是

$$\Theta(M,N):=\max(\delta(M,N),\ \delta(N,M)).$$

引理2.12 若$\dim N<\infty$且$\dim M>\dim N$，则存在$x\in M$使得$\operatorname{dist}(x,N)=\|x\|>0$；从而$\delta(M,N)=1$．

证明 在Banach空间中，这个引理是不明显的（参阅Kato，1976，P.199）；在Hilbert空间中，仅考虑x到N上的正交投影． □

命题2.13 $\Theta(M,N)$有下面的性质：

(i) $\Theta(M,N)\leqslant\max(\|(P-Q)P\|,\ \|(P-Q)Q\|)$．

(ii) $\delta(M,N)=\delta(M^*,N^*)$．

现假设$\dim N<\infty$．则有以下的附加性质：

(iii) $\delta(M,N)<1$蕴涵$\dim M\leqslant\dim N$．

(iV) $\Theta(M,N)<$蕴涵$\dim M=\dim N$．

(V) $\dim M=\dim N$蕴涵$\delta(N,M)\leqslant\delta(M,N)/[1-\delta(M,N)]$．

证明 (i)与(ii)容易证明．(iii)是引理2.12的推断．然后由此得出(iV)．(V)的证明参阅Kato (1958,

P.265)。 □

命题2.14 $\|P-Q\|<1$ 蕴涵。$\dim M=\dim N$。

证明参阅Kato（1976，PP.33及156）。

推论2.15 设 $P(t)$ 是投影族，它连续依赖于在$\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$的连通域内变化的参数 t . 则 $\dim(P(t)X)$ 是常数。

证明 $t\mapsto\dim(P(t)X)$ 是取值在$\mathbb{N}$中的 t 的连续函数．因此它是常数。 □

假设X有两种分解：$X=M\oplus N=M'\oplus N$，其中 $M\neq M'$。

引理2.16 设P（或P'）是沿N在M（或M'）上的投影．若

$$a:=\|1-P'\|\delta(M,M')<1,$$

则

$$\|P-P'\|\leqslant\|P'\|a/(1-a).$$

证明 设

$$d:=\sup_{\substack{x\in M\\ \|x\|=1}}\|x-P'x\|.$$

取 $\delta>\delta(M,M')$及 $x\in M$，$\|x\|=1$. 存在 $y\in M'$使得$\|x-y\|<\delta$，

$$\|x-P'x\|=\|(1-P')(x-y)\|<\|1-P'\|\delta .$$

于是

$d\leqslant\|1-P'\|\delta$，对所有的 $\delta>\delta(M,M')$ 蕴涵着：

$$d\leqslant\|1-P'\|\delta(M,M')=a .$$

由假设 $d\leqslant a<1$. 对M中所有的 z，$\|z-P'z\|\leqslant d\|z\|$且$P'=P'P$。于是对$X$中的任意 t，

$$\|Pt\|\leqslant\|Pt-P'Pt\|+\|P'Pt\|\leqslant d\|Pt\|+\|P't\|,$$

从而得到

$$\|Pt\| \leqslant \frac{1}{1-d}\|P't\| \leqslant \frac{1}{1-a}\|P't\|.$$

所以

$$\|Pt-P't\| = \|Pt-P'Pt\| \leqslant d\,\|Pt\| \leqslant \frac{a}{1-a}\|P't\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a}{1-a}\|P'\|\|t\|. \quad \square$$

6. 闭线性算子

为了用于微分方程，考虑无界线性算子是必要的. 其中重要的一类具有这样的性质，它在某些方面补偿了连续性的欠缺. 由X到Y的线性算子T的这个性质可由T的图象$G(T)$来表示，$G(T)$定义于$X\times Y$，且$G(T):=\{(x,Tx);\ x\in \mathrm{Dom}\,T\}$.

6.1 定义

T是闭的，当且仅当它的图象$G(T)$是具有乘积空间拓朴的$X\times Y$中的闭集. 在$X\times Y$上考虑乘积范数$\|(x,\ y)\|_{X\times Y}=(\|x\|_X^2+\|y\|_Y^2)^{1/2}$. 也可以选择其它范数. 不过，欧几里得范数适合$(X\times Y)^*\equiv X^*\times Y^*$.

$\mathscr{C}(X,Y)$是从X到Y中的闭算子组成的集. 当$X=Y$时，$\mathscr{C}(X,\ X)$记为$\mathscr{C}(X)$. $T\in\mathscr{C}(X,\ Y)$，当且仅当对任意序列$x_n\in D$使得$x_n\to x$且$Tx_n\to y$，则有$x\in D$且$Tx=y$.

例2.19 设$X=C(0,\ 1)$. 设$D=C^1(0,\ 1)$是使$x\in X$的导数x'在$C(0,\ 1)$中的集合，设T是由$x\mapsto Tx=x'(x\in D)$定义的线性算子，其定义域为D. 如果$x(t)=t^n$，$x'(t)=nt^{n-1}$，那么$\|x\|=1$，且$\|x'\|=n$. T是无界的，但却是闭算子. 设$x_n\in D$使得$x_n\to x$且$Tx_n\to y$. 即$x_n'\to y$. 由逐点收敛$x_n\to x$与一致收敛$x_n'\to y$证得$x\in D$与$x'=y$.

容易证明下面两条性质：

（1）具有定义域$D\subset X$的有界算子T是闭的，当且仅当D是闭的。特别地，$\mathscr{L}(X,Y)\subset\mathscr{C}(X,Y)$。

（2）如果T^{-1}存在，T是闭的，当且仅当T^{-1}是闭的。

以上两个性质表明了其逆在$\mathscr{L}(X)$中的无界算子自身是闭的。这种情形常出现在数学物理的许多微分算子中。

例2.20 设$X=C(a,b)$。D是$x\in X$的集合，使得二阶导数x''在$C(a,b)$中且$x(a)=x(b)=0$。考虑定义域为D的微分算子T_1，它由$x\in D\mapsto x''$定义。T_1是在习题2.11中所定义的积分算子T的逆：$T_1Tx=x$，$x\in X$且$TT_1x=x$，$x\in D$。

例2.21 设$X=C(a,b)$，D是这样的$x\in X$的集合，使得x'，$x''\in X$且$x(a)=1$，$x'(a)=1$。考虑初值问题

$$x''(s)+a_1(s)x'(s)+a_2(s)x(s)=y(s),\quad a\leqslant s\leqslant b,$$

$$x'(a)=x(a)=1,$$

及其相应的微分算子

$$T: x\in D\mapsto x''+a_1x'+a_2x.$$

写出$x'(s)=z(s)$，假设x是一个解，那么

$$\int_a^u z(t)dt=x'(u)-1,$$

$$\int_a^s du\int_a^u z(t)dt=x(s)-1-(s-a).$$

最后一个积分取形式$\int_a^s z(t)dt\int_t^s du=\int_a^s(s-t)z(t)dt$。在方程中，借助于$z$表示$x$，$x'$，$x''$，给出

$$z(s)+a_1(s)\left(1+\int_a^s z(t)dt\right)+a_2(s)\left(1+s-a\right.$$

$$+\int_a^s (s-t)z(t)dt\Big)=y(s).$$

定义$k(s,t)=-a_1(s)-a_2(s)(s-t)$，$w(s)=y(s)-a_2(s)-a_1(s)-a_2(s)(s-a)$，得到$z(s)-\int_a^s k(s,t)z(t)dt=w(s)$.

于是，$z(s)=x''(s)$是第二类 Volterra 积分方程的解．于是容易看到，其逆T^{-1}在X上是有界的，$T^{-1}\in\mathscr{L}(X)$，所以$T\in\mathscr{C}(X)$。

作为另一个重要的洌子，现在考虑$p(p\geqslant 2)$阶线性常微分方程的边值问题：

$$[\mathcal{L}(x)](t):=a_0(t)x^{(p)}(t)+a_1(t)x^{(p-1)}(t)+\cdots+$$
$$a_p(t)x(t)=f(t),$$
$$a\leqslant t\leqslant b,$$

其中函数$a_0, a_1,\cdots,a_p$，f在$[a,b]$上连续，在$[a,b]$上$a_0(t)\neq 0$，且其中函数x满足p次齐次线性边界条件

$$l_k(x):=\sum_{i=0}^{p-1}[a_{ik}x^{(i)}(a)+b_{ik}x^{(i)}(b)]=0,\quad k=1,\cdots,p,$$

且a_{ik}与b_{ik}是实的或复的常数．假设关于$x(a),\cdots,x^{(p-1)}(a)$，$x(b),\cdots,x^{(p-1)}(b)$的线性形式$\{l_k\}_1^p$是无关的．

设D是$L^\infty(a,b)$中的所有这样函数x的集合，使得$x\in C^{p-1}(a,b)$，$x^{(p)}\in L^\infty(a,b)$且$l_k(x)=0$，$k=1,\cdots,P$．组

$$(\mathcal{L},l_k)=\begin{cases}\mathcal{L}(x)\\ l_k(x)=0,\quad k=1,\cdots,p,\end{cases}$$

是相应于定义在$X=L^\infty(a,b)$上的微分算子T，其定义域为D，且$x\in D\overset{T}{\mapsto}Tx=\mathcal{L}(x)$。

定义 组$(\mathcal{L},l_k)$的 Green 函数是在$a\leqslant s$，$t\leqslant b$上定

义的函数 $g(t, s)$，且使得

（i） $g(t, s)$ 是连续的且对于 $a \leqslant s \leqslant b$ 关于 t 有直到 $p-2$ 阶的连续偏导数。

(ii) $(\partial^{p-1}/\partial t^{p-1})g(t, s)$ 在 $t = s$ 有间断，使得

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}} g(t, s)\bigg|_{t=s^+} - \frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}} g(t, s)\bigg|_{t=s^-} = \frac{1}{a_0(s)};$$

(iii) 在每一个区间 $[a, s)$ 及 $(s, b]$ 内，函数 $t \mapsto g_s(t) = g(t, s)$ 是方程 $\mathfrak{L}(g_s) = 0$ 的解。

(iV) 对于任意固定的 s，$a \leqslant s \leqslant b$，$g(t, s)$ 满足边界条件 $\mathfrak{l}_k(g_k) = 0$，$k = 1, \cdots, p$。

定义

$$(P_0) = \begin{cases} \mathfrak{L}(x) = 0 \\ \mathfrak{l}_k(x) = 0, \quad k = 1, \cdots, p, \end{cases}$$

是相应于 $(\mathfrak{L}, \mathfrak{l}_k)$ 的齐次问题。

命题2.17 如果 (P_0) 仅有解 $x = 0$，那么存在唯一的Green函数 $g(t, s)$。

证明 设 $x_1, \cdots, x_p$ 是 $\mathfrak{L}(x) = 0$ 的 p 个线性无关的解。由于 (iii)，对于一个固定的 s，$a \leqslant s \leqslant b$，$g(t, s)$ 应当满足

$$g_s(t) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i(t), \quad a \leqslant t < s,$$

$$g_s(t) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i x_i(t), \quad s < t \leqslant b,$$

其中 α_i 与 β_i 是 s 的函数。由于 $g_s(t)$ 及它的前 $p-2$ 阶导数在 $t = s$ 的连续性，又由于 (ii)，得到

$$\sum_{i=1}^{p}(\beta_j(s)-\alpha_i(s))x_i^{(j)}(s)=0\ ,\quad j=0,\cdots,p-2,$$

$$\sum_{i=1}^{p}(\beta_i(s)-\alpha_i(s))x_i^{(p-1)}(s)=\frac{1}{a_0(s)}.$$

令 $\gamma_i(s):=\beta_i(s)-\alpha_i(s)$， $i=1,\cdots,p$，得出 $p\times p$ 方程组

$$\sum_{i=1}^{p}\gamma_i(s)x_i^{(j)}(s)=0\ ,\quad j=0,\cdots,p-2,$$

$$\sum_{i=1}^{p}\gamma_i(s)x_i^{(p-1)}(s)=\frac{1}{a_0(s)}.$$

它的行列式是Wronsky行列式$W(x_1,\cdots,x_p)$在 $t=s$ 处的值，这个值是非零的。因此，对于每个 s， $a\leqslant s\leqslant b$，上述线性方程组唯一地确定了 p 个函数$\{\gamma_i\}_1^p$。现在，我们由边界条件（iv）确定 $\beta_i(s)$和$\alpha_i(s)=\beta_i(s)-\gamma_i(s)$。容易看出

$$\sum_{i=1}^{p}\beta_i l_k(x_i)=\sum_{i=1}^{p}\gamma_i\left(\sum_{l=0}^{p-1}a_{lk}x_j^{(l)}(a)\right),\quad k=1,\cdots,p.$$

这个方程组的行列式是 $\det(l_k(x_i))$， $i,\ k=1,\cdots,p$，因为形式 $\{l_k\}_1^p$的无关性，所以$\det(l_k(x_i))$不为零。从而唯一地确定了函数 $g(t,s)$。 □

习题

2.27 在[0，1]上考虑组 $x''(t)$，$x(0)=x(1)=0$。证明Green 函数

$$g(t,s)=\begin{cases}(s-1)t, & t\leqslant s,\\ (t-1)s, & t>s.\end{cases}$$

2.28 对于$[0, 1]$上的$x''(t)$与$x(0)=x'(1)$；$g(t, s)$不是唯一确定的，例如，证明，如果$\beta_2(s)=0$，

$$g(t, s)=\begin{cases} -t, & t\leqslant s, \\ -s, & t>s. \end{cases}$$

2.29 证明对于$[0, 1]$上的$x''(t)$，$x(0)=x'(0)$，$x(1)=-x'(1)$，

$$g(t, s)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}(t+1)(s-2), & t\leqslant s, \\ \dfrac{1}{3}(s+1)(t-2), & t>s. \end{cases}$$

借助于下述边值问题的解决可以充分地评价Green 函数的重要性：

$$(P)=[L(x)=f, \ l_k(x)=0, \ k=1, \cdots, p].$$

定理2.18 若$g(t, s)$是相应于边值问题（P）的 Green 函数，它的解x由

$$x(t)=\int_a^b g(t, s)f(s)ds, \quad a\leqslant t\leqslant b$$

给出.

证明留给读者.

定理2.18证实了在命题2.17的条件下，微分算子有逆算子$T^{-1}=A$。A是Fredholm积分算子，它的核是Green函数。在$C(a, b)$中，A是有界的，因此T是闭的.

在例2.21中，已经给出了初值问题的Green 函数。在其有齐次边界条件的偏微分方程的情形下，Green 函数还可以作为一个等价的积分方程的核引入[参阅 Courantant Hilbert (1953, VoI.I, PP.363—394) 或Garabedian(1967)].

正如我们所看到的，定义域为X的有界算子是闭的。下面

的闭图象定理是一个逆定理。

闭图象定理 定义域为X的从X到Y的闭算子是有界的。

关于证明可参阅 Kato（1976, P.166）。

习题

2.30 设$T\in\mathscr{C}(X, Y)$，其中$\mathrm{Im}T=Y$。若T^{-1}存在，则$T^{-1}\in\mathscr{L}(Y,X)$。

6.2 图象范数

设$T\in\mathscr{C}(X, Y)$，其定义域为D。当赋于D图象范数$\|x\|_D:=\|x\|_X+\|Tx\|_Y$，当$x\in D$时，由于$T$的闭性，它成为Banach空间$\widehat{D}$。因此，$T$是从$\widehat{D}$到$X$中具有$\|T\|_{\hat{D}\to X}<1$的有界算子．依据这个观点，这时可以把微分算子看作定义域为D的无界算子或在$\widehat{D}$上定义的有界算子。

习题

2.31 考虑由

$$(Tx)(t)=x''(t)+tx'(t)+t^2x(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

定义的微分算子，其定义域$D=C^2(0,1)$及$X=C(0,1)$。验证T是从$\widehat{D}$到X中的有界算子。

6.3 稠定算子的伴随算子

设T是从X到Y中的线性算子，并设S是从Y^*到X^*中的算子．若

$\langle y,Tx\rangle=\langle Sy,x\rangle$，$x\in\mathrm{Dom}T$，$y\in\mathrm{Dom}S$，则称$T$与$S$是相互伴随的．对于一个$T$，通常，可以有许多个伴随$T$的从$Y^*$到$X^*$中的算子．若$\overline{\mathrm{Dom}T}=X$，就有唯一的最大的伴随$T$的算子$T^*$，这个算子可以构造如下：$\mathrm{Dom}(T^*)=\{y\in Y^*;\ \exists z\in X^*$使得对于$x\in\mathrm{Dom}T$有$\langle y,Tx\rangle=\langle z,x\rangle\}$。对于给

定的y，因为$\mathrm{Dom}T$在X中是稠密的，$\langle z,x\rangle=\langle z',x\rangle(x\in \mathrm{Dom}T)$蕴涵$z=z'$，所以$z\in X^*$是唯一的。令$T^*y=z$，可以定义从$Y^*$到$X^*$中的算子$T^*$。称算子$T^*$是$T$的伴随算子。如果$\overline{\mathrm{Dom}T}=X$，我们定义的这个算子$T^*$是唯一的.

可以证明下面的性质（参阅 Kato， 1976,PP.168—169及234）：

即使T不闭，T^*也是闭算子.

$$\mathrm{Ker}T^*=(\mathrm{Im}T)^{\perp}.$$

设$T\in\mathscr{C}(X,Y)$，若T^{-1}存在且$T^{-1}\in\mathscr{L}(Y,X)$，则$(T^*)^{-1}$存在且属于$\mathscr{L}(X^*,Y^*)$，其中$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$。其逆亦真。

在Y中$\mathrm{Im}T$是闭的$\Longleftrightarrow \mathrm{Im}T=(\mathrm{Ker}T^*)^{\perp}\Longleftrightarrow \mathrm{Im}T^*=(\mathrm{Ker}T)^{\perp}$(Banach的闭值域定理)。

习题

2.32 设$X:=L^2(0,1)$，$D:=\{x\in X;\ x$在$[0,1]$上绝对连续，$dx/dt\in X$，$x(0)=0\}$。对于$x\in D$，由$x\overset{T}{\longmapsto}dx/dt$定义的算子在$X$中是闭的。证明伴随算子$T^*$定义为

$$\mathrm{Dom}(T^*)=\{x\in X,\ x\text{绝对连续},\ \frac{dx}{dt}\in X,\ x(1)=0\}\text{且 }T^*x=-\frac{dx}{dt}.$$

2.33 设$X=L^2(0,1)$，$D:=\{x\in X$，x'绝对连续，$x''\in X$，$x(0)=x(1)=0\}$。证明算子T：$x\in D\mapsto -x''+2x'-x$有伴随算子T^*：$y\in D\mapsto -y''-2y'-y$。

2.34 设$\Omega=(0,1)\times(0,1)$。证明下面Ω中的边值问题在适当空间中对应于相互伴随的算子：

$$
(P)=\begin{cases} -\Delta u=f & (x,y)\in\Omega \\ \left.\begin{array}{l} u(1,y)=u(0,y) \\ u(x,1)=u(x,0)=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0 \end{array}\right\}, & 0\leqslant x,y\leqslant 1; \end{cases}
$$

$$
(P^*)=\begin{cases} -\Delta u=g & (x,y)\in\Omega \\ \left.\begin{array}{l} v(1,y)=0 \\ v(x,0)=v(x,1)=0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,y)=\dfrac{\partial v}{\partial x}(1,y) \end{array}\right\}, & 0\leqslant x,y\leqslant 1. \end{cases}
$$

B. 谱 论 初 步

在整个这一部分中，X（或H）是复 Banach（或 Hilbert）空间。T或在$\mathscr{C}(X)$或在$\mathscr{L}(X)$中.

当我们在 Banach 空间中研究算子T的时候，在第一章有限维的情形下所考虑的本征值问题需要在本质上进行修正。本征多项式的概念现在已没有意义。然而，正如我们将看到的，有限维情形的部分结果是可以被推广的。对于$z\in\mathbb{C}$，只要算子$(T-z1)^{-1}$在$\mathscr{L}(X)$中存在，这个算子及函数$z\mapsto(T-z1)^{-1}$（在 Banach 空间$\mathscr{L}(X)$中取值）的性态就起核心的作用。

7. 预解式和谱

若$T\in\mathscr{C}(X)$，则对于任意的$z\in\mathbb{C}$，$T-z\in\mathscr{C}(X)$，其中z代表$z1$。我们定义

预解集$\rho(T):=\{z\in\mathbb{C};\ (T-z)^{-1}\in\mathscr{L}(X)\}$；

对于$z\in\rho(T)$预解算子$R(T,z):=(T-z)^{-1}$；对于$z\in\rho(T)$，$R(T,z)$有定义域X，值域$\mathrm{Dom}\,T$；

T的谱：$\sigma(T)$是$\rho(T)$在$\mathbb{C}$中的补集.

注意到，对于$\rho(T)$中的任意的z及X中的任意的f，方程$(T-z)x=f$有唯一的解$x=R(T,z)f$；这个事实给出了$R(T,z)$的命名，简言之为预解式。当不发生混淆时，$R(T,z)$简记为$R(z)$。大致上说，谱理论是研究算子T与$R(z)$，集合$\rho(T)$与$\sigma(T)$，及后面要定义的其它的有关算子与子空间之间的关系的。

7.1 预解算子

$R(z)$满足下面的两个恒等式，这两个算式通常称为第一与第二预解方程（Hilbert）.

（1）对于$\rho(T)$中的z_1、z_2，

$$R(z_1)-R(z_2)=(z_1-z_2)R(z_1)R(z_2)$$
$$=(z_1-z_2)R(z_2)R(z_1) \tag{2.4}$$

（2）对于$\rho(T_1)\cap\rho(T_2)$中的z，假定$\mathrm{Dom}T_1=\mathrm{Dom}T_2$，

$$R(T_1,z)-R(T_2,z)=R(T_1,z)(T_2-T_1)R(T_2,z)$$
$$=R(T_2,z)(T_2-T_1)R(T_1,z) \tag{2.5}$$

为了证明(2.4)，写$z_1-z_2=T-z_2-(T-z_1)$，及为了证明(2.5)，利用$T_2-T_1=T_2-z-(T_1-z)$.

命题2.19 $\rho(T)$是$\mathbb{C}$的开集，$\sigma(T)$是$\mathbb{C}$中的闭集；对于$z\in\rho(T)$，$z\mapsto R(z)$是全纯的且$\|R(z)\|\geqslant 1/\mathrm{dist}(z,\sigma(T))$。

证明 设$z_0\in\rho(T)$。由定理2.8，$|z-z_0|<\|R(z_0)\|^{-1}$是

$$L(z):=[1-(z-z_0)R(z_0)]^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^kR(z_0)^k$$

存在的充分条件.

这时

$$T-z=T-z_0+z_0-z=(T-z_0)[1-(z-z_0)R(z_0)]$$

蕴涵$L(z)R(z_0)=R(z)$。因此，$z\in\rho(T)$且

$$R(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k R(z_0)^{k+1}.$$

在 z_0 的邻域内，$R(z)$有收敛的Taylor展开式。我们说取值在$\mathscr{L}(X)$中的函数$z\mapsto R(z)$关于$\rho(T)$中的z是全纯的（见7.3节）。$\rho(T)$是$\mathbb{C}$的一个开集，且$\sigma(T)$是闭的。$\rho(T)$包含集合$\{z: |z_0-z|<\|R(z_0)\|^{-1}\}$；因此

$$\operatorname{dist}(z_0,\sigma(T))\geqslant\|R(z_0)\|^{-1}. \quad \square$$

命题2.20 $z\mapsto r_\sigma(R(z))$在$\rho(T)$中是上半连续的。

证明 对于$n\in\mathbb{N}$，函数$z\mapsto\|R^n(z)\|^{1/n}$在H中是连续的。由定理2.7，对于任意的$\varepsilon>0$与H中任意的z，存在$\nu\in\mathbb{N}$使得$\|R^\nu(z)\|^{1/\nu}\leqslant r_\sigma[R(z)]+\varepsilon/2$且存在$\alpha>0$使得

$$|z'-z|<\alpha\Rightarrow\|R^\nu(z')\|^{1/\nu}\leqslant\|R^\nu(z)\|^{1/\nu}+\varepsilon/2\leqslant r_\sigma[R(z)]+\varepsilon.$$

因为$r_\sigma[R(z')]=\inf_{n\geqslant1}\|R^n(z')\|^{1/n}$，得到

$$|z'-z|<\alpha\Rightarrow r_\sigma[R(z')]\leqslant r_\sigma[R(z)]+\varepsilon. \quad \square$$

7.2 谱的划分

由下面的定义，可以把谱划分为三个相互独立的部分：$P\sigma(T)$，$C\sigma(T)$及$R\sigma(T)$：

（1）$P\sigma(T):=\{z\in\sigma(T);\ T-z$没有逆$\}$是$T$的点谱。

（2）$C\sigma(T):=\{z\in\sigma(T);\ T-z$有一个（无界的)逆，其定义域在$X$中稠密$\}$是$T$的连续谱。

（3）$R\sigma(T):=\{z\in\sigma(T);\ T-z$有一个逆（有界或无界），其定义域在$X$中不稠密$\}$是$T$的剩余谱。

λ属于$P\sigma(T)$的必要且充分条件是方程$Tx=\lambda x$有非零解$x\in\operatorname{Dom}T$。在这种情况下，称λ是本征值，x是相应的本征向量。零空间$\operatorname{Ker}(T-\lambda)$是$T$的相应于本征值$\lambda$的本征空间。它的维数g是$\lambda$的几何重数。

例2.22 当X是有限维时，任意的线性算子T可用矩阵A表示。$P\sigma(T)$就是A的本征值的集合而$C\sigma(T)$与$R\sigma(T)$是空的。

例2.23 在$X=C(a,b)$中，设$D_1:=\{x\in X;\ x'\in X\}$；于是算子$T_1: x\in D_1\mapsto x'$有谱$\sigma(T_1)=P\sigma(T_1)=\mathbb{C}$。方程$(T-z)x=0$对于所有的$z\in\mathbb{C}$，有属于$D_1$的解$t\mapsto x(t)=e^{zt}$。设$D_2:=\{x\in D_1;\ x(a)=0\}$；于是算子$T_2: x\in D_2\mapsto x'$有空谱。对于每一个$z\in\mathbb{C}$，预解式在$\mathscr{L}(X)$中且由下式给出：

$$R_2(z)x(t)=e^{zt}\int_a^t e^{-zs}x(s)ds.$$

设$D_3:=\{x\in D_1;\ x(b)=kx(a),\ k=\text{常数}\neq 0\}$；那么，算子$T_3: x\in D_3\mapsto x'$关于谱有

$$\sigma(T_3)=P\sigma(T_3)=\{\lambda_n=\frac{1}{b-a}(\log k+2in\pi), n\in\mathbb{Z}\}.$$

对于$z\neq\lambda_n$，预解式在$\mathscr{L}(X)$中由下式给出：

$$R_3(z)x(t)=\frac{e^{zt}}{K-e^{(b-a)z}}\left[K\int_a^t e^{-zs}x(s)ds+e^{(b-a)z}\int_t^b e^{-zs}x(s)ds\right].$$

微分算子$x\mapsto x'$的谱主要与边界条件有关。

例2.24 在$X=L^2(0,1)$中，乘法算子$T: x(t)\mapsto(\cos\pi t)x(t)$关于谱有$\sigma(T)=C\sigma(T)=[-1,1]$。考虑方程$(T-z)x(t)=(\cos\pi t-z)x(t)=0$。对于使得$|z|>1$的复数或实数$z$，$x(t)=0$与$(T-z)^{-1}$是有界的。对于实数$z$，$|z|\leqslant 1$，若$t\neq(1/\pi)\arccos z$，就有$x(t)=0$。$(T-z)^{-1}$存在且通过解$(\cos\pi t-z)x=y$，由此可知$\mathrm{Dom}[(T-z)^{-1}]$是在$t=(1/\pi)\arccos z$的某邻域内等于零的$y\in X$的集合；这邻域可

能随 y 而异．因此$\mathrm{Dom}[(T-z)^{-1}]$在X中稠密且 $C\sigma(T)=[-1,1]$．

例2.25 在$X=l^2$中，左移位算子T：

$$(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1},\cdots)\mapsto(x_2,x_3,\cdots,x_{k+1},x_{k+2},\cdots)$$

有谱 $\sigma(T)=P\sigma(T)\cup C\sigma(T)=\{z;\ |z|\leqslant 1\}$，其中，$P\sigma(T)=\{z;\ |z|<1\}$，$C\sigma(T)=\{z;\ |z|=1\}$。$(T-z)x=y$ 意指 $x_{k+1}-zx_k=y_k$，$k=1,2,\cdots$。由归纳法，

$$x_{k+1}=z^k x_1+z^{k-1}y_1+\cdots+y_k,$$

那么

$$x_1=z^{-k}x_{k+1}-(z^{-1}y_1+\cdots+z^{-k}y_k).$$

若 $|z|\geqslant 1$，当 $k\to\infty$时，$z^{-k}x_{k+1}\to 0$。这给出依据 y 求 x，且表明当 $|z|>1$，$(T-z)^{-1}$ 是有界的。因此，$\{z;\ |z|>1\}\subset\rho(T)$。对于 $|\lambda|<1$，λ 是本征值，具有相应的本征向量 $(1,\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^k,\cdots)$。如果 $|\lambda|=1$，因为 $(1,\lambda,\lambda^2,\cdots)$ 不是 l^2 的元素，所以，$(T-\lambda)^{-1}$存在。因为$\sigma(T)$是闭的，所以我们得到$\sigma(T)=\{z;\ |z|\leqslant 1\}$。当 $|z|=1$时，如果 y 的非零分量的个数是有限的，那么$\mathrm{Dom}(T-z)^{-1}=\mathrm{Im}(T-z)$包含 y，从而是稠密的。

例2.26 在$X=l^2$ 中，右移位算子T'，

$$(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1},\cdots)\mapsto(0,x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},x_k,\cdots)$$

有相同的谱$\sigma(T')=\{z,\ |z|\leqslant 1\}$。(注意 T' 是例 2.25 所定义的 T 的伴随算子。)而这时$R\sigma(T')=\{z;\ |z|<1\}$ 且 $C\sigma(T')=\{z;\ |z|=1\}$. 由方程$T'x-zx=y$ 推得$-zx_1=y_1$，$x_{k-1}-zx_k=y_k$，$k\geqslant 2$。当$z=0$时，T'^{-1}存在且在非稠密的定义域上是有界的：$T'x=y$ 蕴涵 $y_1=0$；因此$0\in R\sigma(T')$．当$z\neq 0$时，$x=(T'-z)^{-1}y$ 存在且由下式给出：

$$x_k=z^{-k}y_1+z^{-k+1}y_2+\cdots+z^{-1}y_k.$$

当 $|z|>1$时，预解式是有界的，且$\{z;\ |z|>1\}\subset\rho(T')$。

读者可验证，对于 $|z|<1$，$\mathrm{Dom}(T'-z)^{-1}$在X中不稠密而对于$|z|=1$，$\mathrm{Dom}(T'-z)^{-1}$是稠密的，（参阅Taylor，1958，P.266）.

在l^2的典范基$\{e_i\}_N$下，T与T'分别用下列无限矩阵表示

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$A'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

注意，n（$n=2,3,\cdots$）阶左上角方阵是幂零的.

习题

2.35　证明例2.25中的$\sigma(T)$的表征在l^p中仍然有效，$1\leqslant p<\infty$. 在l中，证明$P\sigma(T)=\{z;\ |z|\leqslant 1\}=\sigma(T)$.

2.36　利用习题2.24，分析投影P的谱，$P\neq 1$或0.

7.3 Banach空间中取值的复变量函数

当T是闭的时候，关键的事实是：当z在$\rho(T)$中变化时，$R(z)$解析地依赖于z. 于是，我们将利用取值在复Banach空间（即X或$\mathscr{L}(X)$）中的解析函数的理论. 除了范数代替绝对值外，古典理论的大多数结果仍然成立. 我们把将要用到的大多数重要性质列在下表中. 关于更详尽的讨论，读者可参阅Dunford和Schwartz（1958，部分1，PP.224—232）或

Dieudonné（1960，第Ⅸ章）．

设X表示复Banach空间．设G是$\mathbb{C}$的开集．如果在G中所定义的，在X中取值的函数f在G的每一点连续且df/dz存在，那么称f在G中是解析的（或全纯的）．

设Γ是一条闭的Jordan曲线（即一条可求长的简单曲线），正向且包围λ．在包含Γ的λ的邻域内，假设f是解析的．这时Cauchy积分公式成立；也就是，

$$f(\lambda)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-\lambda}dz.$$

由微分法，

$$f^{(k)}(\lambda)=\frac{k!}{2i\pi}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-\lambda)^{k+1}}dz.$$

对于这样一个函数，Taylor展开式

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

在Γ包围的z_0点是成立的，且这级数在以z_0为心的含在Γ内的任何圆内的z点是绝对且一致收敛的．

反之，任何幂级数$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$在开集$\{z;|z-z_0|<r\}$中定义了一个解析函数，其中

$$r=(\limsup_{k\to\infty}\|a_k\|^{1/k})^{-1}.$$

这个级数在任何集$\{z;\ |z-z_0|\leqslant a\}$ $(a<r)$内的z点绝对且一致收敛．而且，这个级数由f唯一确定；即，

$$a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots.$$

现在假设f在环$\{z;\ a<|z-z_0|<\beta\}$内是解析的．f有唯一的Laurent展开式

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k,$$

这个展开式在$\{z;\ \alpha+\varepsilon<|z-z_0|<\beta-\varepsilon\}$（$\varepsilon>0$）内关于$z$是绝对且一致收敛的。系数$a_k$是由公式

$$a_k=\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz,\quad k\in\mathbb{Z}$$

给出的，其中Γ是圆环$\alpha<|z-z_0|<\beta$内任意一条封闭的正向Jordan曲线且分离了两个边界圆。

若f在$\{z;\ 0<|z-z_0|<\beta\}$内解析，但在$\{z;\ |z-z_0|<\beta\}$内不解析，则z_0是f的孤立奇点。在$\{z;\ 0<|z-z_0|<\beta\}$内收敛的Laurent展开式是f关于z_0的Laurent展开式。若系数a_k（$k<0$）中无限多个是非零的，则z_0是f的本性奇点。若a_k（$k<0$）中仅有有限多个是非零的，则z_0是f的极点．使$a_{-l}\neq 0$的最大整数l是极点的阶数．

最大模原理和Liouville定理对于向量值解析函数也是成立的。设f在开圆盘$\{z;\ |z-z_0|<\beta\}$内解析．设$r<\beta$。若当$|z-z_0|=r$,

$$\|f(z)\|\leqslant M,$$

则展开式

$$f(z)=\sum_{k=0}a_k(z-z_0)^k$$

的系数a_k的界可由Cauchy不等式来确定

$$\|a_k\|\leqslant Mr^{-k}\qquad k\geqslant 0\ .$$

7.4 有界算子的谱

$T\in\mathscr{L}(X)$的谱的主要的特征是有界与非空。我们回顾一

下，$\lim\limits_{k\to\infty}\|T^k\|^{1/k}$存在且等于谱半径$r_\sigma(T)$（定理2.7）.

定理2.21 设T是有界的. 若 $|z|>r_\sigma(T)$，则预解式$R(z)$存在且由下式给出：

$$R(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k-1}T^k, \tag{2.6}$$

这级数在$\mathscr{L}(X)$中收敛.

证明 $\|T^k\|^{1/k}\to r_\sigma(T)$. 若 $|z|\geqslant r_\sigma(T)+\varepsilon,(\varepsilon>0)$，于是，对于充分大的$K$有

$$|z|^{-1}\|T^k\|^{1/k}\leqslant(r_\sigma(T)+\varepsilon)^{-1}(r_\sigma(T)+\varepsilon/2)$$

及

$$\|(z^{-1}T)^k\|\leqslant\left(\frac{r_\sigma(T)+\varepsilon/2}{r_\sigma(T)+\varepsilon}\right)^k.$$

当 $|z|>r_\sigma(T)$时，级数$z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(z^{-1}T)^k$按照算子的范数收敛. 在这个级数左乘与右乘$T-z$得到1，所以实际上这个级数就是预解式$R(z)$. □

等式（2.6）是关于点$z=\infty$的Taylor展开式：$R(z)=-z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(z^{-1}T)^k$. 由幂级数收敛半径的标准公式，知（2.6）的收敛半径是

$$\lim_k\sup\|T^k\|^{1/k}=r_\sigma(T).$$

于是对于 $|z|<r_\sigma(T)$，（2.6）发散.

推论2.22 对于有界算子T，$\rho(T)$与$\sigma(T)$非空且$\sigma(T)$是紧的.

证明 显然，$\rho(T)\supset\{z;\ |z|>r_\sigma(T)\}$而$\sigma(T)\subset\{z;\ |z|\leqslant r_\sigma(T)\}$. 如果$T$是拟幂零的（$r_\sigma(T)=0$），后一个集合简化为单点$z=0$. 因为$r_\sigma(T)\leqslant\|T\|<\infty$得知$\rho(T)$非空及$\sigma(T)$是有界的；故$\sigma(T)$是$\mathbb{C}$的紧子集. 由定理2.8得出，如果 $|z|>$

$\|T\|$,则有$\|R(z)\| \leqslant 1/(|z| - \|T\|)$；所以当$|z| \to \infty$时$\|R(z)\| \to 0$．如果$\sigma(T)$是空的，就会得出，在整个平面上$R(z)$解析并且有界．于是由 Liouville 定理知它是常数，这个常数是零算子．得出矛盾$1 = (T - z)R(z) = 0$．□

推论2.23 对于$T \in \mathscr{L}(X)$，$r_\sigma(T) = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$．

证明 我们证明在圆周$\{z;\ |z| = r_\sigma(T)\}$上至少存在$\sigma(T)$的一个点，见图 2.2．因为(2.6)的收敛域是$|z| > r_\sigma(T)$,若$r_\sigma(T) > 0$，则在收敛圆周$|z| = r_\sigma(T)$上就至少有$R(z)$的一个奇点．若$r_\sigma(T) = 0$，$z = 0$属于$\sigma(T)$，否则$\sigma(T)$就会是空的．□

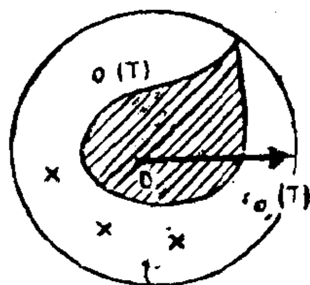


图 2.2

习题

2.37 $T \in \mathscr{L}(X)$是拟幂零的，当且仅当$\sigma(T) = \{0\}$．

对于$\mathscr{L}(X)$中的T，可以定义逼近点谱$\sigma_a(T)$如下：$\sigma_a(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}$；在$X$中存在序列$\{x_n\}$，$\|x_n\| = 1$且$\lim_n \|(T - \lambda I)x_n\| = 0\}$．我们证明下面的性质．

命题2.24 若$T \in \mathscr{L}(X)$．则$\sigma_a(T)$是$\sigma(T)$的非空子集且$\sigma(T)$的边界含于$\sigma_a(T)$．$P\sigma(T)$与$C\sigma(T)$都含在$\sigma_a(T)$内．

证明 假设$\lambda \in \rho(T)$．$T - \lambda$有有界的逆且
$\|x\| = \|(T - \lambda)^{-1}(T - \lambda)x\| \leqslant \|(T - \lambda)^{-1}\| \|(T - \lambda)x\|, x \in X$.
这意味着$\|(T - \lambda)x\| \geqslant \alpha\|x\|$，其中$\alpha := 1/\|(T - \lambda)^{-1}\|$．这就证明了$\rho(T) \subset \mathbb{C} - \sigma_a(T)$；因此$\sigma_a(T) \subseteq \sigma(T)$．设$\lambda'$使得$|\lambda - \lambda'| < \alpha/2$，则对于$x \in X$，$\|x\| = 1$，

$$\|(T - \lambda')x\| \geqslant \|(T - \lambda)x\| - |\lambda - \lambda'| \geqslant \alpha/2,$$

因此$\lambda' \in \mathbb{C} - \sigma_a(T)$．这就证明了$\sigma_a(T)$是闭的．设$\lambda$是$\sigma(T)$的边界上的一个点．对于给定的$\varepsilon > 0$，存在$z \in \rho(T)$

使得 $|\lambda - z| < \varepsilon/2$。于是由命题2.19，$\|(T-z)^{-1}\| \geqslant 2/\varepsilon$.存在 $x \in X$，$\|x\| = 1$，使得$\|(T-z)^{-1}x\| \geqslant 1/\varepsilon$。令

$$x_0 := \|(T-z)^{-1}x\|^{-1}(T-z)^{-1}x.$$

那么，$\|x_0\| = 1$ 且$\|(T-\lambda)x_0 - (T-z)x_0\| < \varepsilon/2$。因此，

$$\|(T-\lambda)x_0\| \leqslant \|(T-\lambda)x_0 - (T-z)x_0\| + \|(T-z)x_0\|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|x\|}{\|(T-z)^{-1}x\|} < \frac{3}{2}\varepsilon.$$

从而证得了 $\lambda \in \sigma_a(T)$，且因为$\sigma_c(T)$包含了$\mathbb{C}$中的非空紧子集$\sigma(T)$ 的边界，所以$\sigma_a(T)$ 非空．显然，$P\sigma(T) \subset \sigma_a(T)$．这时，若 $z \in C\sigma(T)$，则 $(T-z)^{-1}$ 存在但不是有界的；因此，对于所有使得$\|x\| = 1$ 的 x，$\|(T-z)x\|$不是下方有界的；即，$z \in \sigma_a(T)$。 □

由推论2.23和命题2.24，我们得到$\sigma(T)$中使得 $|\lambda| = r_\sigma(T)$ 的任意 λ 属于$\sigma_a(T)$。

这时，对于 $(I-T)^{-1}$ 的 Neumann 展开式（2.1）的收敛性，能够减弱定理2.8所要求的假设$\|T\| < 1$．

命题2.25　给定$T \in \mathscr{L}(X)$ 使得$r_\sigma(T) < 1$，则$(1-T)^{-1}$存在且它的Neumann展开式（2.1）在$\mathscr{L}(X)$中收敛。

证明　对 $z = 1$ 应用定理 2.21，当 $r_\sigma(T) < 1$，$R(1)$ 存在且 $-R(1) = (1-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$，此级数在$\mathscr{L}(X)$中收敛．
□

于是（2.1）收敛的必要充分条件是，对于某个正整数k，$\|T^k\| < 1$．若$r_\sigma(T) < 1$，方程 $x - Tx = y$ 的解可由下面的逐次逼近法求出：

$$x_0 = y, \quad x_k = Tx_{k-1} + y, \quad k \geqslant 1,$$

这个解以几何级数的速率收敛于 $x = (1-T)^{-1}y$，其几何级数的公比任意接近于$r_\sigma(T)$（见习题2.38）．

习题

2.38 对于使得$r_\sigma(T)+\varepsilon<1$的任意正数$\varepsilon$，证明$\|x_k-x\|\leqslant C(\varepsilon,T)(r_\sigma(T)+\varepsilon)^{k+1}$.（提示：利用$\|T\|_*\leqslant r_\sigma(T)+\varepsilon$.）

2.39 给定$T\in\mathscr{L}(X)$及$t\in\mathbb{C}$，证明，若t使得$|t|<1/r_\sigma(T)$，则$(1-tT)^{-1}=\Sigma_{k=0}t^kT^k$在$\mathscr{L}(X)$中收敛。

2.40 假设$T\in\mathscr{L}(X)$有有限秩且是拟幂零的．令$M:=\operatorname{Im}T$，且定义$T_M:M\xrightarrow{T}M$．证明T_M是幂零的，即存在整数k使得$(T_M)^k=0$．

7.5 闭算子的谱

到现在为止，对于把复平面划分成$\sigma(T)$与$\rho(T)$还没有考虑到无穷远点．对于闭算子，考虑无穷远点将是有用的．如果$\sigma(T)$有界，那么，或者T有界且$R(z)$在$z=\infty$是全纯的（推论2.22的逆）．或者$R(z)$有本性奇点$z=\infty$（Kato，1976，P.176）．于是十分自然，如果$T\in\mathscr{L}(X)$，则$z=\infty$在$\rho(T)$中，如果$T\in\mathscr{C}(X)$，则$z=\infty$在$\sigma(T)$中．这样，我们将论及扩充谱$\sigma_e(T)=\sigma(T)\cup\{\infty\}$，及扩充预解集$\rho_e(T)=\rho(T)\cup\{\infty\}$．现在通过下面的定理可以阐述$T$与$T^{-1}$（如果$T^{-1}$存在）的谱的关系．

定理2.26 设T是X中的可逆的闭算子．通过在扩充复平面上定义的映射$z\mapsto 1/z$，扩充谱$\sigma_e(T)$与$\sigma_e(T^{-1})$可以互相满射．

证明 设$0\neq z\in\rho(T)$，因而$R(z)$存在．令$S(z):=TR(z)=1+zR(z)\in\mathscr{L}(X)$．对于所有的$x\in X$，$S(z)x=TR(z)x$且$T^{-1}S(z)x=R(z)x=z^{-1}(S(z)-1)x$。于是

$$zT^{-1}S(z)x-S(z)x=z(T^{-1}-1/z)S(z)x=-x.$$

这表明$\operatorname{Im}(T^{-1}-1/z)=X$．因为$(T^{-1}-1/z)y=0$蕴涵$y=$

$zT^{-1}y$，或等价地 $(T-z)y=0$，即，$y=0$，所以这个算子是可逆的。因此，$(T^{-1}-1/z)^{-1}=-zS(z)\in\mathscr{L}(X)$且 $1/z\in\rho(T^{-1})$ 。若 $z=0$ 属于 $\rho(T)$，则$T^{-1}\in\mathscr{L}(X)$，于是由定义 $0^{-1}=\infty$属于$\rho_e(T^{-1})$。若 $z=\infty$属于$\rho_e(T)$，则 $T\in\mathscr{L}(X)$且 $0=\infty^{-1}$属于$\rho(T^{-1})$。这就证明了通过映射 $z\mapsto 1/z$，$\rho_e(T)$ 被映射到$\rho_e(T^{-1})$ 上。由互补性，对于扩充谱也同样成立。□

类似地可以证明，对于任意多项式 p，$p[\sigma(T)]=\sigma[p(T)]$ (Dunford和Schwartz，1958 部分 1，P.604) 。容易推出对于$\mathscr{L}(X)$ 中的 T，有$r_\sigma^2(T)=r_\sigma(T^2)$.

习题

2.41 对于$z_0\in\rho(T)$，$R(z_0)=(T-z_0)^{-1}\in\mathscr{L}(X)$的谱是有界集，这个集是由$T\in\mathscr{C}(X)$ 的扩充谱通过映射 $z\mapsto 1/(z-z_0)$ 而得到的，且 $R(z_0)-1/(z-z_0)=[1/(z-z_0)](z-T)R(z_0)$ 。试推导：

$$\left(R(z_0)-\frac{1}{z-z_0}\right)^{-1}=z_0-z-(z-z_0)^2R(z),$$

$$z\in\rho(T),\quad z\neq z_0,$$

且

$$r_\sigma[R(z_0)]=\frac{1}{\operatorname{dist}(z_0,\sigma(T))}.$$

2.42 给出积分算子 T_2^{-1}与 T_3^{-1}的谱，其中，T_2，T_3 按例2.23所定义。

7.6 谱的分离

设$T\in\mathscr{C}(X)$，定义域为 Dom$T$.如果$T[(\mathrm{Dom}T)\cap M]\subset M$，那么$X$的子空间$M$在$T$下是不变的。这时，算子 (Dom$T$)

$\cap M \xrightarrow{T} M$是T的到不变子空间M的限制T_M。设（M, N）是一对在T下的不变闭子空间，且使得$X = M \oplus N$。设P是沿N在M上的投影。若$P(\mathrm{Dom}T) \subset \mathrm{Dom}T$，则称算子$T$被这一对互补不变子空间（$M, N$）完全约化。

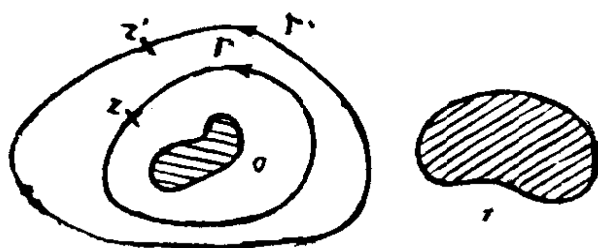


图 2.3

这个定义可以容易地推广到有限个不变子空间的情形。例如，如果$X = \mathrm{Dom}T = \mathbb{C}^N$，那么可对角化的矩阵可被它的$N$个本征方向集完全约化。其投影是本征投影。

正如我们将要看到的，当T被子空间对(M，N)完全约化时，T的谱的研究将分别简化为T_M与T_N的谱的研究。例如，若谱$\sigma(T)$包含有界部分σ，而σ是用一条闭Jordan曲线与其余部分τ分离的，则可能出现这种情形——或更一般地存在有限条这样的曲线——包围σ，而τ在它们的外面。在大多数应用中，σ是由有限个点组成的。

定理2.27 如上所述，假设$\sigma(T) = \sigma \cup \tau$，则存在$X$的一种分解$X = M \oplus N$使得$T$由子空间对（$M$，$N$）完全约化，且$T_M$和$T_N$的谱依次是$\sigma$和$\tau$，其中$T_M \in \mathscr{L}(M)$。

证明 令

$$P := \frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma} R(z)dz \in \mathscr{L}(X).$$

其中Γ是一条包围σ的正向 Jordan曲线。首先证明P是投影. 设Γ'是σ的某个邻域的边界线，它包含Γ且离开τ使其成为外点。参见图2.3。利用（2.4）.

$$P^2=\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma'}R(z)R(z')dz'dz$$

$$=\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma'}\frac{R(z')-R(z)}{z'-z}dz'dz.$$

交换积分的次序并注意到$z\in\Gamma$，$z'\in\Gamma'$，有

$$\int_{\Gamma'}\frac{dz'}{z'-z}=2i\pi,\quad \int_{\Gamma}\frac{dz}{z'-z}=0.$$

得到

$$P^2=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma}R(z)dz=P.$$

现在令 $M:=PX$，$N:=(1-P)X$。$X=M\oplus N$。此外，对于$z\in\rho(T)$，$PR(z)=R(z)P$。P与$R(z)$可交换；所以P与T可交换. 对于$x\in\mathrm{Dom}T$，$Px\in\mathrm{Dom}T$，且$PTx=TPx$；因此M以及N在T下是不变的. T由(M,N)完全约化，从而确定了限制T_M与T_N。$R(z)$到M和N的限制记为$R_M(z)$与$R_N(z)$. 显然$R_M(z)=(T_M-z)^{-1}$。这证明了$\rho(T_M)$与$\rho(T_N)$都包含$\rho(T)$。我们证明$\rho(T_M)$也包含τ. 对于任意在$\rho(T)$中而不在Γ上的z，有

$$R(z)P=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma}R(z)R(z')dz'$$

$$=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma}(R(z)-R(z'))\frac{dz'}{z-z'}.$$

若z在Γ的外面，这就给出

$$R(z)P=\frac{1}{2iz}\int_{\Gamma}R(z')\,\frac{dz'}{z-z'}.$$

其右端在Γ的外面是全纯的；从而得到$R(z)P$与$R_M(z)$在Γ的外部有一个解析延拓。$\rho(T_M)$包含Γ的外部（特别地，包含τ）于是$\sigma(T_M)\subset\sigma$。如果z在Γ的内部，

$$R(z)P=R(z)+\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}R(z')\,\frac{dz'}{z-z'}.$$

这表明了$R(z)(1-P)$及$R_N(z)$在Γ的内部有一个解析延拓且$\sigma(T_N)\subset\tau$。

若$z\in\sigma(T)$，则$z\notin\rho(T_M)\cap\rho(T_N)$；否则，$z$会因为$R_M(z)P+R_N(z)(1-P)$是$T-z$的逆而属于$\rho(T)$。所以$\sigma(T)\subset\sigma(T_M)\cup\sigma(T_N)$。这证明了$\sigma(T_M)=\sigma$，$\sigma(T_N)=\tau$。最后，因为$TR(z)=1+zR(z)$，

$$TP=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma}zR(z)dz\in\mathscr{L}(X)\text{且}T_M\in\mathscr{L}(M).\qquad\square$$

7.7 孤立本征值

在本节中，假设$T\in\mathscr{C}(X)$的谱有孤立点λ。显然，$\sigma(T)$可分离为$\sigma\cup\tau$，其中$\sigma=\{\lambda\}$。包围λ而无$\sigma(T)$中的其它点的任何闭曲线，可选为Γ。因为λ是$R(z)$在Γ内部的唯一的奇点，所以投影$P=(-1/2i\pi)\int_{\Gamma}R(z)dz$不依赖于$\Gamma$而仅依赖于$\lambda$。称$P$（或$M=PX$）是相应于$\lambda$的谱投影（或不变子空间）。$T_M$有单点$\lambda$作为谱。因为

$$r_\sigma(T_M-\lambda)=\max_{z\in\sigma(T_M)}|z-\lambda|=0$$

且级数

$$R_M(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}(z-\lambda)^{-k-1}(T_M-\lambda)^k$$

除了 $z=\lambda$ 外收敛，所以，$T_M-\lambda$ 是拟幂零的（定理2.21）．对于 $x\in M$，$R(z)Px=R_M(z)x$；所以

$$R(z)P=-\frac{P}{z-\lambda}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D^k}{(z-\lambda)^{k+1}},$$

其中

$$D:=(T-\lambda)P=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma}(z-\lambda)R(z)dz$$

正如 $T_M-\lambda$（即，$r_\sigma(D)=0$）一样是拟幂零的，且 $D=DP=PD$。

对于 $x\in N$，$R(z)(1-P)x=R_N(z)x$；因此，$R(z)(1-P)$在 $z=\lambda$ 是全纯的且有命题2.19的证明中所给出的展开式，用 λ 代替 z_0，得到

$$R(z)(1-P)=\sum_{k=0}^{\infty}(z-\lambda)^kS^{k+1},$$

其中

$$S:=R_N(\lambda)(1-P)=\lim_{z\to\lambda}[R(z)(1-P)].$$

我们定义，若 $z\neq\lambda$，$S(z):=R(z)(1-P)$ 且若 $z=\lambda$，$S(z)=S$；$S(z)$ 是 T 关于 λ 的约化预解式．注意到

$$S(\lambda):=S=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}\frac{R(z)}{z-\lambda}dz\in\mathscr{L}(X)$$

及

$$(T-\lambda)S=1-P,\quad SP=PS=0.$$

因为 $R(z)=R(z)P+R(z)(1-P)$，所以 λ 是 $R(z)$ 的孤立奇点，$R(z)$有关于 λ 的Laurent 级数展开

$$R(z)=-\frac{P}{z-\lambda}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D^k}{(z-\lambda)^{k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}(z-\lambda)^k S^{k+1}.$$

习题

2.43 所有上述定义的算子是与T可交换的函数，即，T与$R(z)(z\in\rho(T))$，P，S，D可交换．例如，对于$x\in\operatorname{Dom}T$及$z\in\rho(T)$，$TR(z)x=R(z)Tx$。试建立其余的恒等式．

十分重要的一种特殊情形是$m:=\dim M$为有限的．这时，λ组成了与$m\times m$矩阵同构的有限秩算子T_M的谱：λ是T_M的代数重数为m的本征值．于是，它是T的本征值，且仍然称$m=\dim M$是T的本征值的λ的代数重数．所有相应的定义都可以从T_M到T承接过来．

正如D（习题2.40）一样，实际上$T_M-\lambda$是幂零的．此外，

$M\supset(T_M-\lambda)M\supset\cdots\supset(T_M-\lambda)^l M=\cdots=(T_M-\lambda)^m M=\{0\}$，其中，所有的包含是真包含，直至达到$\{0\}$；因此$D^l=0$，$l$是本征值的陡度，且$R(z)$有Laurent展开式

$$R(z)=-\frac{P}{z-\lambda}-\sum_{k=1}^{l-1}\frac{D^k}{(z-\lambda)^{k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}(z-\lambda)^k S^{k+1}. \tag{2.7}$$

λ是$R(z)$的l阶极点．

TP有谱表示$TP=\lambda P+D$，$D^l=0$．在K个具有有限重数的孤立本征值$\{\lambda_i\}_1^K$的情形下，我们得到谱表示

$$P=\sum_{i=1}^{K}P_i,\quad TP=\sum_{i=1}^{K}(\lambda_i P_i+D_i),\quad PX=\bigoplus_{i=1}^{K}P_iX.$$

（与第一章的定理1.6比较）

这是T的一种限制表示．但是，如果我们对平面上仅包含有限个具有有限代数重数的本征值的有限部分感兴趣，那么，这种限制表示给出了T的相当完整的描述．

在完全一般的情况下，本征值都不是谱的孤立点（见例2.23），也没有有限重数（见习题2.49）．然而，具有有限重数的孤立本征值却十分经常地在数学物理中出现．例如，正如我们在第9节中将要见到的，关于紧算子或紧预解式的算子的本征值，就属于这种情形．

定义$Q\sigma(T)$为具有有限重数的孤立本征值所组成的$P\sigma(T)$的一部分．在本书中，我们将仅仅涉及$Q\sigma(T)$中点的数值计算．

本征空间$E:=\mathrm{Ker}(T-\lambda)$是$M$的子空间，这个子空间是相应于本征值$\lambda$的不变子空间．若$\lambda$不是半单的，即，若$l>1$，则这个子空间是与$M$不同的．$M$的基由g个无关的相应于$\lambda$的本征向量，并补上$m-g$个广义本征向量组成（见第一章，定理1.5）．因为$E$是有限维的，它至少有一个补子空间$F$使得$X=E\oplus F$（见习题2.3）．从$X$沿$F$到$E$上的投影$Q$称为本征投影．注意$Q$不是唯一确定的．当$\lambda$是半单的，$E=M:=PX$且对于选择$F=(1-P)X$，$P$和$Q$相同．

与P不同，不易把Q表示为T的函数．因而，研究本征向量对于T的依赖性会更困难．

例2.27　在$X=\mathbb{R}^2$中，设

$$A(\varepsilon):=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \varepsilon & 1\end{pmatrix},$$

其中ε是正的实参数．当$\varepsilon\to 0$时，

$$A(\varepsilon)\to A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$A(\varepsilon)$有本征值$\lambda_{1\varepsilon}=1+\sqrt{\varepsilon}$及$\lambda_{2\varepsilon}=1-\sqrt{\varepsilon}$.如果$\varepsilon>0$，$\lambda_{1\varepsilon}\neq\lambda_{2\varepsilon}$。其相应的本征向量（见图2.4）是

$$\varphi_{1\varepsilon}=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{\varepsilon}\end{pmatrix},\quad \varphi_{2\varepsilon}=\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{\varepsilon}\end{pmatrix},$$

$$R(\varepsilon,\ z)=(A(\varepsilon)-zI)^{-1}=\frac{1}{(1-z)^2-\varepsilon}\begin{pmatrix}1-z & -1\\ -\varepsilon & 1-z\end{pmatrix}$$

对于任意的$\varepsilon>0$，设Γ_1（或Γ_2）是包围$\lambda_{1\varepsilon}$（或$\lambda_{2\varepsilon}$），且$\lambda_{2\varepsilon}$（或$\lambda_{1\varepsilon}$）在它的外部的闭Jordan曲线；见图2.5

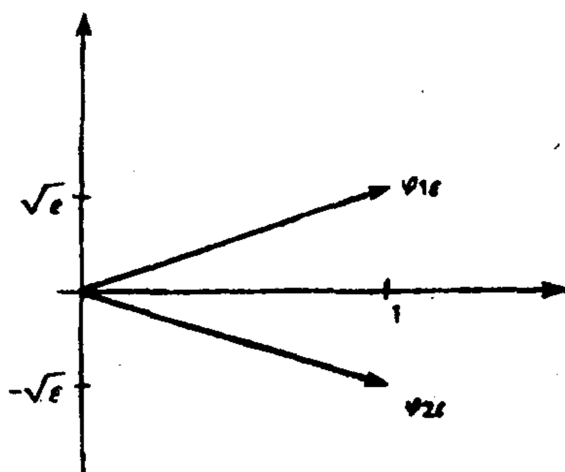


图 2.4

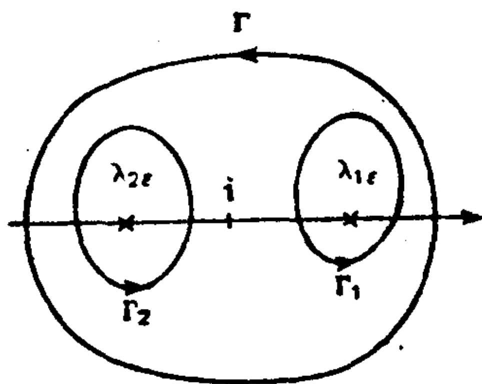


图 2.5

相应于$\lambda_{1\varepsilon}$的谱投影$P_{1\varepsilon}$是

$$P_{1\varepsilon}=\frac{1-}{2i\pi}\int_{1}R(\varepsilon,\ z)dz=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1/\sqrt{\varepsilon}\\ \sqrt{\varepsilon} & \end{pmatrix}.$$

对于

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2.$$

我们有

$$P_{1\varepsilon}x=\frac{1}{2}(x_1+(1/\sqrt{\varepsilon})x_2)\varphi_{1\varepsilon}.$$

$(\varphi_{1\varepsilon},\ \varphi_{2\varepsilon})$ 的伴随基是 $(\psi_{1\varepsilon},\ \psi_{2\varepsilon})$，其中

$$\psi_{1\varepsilon}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix} \text{及 } \psi_{2\varepsilon}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/\sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

于是容易验证 $P_{1\varepsilon}x=(x,\ \psi_{1\varepsilon})\varphi_{1\varepsilon}$。类似地，

$$P_{2\varepsilon}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{\varepsilon} \\ -\sqrt{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix};$$

即，$P_{2\varepsilon}x=\frac{1}{2}(x_1-(1/\sqrt{\varepsilon})x_2)\varphi_{2\varepsilon}=(x,\ \psi_{2\varepsilon})\varphi_{2\varepsilon}$。也有

$D_{1\varepsilon}=D_{2\varepsilon}=0$，$S_{1\varepsilon}=-(1/2\sqrt{\varepsilon})P_{2\varepsilon}$ 及 $S_{2\varepsilon}=(1/2\sqrt{\varepsilon})P_{1\varepsilon}$。注意，当 $\varepsilon\to 0\ (\varepsilon>0)$ 时，$P_{1\varepsilon}$ 与 $P_{2\varepsilon}$ 没有极限. 但是，若 Γ 是一条包围 $\lambda_{1\varepsilon}$、$\lambda_{2\varepsilon}$ 的闭 Jordan 曲线，则对于任意正数 ε，

$$P_\varepsilon=\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma R(\varepsilon,z)dz=P_{1\varepsilon}+P_{2\varepsilon}=I.$$

例2.28 在 $X=C(a,b)$ 中考虑例2.23 的算子 T_3 沿着围绕 $z=\lambda_n$ 的一个小圆积分预解式 $R_3(z)$ 得到

$$P_nX(t)=\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma R_3(z)x(t)dz=\frac{e^{\lambda_n t}}{b-a}\int_a^b e^{-\lambda_n s}x(s)ds,$$

$$n=1,2,\cdots.$$

P_n 是秩为 1 的积分算子，其核为

$$P_n(s,t)=\frac{1}{b-a}e^{\lambda_n(t-s)}.$$

每个λ_n是T_3的代数重数为1的孤立本征值。

例2.29 设X和Y是两个复Banach空间。考虑由$A \in \mathscr{C}(X,Y)$与$B \in \mathscr{L}(X,Y)$所定义的广义本征值问题：

求$\lambda \in \mathbb{C}$，$0 \neq \varphi \in \mathrm{Dom}A$

使得　$A\varphi = \lambda B\varphi$。

假设$A^{-1} \in \mathscr{L}(Y,X)$。该问题有两个等价公式：

在X中：$\varphi = \lambda A^{-1}B\varphi$.

在Y中：$\psi = A\varphi$，$\psi = \lambda BA^{-1}\psi$.

相应的谱投影是

在X中：

$$P = \frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma (A - zB)^{-1}B\,dz \in \mathscr{L}(X)。$$

在Y中：

$$Q = \frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma B(A - zB)^{-1}dz \in \mathscr{L}(Y)。$$

注意$QY = APX$。

习题

2.44 对于$f \in X$，$A \in \mathscr{C}(X,Y)$，$B \in \mathscr{L}(X,Y)$，考虑方程$(A - zB)x = Bf$。令$y = Bx$，$g = Bf$，验证P（或Q）是由X中的$x = (A - zB)^{-1}Bf$（或Y中的$y = B(A - zB)^{-1}g$）所定义的相应的预解式。

2.45 考虑微分本征值问题

$$x''(t) + tx'(t) + t^2x(t) = \lambda[x'(t) + tx(t)],\quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$x(0) = x(1) = 0\,.$$

证明这个问题可以纳入上述的抽象框架。

2.46 在$X = C(0,2\pi)$中，令$D := \{x;\ x' \in X$且$x(0) =$

$x(2\pi)\}$，且考虑 $T: x(t) \mapsto ix'(t)$在D上有定义。证明$\sigma(T) = P\sigma(T) = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$。计算相应的谱投影。试推导本征值是单的。

2.47 在$X = L^2(0,1)$ 中，令$D = \{x \in X; x'$绝对连续；$x'' \in X$且$x(0) = x(1)$，$x'(0) = x'(1)\}$，且考虑 T：$x \in D \mapsto -x'' + 2x' - x$。给出$T$和$T^*$的谱。

2.48 设T是X中的闭算子，且设λ是陡度为l的有限重数的孤立本征值。证明

$$X = \mathrm{Ker}[(T-\lambda)^k] \oplus \mathrm{Im}[(T-\lambda)^k], \quad k \geqslant l.$$

2.49 在$X = C(-1,1)$中，T是由$(Tx)(s) = \int_{-1}^{1} k(s,t)x(t) dt$且其核为$k(s,t) = a(t)b(s)$定义的：$a$与$b$在$[-1,1]$上连续；此外，$a$在$[-1,1]$内没有零点。验证0是具有无限重数的本征值。给出其它的本征值及本征函数。

在孤立本征值的情形下，习题2.41可以完成如下：

命题2.28 设$T \in \mathscr{C}(X)$ 且$z_0 \in \rho(T)$。$\lambda \in Q\sigma(T)$，当且仅当$\nu = (\lambda - z_0)^{-1} \in Q\sigma(R(z_0))$.不仅$T-\lambda$与$R(z_0) - \nu$的零空间相同，而且$T$与$R(z_0)$ 的相应的谱投影也相同。

证明 λ是$\sigma(T)$ 的孤立点，当且仅当ν是$R(z_0)$ 的谱的孤立点（见习题2.41）.利用恒等式

$$\left(R(z_0) - \frac{1}{z-z_0}\right)^{-1} = z_0 - z - (z-z_0)^2 R(z), \qquad z \in \rho(T)$$

且令 $t := 1/(z-z_0)$，相应于ν的$R(z_0)$ 的谱投影为：

$$P(\nu, R(z_0)) = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma(\nu)} (R(z_0) - t)^{-1} dt,$$

其中$\Gamma(\nu)$ 是围绕ν的一条 Jordan 曲线。如果 Jordan 曲线$\Gamma(\lambda)$ 围绕λ而不包围z_0，那么

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma(\lambda)}\left(\frac{1}{z-z_0}+R(z)\right)dz=P(\lambda,T).$$

因为$z_0\neq\lambda$，这总是可能的。

另外，$T-\lambda$ 与$R(z_0)-\nu$ 有相同的零空间．这可由下面的等价关系得出：

$$Tx=\lambda x\Longleftrightarrow(T-z_0)x=(\lambda-z_0)x\Longleftrightarrow R(z_0)x=\nu x.\ \square$$

当 $z_0=0\in\rho(T)$，这个命题特别适用于 $T\in\mathscr{C}(X)$与 $T^{-1}\in\mathscr{C}(X)$。以后它将被用于讲述微分算子的谱的性质，这些微分算子是它们的相应的积分算子的逆。

7.8　伴随算子的预解式和谱

假设T在X中是稠定的，因而 T^*被唯一地确定。

命题2.29　在$\mathbb{C}$中，$\rho(T^*)$和$\sigma(T^*)$ 分别是$\rho(T)$与$\sigma(T)$的共轭集合。

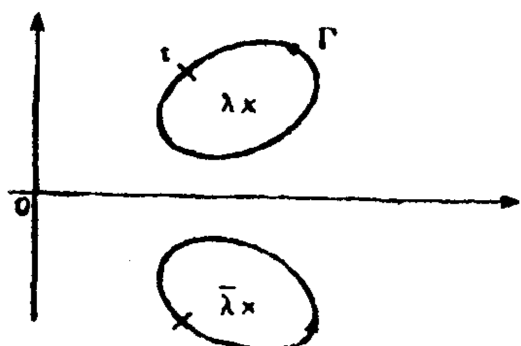


图　2.6

证明　等式

$$\langle y,(T-z)x\rangle=\langle(T^*-\bar z)y,x\rangle,x\in\mathrm{Dom}\,T,\ y\in\mathrm{Dom}(T^*)$$

蕴涵 $R^*(z,T)=R(\bar z,\ T^*)$，$z\in\rho(T)$．从而得出结论。　$\square$

推论2.30　设$\lambda\in Q\sigma(T)$有谱投影 P，那么$\bar\lambda\in Q\sigma(T^*)$有谱投影$P^*$．$\lambda$和$\bar\lambda$有相同的代数重数、几何重数及陡度。

证明　设$\lambda\in Q\sigma(T)$是被Γ包围的孤立本征值。设$\bar\Gamma$是正

向的共轭曲线（包围$\overline{\lambda}$）. T^* 的相应于$\overline{\lambda}$的谱投影是

$$P(\overline{\lambda},T^*)=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\overline{\Gamma}}R(z,T^*)dz=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\overline{\Gamma}}R^*(\overline{z},T)dz .$$

令 $t=\overline{z}$ 且注意 t 在Γ的负向上变动；见图2.6. 这就证得

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_{\overline{\Gamma}}R^*(\overline{z},T)dz=\left(\frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma}R(t,T)dt\right)^*=P(\lambda,T)^*,$$

它是T的相应于λ的谱投影的伴随算子. 如果注意到对于T_M与$T^*_{M^*}$部分，这个问题可以简化为一个有限维的问题，可以认为T_M和$T^*_{M^*}$是相互伴随的。 □

设$\{x_i\}_1^m$是不变子空间$M=PX$的基，且设$\{x_i^*\}_1^m$是 $M^*=P^*X^*$中的伴随基. 于是

$$Px=\sum_{i=1}^{m}\langle x,x_i^*\rangle x_i,\quad P^*y=\sum_{i=1}^{m}\langle y,x_i\rangle x_i^* .$$

当λ是半单的, $\{x_i\}$是T的本征向量, $\{x_j^*\}$是T^*的本征向量，使得

$$\langle x_i,x_j^*\rangle=\delta_{ij},\quad i,j=1,\cdots,m.$$

8. Hilbert空间中的算子

设H是$\mathbb{C}$上的Hilbert空间。稠定闭算子T是自伴的，当且仅当$T^*=T$。这时对于$x\in\mathrm{Dom}T$, $\langle Tx,x\rangle$是实的。

命题2.31 自伴算子T的谱是实的。

证明 如果$z\in\mathbb{C}$, $\mathscr{R}ez$（或$\mathscr{I}mz$）表示z的实（或虚）部. $T-\mathscr{R}ez$与T一样是自伴的. 通过展开$\|Tx-(\mathscr{R}ez+i\mathscr{I}mz)x\|^2$，得到

$$\|(T-z)x\|^2=\|(T-\mathscr{R}ez)x\|^2+(\mathscr{I}mz)^2\|x\|^2,x\in\mathrm{Dom}T.$$

于是

$$\|(T-z)x\| \geqslant |\mathscr{I}mz|\ \|x\|,\quad x \in \mathrm{Dom}T.$$

而且对于非实数 z，$T-z$ 有有界的逆。因为 $\mathrm{Ker}(T^*-z)=(\mathscr{I}m(T-z))^{\perp}=\{0\}$，所以 $\mathscr{I}m(T-z)$ 是闭的且等于H。从而对于 $\mathscr{I}mz \neq 0$ 有 $\mathscr{R}(z) \in \mathscr{L}(H)$。 □

例2.30 在$L^2(a,b)$中，积分算子定义为

$$T:\ x(s) \mapsto \int_a^b k(s,t)x(t)dt,$$

其中$k(s,t)$在$[a,b]\times[a,b]$上连续，这个算子是自伴的，当且仅当对于$[a,b]$中的几乎每个s，t，$k(s,t)=\overline{k(t,s)}$（见例2.13）．

例2.31 设$H=L^2(-\infty,+\infty)$，$D=\{x(t);\ x(t)$和$tx(t)\in X\}$。由$x(t)\in D \mapsto tx(t)$所定义的算子T是自伴的。设$y \in \mathrm{Dom}(T^*)$，且令$T^*y=y^*$，则对所有的$x \in D=\mathrm{Dom}T$，

$$\int_-^+ tx(t)\overline{y(t)}dt=\int_-^+ x(t)\overline{y^*(t)}dt.$$

设$x(t)$是区间$[a,t_0]$的特征函数。我们有

$$\int_a^{t_0} t\overline{y(t)}dt=\int_a^{t_0} y^*(t)dt.$$

于是通过微分，对几乎所有的t_0，$t_0\overline{y(t_0)}=y^*(t_0)$。
因此$y \in D$且$(T^*y)(t)=ty(t)$。反之，$y\in D$蕴涵$y\in\mathrm{Dom}(T^*)$且$(T^*y)(t)=ty(t)$。

例2.32 设$H=L^2(0,2\pi)$且设$D:=\{x\in H;\ x$在$[0,2\pi]$上绝对连续，$x(0)=x(2\pi)$及$x'\in H\}$。由$x\in D\mapsto -ix'$所定义的算子T是对称的；这是因为，当x、$y\in D$，

$$i\frac{d}{dt}\left[x(t)\overline{y(t)}\right]=ix(t)\overline{y'(t)}+ix'(t)\overline{y(t)}$$

且

$$(x,Ty)-(Tx,y)=ix(t)\overline{y(t)}\Big|_{t=0}^{t=2\pi}=0.$$

例2.33（二阶常微分方程）设$H=L^2(a,b)$.

考虑形式微分算子T，

$$(Tx)(t)=-\frac{d}{dt}[P(t)x'(t)]+q(t)x(t),$$

其中p与q是实值函数。必须存在关于p，q及Dom$T$的条件，来保证当$x\in\mathrm{Dom}T$时，Tx是H的确定元素。如果$Tx=u$，$Ty=v$，容易选择

$$u(t)\overline{y(t)}-x(t)\overline{v(t)}=\frac{d}{dt}[p(t)(x(t)\overline{y'(t)}-x'(t)\overline{y(t)})].$$

因此

$$(Tx,y)-(x,Ty)=p(t)(x(t)\overline{y'(t)}-x'(t)\overline{y(t)})\Big|_{t=a}^{t=b}.$$

只要Dom$T$的定义保证

$p(b)(x(b)\overline{y'(b)}-x'(b)\overline{y(b)})=p(a)(x(a)\overline{y'(a)}-x'(a)\overline{y(a)})$，算子$T$就是对称的。例如，相应于下面问题的算子是自伴的：

$$-(px')+qx=f,$$
$$\alpha x(a)+\beta x'(a)=0,$$
$$\gamma x(b)+\delta x'(b)=0$$

（其中p是C^1类，q是$[a,b]$上的C类，$p\neq0$，函数p、q及系数α、β、γ、δ是实的）。

自伴算子T是正定的，当且仅当

$(Tx,x)>0$，对于H中的所有$x\neq0$。

例2.34 设T是H中的自伴正定算子，其定义域为D。对

于$x,y\in D$，$(x,y)_T:=(Tx,y)$定义了D上的一个内积．对应的范数是

$$\|x\|_T=\sqrt{(Tx,x)},\ x\in D.$$

习题

2.50　证明自伴正定算子的谱在正实数的集合内．

命题2.32　若T是自伴的，则$\|R(z)\|=[\mathrm{dist}(z,\sigma(T))]^{-1}$．

证明　由命题2.29的证明得到$R^*(z)=R(\bar{z})$；因此，$R^*(z)R(z)=R(z)R^*(z)$且对于$z\in\rho(T)$，$R(z)$是$\mathscr{L}(X)$中的正规算子．从而由命题2.10，

$$\|R(z)\|=r_\sigma[(T-z)^{-1}]=\max_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda-z|^{-1}$$

$$=\left(\min_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda-z|\right)^{-1}=(\mathrm{dist}(z,\sigma(T)))^{-1}.\quad\square$$

注意到，对$\rho(T)$中的实数z，$R(z)$是自伴的．

命题2.33　若λ是自伴算子T的孤立本征值，则相应的谱投影是正交的：$P^*=P$。重本征值是半单的。

证明　设Γ是分离λ的一条闭Jordan曲线。可以假定Γ关于实轴是对称的。那么由推论2.30的证明立即可得$P=P^*$．于是$D=(T-\lambda)P=D^*$；D是自伴似幂零算子；因此$\|D\|=r_\sigma(D)=0$。D是零算子，这意味着$l=1$。λ是半单的，且PH是相应于λ的本征空间。　$\square$

定义域为D的自伴算子T有一个谱表示，它是对于Hermite矩阵谱分解（1.4）$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iP_i$（见第一章第1节）的推广．

可以证明，每个自伴算子都存在唯一确定的正交投影族$E(\lambda)$（，对于$\lambda\in\mathbb{R}$，）使得

（i）如果$\lambda\leqslant\mu$，$E(\lambda)E(\mu)=E(\mu)E(\lambda)=E(\lambda)$；

（ii）$\lim_{\mu\to\lambda+}E(\mu)=E(\lambda)$；

(iii) $E(\lambda)T = TE(\lambda)$;

(iv) $\lim_{\lambda\to-\infty} E(\lambda) = 0$, $\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = 1$;

(v) 对于任何多项式 p,

$$(p(T)x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda)d(E(\lambda)x,y), \ x\in D, y\in H,$$

其中积分是在ℝ上的Stieljes积分（见 Kato, 1976, P.356; Yosida, 1965, P.313）. 在$P(\lambda)=\lambda$的特殊情形下，我们有

$$(Tx,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(E(\lambda)x,y), \quad x\in D, y\in H.$$

形式上写为

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda) \tag{2.8}$$

且称此式为自伴算子 T 的谱表示.

可以证明以下的性质:

$$d(E(\lambda)x,x) = d\|E(\lambda)x\|^2 \geqslant 0.$$

若 $\mu\in P\sigma(T)$, 则 $E(\mu)\neq E(\mu^-)$ 且 $E(\mu)-E(\mu^-)=P$ 是相应于 μ 的本征投影.

反之，若$E(\lambda^-)=E(\lambda)$, 则 λ 不是 T 的本征值.

$R\sigma(T)$ 是空的.

9. 紧算子的谱与具有紧预解式的算子的谱

紧算子（或有紧预解式的算子）有简单的结构.

定理2.34 设$T\in\mathscr{L}(X)$是紧的. $\sigma(T)$是除 0 外没有聚点的可列集. 每个非零的 $\lambda\in\sigma(T)$是 T 的具有有限代数重数的孤立本征值.

证明 这是一个经典的结果，对此读者可参阅 Kato(1976, PP.185—187; 或 Taylor, 1958, PP.274—285; Dunford

和 Schwartz, 1958, 部分 1, PP.577—580; Zaanen, 1960, PP.311—455）. □

这时，T的任何非零的本征值有完全类似于有限维算子本征值的性质. $\bar{\lambda}$是T^*的具有与λ相同的代数重数和几何重数的本征值. 方程$(T-z)x=y$是可解的，当且仅当$y\in(\operatorname{Ker}(T^*-\bar{\lambda}))^{\perp}$，$(T^*-\bar{z})f=g$是可解的，当且仅当$g\in(\operatorname{Ker}(T-\lambda))^{\perp}$. 这称为Rieaz—Schauder定理及Fredholm抉择的一般化.

设$\{\lambda_k\}_{\mathbb{N}}$是紧算子$T$的非零的相异本征值，其相应的谱投影是$P_k$. 对于每个$\lambda_k$.

$$TP_k=\lambda_k P_k+D_k,$$

其中D_k是幂零的，且$P_k P_l=P_k\delta_{kl}$，$k,l\in\mathbb{N}$. 若令$Q_k=\sum_{p=1}^{k}P_p$，则

$$TQ_k=\sum_{p=1}^{k}(\lambda_p P_p+D_p).$$

这提出了关于T的无穷展开式，然而，没有一个补充的假定，这是不对的. 例如，注意一个紧拟幂零算子没有非零的本征值，但是，若T是Hilbert空间中的紧正规算子或自伴算子，则展开式

$$T=\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k P_k+D_k)$$

是成立的. 设T是Hilbert空间H中的紧自伴算子. 设$\{\lambda_k\}_{\mathbb{N}}$是非零的实的相异本征值，按数量减小的顺序排列. 设$\{P_k\}$是相应的正交本征投影.

命题2.35 在$\mathscr{L}(H)$中，紧自伴算子T有谱表示式

$$T=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k P_k, P_k=P_k^*,\ \dim P_k<\infty,\ P_k P_l=P_k\delta_{kl}.$$

证明　记 $Q_k=\sum_{p=1}^{k}P_p$,

$$TQ_k=\sum_{p=1}^{k}\lambda_p P_p.$$

$T(1-Q_k)$是自伴的，它有本征值λ_{k+1}，λ_{k+2}，…，且可能是0．于是

$$\|T(1-Q_k)\|=r_\sigma[T(1-Q_k)]=|\lambda_{k+1}|\to 0,\ k\to\infty.$$

这给出

$$\left\|T-\sum_{p=1}^{k}\lambda_p P_p\right\|\to 0.$$

现在证明本征向量加上 Ker$T$ 的基构成H的一个完全系．首先证明$Q=\sum_{k=1}^{\infty}P_k$存在．对于$x\in H$，因为P_l是正交投影且$P_kP_l=\delta_{kl}P_k$，所以

$$\sum_{l=1}^{k}\|P_l x\|^2=\left\|\sum_{l=1}^{k}P_l x\right\|^2\leqslant\|x\|^2.$$

因此，$\sum_{l=1}^{n}\|P_l x\|^2$ 是收敛的，那么，

$$\left\|\sum_{l=k}^{k+n}P_l x\right\|^2=\sum_{l=k}^{k+n}\|P_l x\|^2\to 0,\quad n\to\infty$$

这证实了$Qx=\sum_{k=1}^{\infty}P_k x$对$H$中的每个$x$在$H$中是收敛的．因为$T$与所有的$Q_k$可交换，所以$QH$与$(1-Q)H$在$T$下是不变的．容易看到$T$到$(1-Q)H$的限制是零算子且$(1-Q)H$

$=\mathrm{Ker}\,T$. 这表明

$$H=\mathrm{Ker}\,T\oplus\left[\bigoplus_{k=1}^{\infty}P_kH\right]. \quad \square$$

设 $\{\mu_k\}_{\mathbb{N}}$ 是 T 的重本征值。其相应的本征向量 $\{x_k\}_{\mathbb{N}}$ 构成 QH 的 标准正交基且

$$T=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(\cdot,\ x_k)x_k.$$

习题

2.51　对于 $\lambda=\mu_j$（假设是单的），证明 $T-\lambda$ 的值域由 $\{x_j\}^{\perp}$ 中的所有的向量 y 组成。对于这样的 y，$(T-\lambda)x=y$ 的通解是

$$x=-\frac{1}{\lambda}y+\frac{1}{\lambda}\sum_{\mu_k\neq\lambda}\mu_k\frac{(y,\ x_k)}{\mu_k-\lambda}x_k+ax_j,\quad a\in\mathbb{C}.$$

现在转入讨论具有紧预解式的算子。

命题2.36　设 $T\in\mathscr{C}(X)$ 使得对于某个 z，$R(z)$ 存在且是紧的。那么，T 的谱是具有有限代数重数的孤立本征值的可列集，而且对于每个 $z\in\rho(T)$，$R(z)$ 是紧的。

证明　容易由命题2.28和第一预解方程

$$R(z)=R(z_0)[1+(z-z_0)R(z)]$$

得出，这表明了若 $R(z_0)$ 是紧的，则对于所有的 $z\in\rho(T)$，$R(z)$ 也是紧的。 $\square$

在经典边值问题中出现的大多数微分算子有紧预解式。

习题

2.52 设$X=C(0,1)$且设$D=\{x\in X;\ x',\ x''\in X,\ x(0)=x(1)=0\}$. 证明由$x\in D\mapsto -x''$定义的算子$T$有紧预解式.

有时称有紧预解式的算子是反紧的. 从现在起，为了简便起见我们将使用这个名称. 我们回顾$\hat{D}$是定义域D赋以图象范数.

命题2.37 具有定义域D的闭算子T是反紧的，当且仅当$\hat{D}$到X中的单射是紧的.

证明 假设对于某个$z_0\in\rho(T)$，$R(z_0)$是紧的. 设$\{x_n\}\in D$使得$\|x_n\|_D=\|Tx_n\|+\|x_n\|\leqslant 1$. 于是

$$\|(T-z_0)x_n\|\leqslant\|Tx_n\|+|z_0|\,\|x_n\|\leqslant 1+|z_0|.$$

$\{(T-z_0)x_n\}$是有界序列，且对于$n\in N_1\subset\mathbb{N}$，$x_n=R(z_0)(T-z_0)x_n$收敛. 这表明了$X$中$\hat{D}$的嵌入算子i的紧性. 反之，设$z_0\in\rho(T)$，$R(z_0)=\mathrm{i}\circ R(z_0)$，其中$\mathrm{i}:\hat{D}\to X$是紧的且$R(z_0):X\to\hat{D}$是有界的. 这表明$R(z_0)$: $X\to X$是紧的. □

例子将在第四章中给出.

第三章　泛函分析基础：收敛性及摄动理论

引　　言

本章介绍泛涵分析的一些结果，其中很多内容尚未编入教科书，有些内容甚至还没有公开发表过.

在A部分中，我们系统研究有界算子或闭算子序列收敛性方面的各种概念. 在以后进行数值方法的分析时将会用到这些概念.

在B部分中，将 Rellich，Kato 及其他人的经典解析摄动论推广到单位圆盘上，这一理论在参数足够小时是有效的. 本征元的级数展开的迭代计算在单本征值、重本征值或相近本征值的情形下予以介绍.

A．算子序列的收敛性

设$\mathscr{C}(X)$是闭算子空间，且设$T\in\mathscr{C}(X)$有定义域D. $(T-z)x=f$ 或$T\varphi=\lambda\varphi$ 的实际的解常常涉及$\mathscr{C}(X)$中的逼近算子序列T_n，$\operatorname{Dom}T_n=D$，$n=1，2，\cdots$. 对$T_n\to T(n\to\infty)$收敛性的数学性质的了解使得数值逼近的研究大大简化. 在这一部分，我们定义各种类型的收敛性，它们覆盖了大多数的实际方法.

在离散化方法中 T_n 为有限秩常常就足够了. 考虑下面一类算子是有用的. 已知X的有限维子空间序列$\{X_n\}_N$，使得存

在X_n上的投影序列π_n，对于所有$x\in X$满足$\pi_n x\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}x$。已知$D\subseteq X$，令$D_n:=\pi_n D$，且设$\mathscr{T}_n:X_n\to X_n$是线性算子，其定义域为$D_n$.算子$T_n:=\mathscr{T}_n\pi_n$称为属于类$\mathfrak{D}$.这样的算子是$\mathscr{T}_n$到$X$的自然延拓；显然$T_n$是有界的，其定义域为$D$。尤其是当$D=X$及$D_n=X_n$时，设$\mathscr{T}_n$是$X_n$上的线性算子，则$T_n=\mathscr{T}_n\pi_n$是有界的，其定义域为$X$:$T_n\in\mathscr{L}(X)$。

例3.1 设$X=C(a,b)$。$[a,b]$划分为$n-1$个区间，分点为t_i，$i=1,\cdots,n$，$t_1=a$，$t_n=b$。设X_n是X的子空间，它由$[a,b]$上的逐段线性函数所组成。用例2.6（第二章）中定义的基$\{e_i^{(n)}\}_1^n$，$\pi_n x=\Sigma_{i=1}^n x(t_i)e_i^{(n)}$.设$\mathscr{T}_n:X_n\to X_n$，在已选的基下由$n\times n$矩阵$A_n=(a_{ij}^{(n)})$,所定义；则

$$T_n x=\mathscr{T}_n\pi_n x=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(n)}x(t_j)\right)e_i^{(n)}.$$

1. $\mathscr{L}(X)$中算子序列的收敛性

设X的单位球为B，$B:=\{x\in X;\ \|x\|\leqslant 1\}$。序列$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$，$x_n\in X$，在$X$中相对紧，当且仅当它的值$\cup_{n=1}^{\infty}x_n$的集合在$X$中相对紧，即当且仅当每个子序列$\{x_n\}_{N_1\subset\mathbb{N}}$具有收敛子序列$\{x_n\}_{N_2\subset N_1}$。例如，设$T$是紧的。若$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$是$X$中的任意有界序列，则$\{Tx_n\}_{\mathbb{N}}$是相对紧的。

设$\{T_n\}_{\mathbb{N}}$是$\mathscr{L}(X)$中的算子序列，按照下列的定义之一收敛于$T\in\mathscr{L}(X)$：

（a）逐点收敛$T_n\xrightarrow{p}T$，当且仅当对于X中的所有x，当$n\to\infty$时，$T_n x\to Tx$。

（b）一致（或按范数）收敛，当且仅当$\|T-T_n\|\to 0$，$n\to\infty$。

（c）集体紧收敛 $T_n \xrightarrow{cc} T$，当且仅当

（i）$T_n \xrightarrow{p} T$，且

（ii）满足下面条件：

$$\text{集合}K := \bigcup_{n=1}^{\infty}(T - T_n)B\text{是在}X\text{中相对紧。} \quad (3.1)$$

（d）紧收敛 $T_n \xrightarrow{c} T$，当且仅当

（i）$T_n \xrightarrow{p} T$，且

（ii）对于B中的任何序列$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$，序列$\{(T - T_n)x_n\}_{\mathbb{N}}$在$X$中相对紧。 (3.2)

（e）属于类$\mathfrak{D}$的$T_n = \mathscr{T}_n \pi_n$的离散紧收敛 $T_n \xrightarrow{d-c} T$，当且仅当

（i）$T_n \xrightarrow{p} T$，且

（ii）满足下面条件：

对于任何序列$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$使得$x_n \in X_n$，$\|x_n\| \leqslant c$，序列$\{(T - T_n)x_n\}_{\mathbb{N}} = \{(T - \mathscr{T}_n)x_n\}_{\mathbb{N}}$在$X$中相对紧。 (3.3)

在下面四个例子中，取X为l^2；$\{e_i\}_1^{\infty}$是典范基，$X_n = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，$n = 1, 2, \cdots$。

例3.2 $Tx = x$，$T_n x = \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$，$T_n x \to x : T_n \xrightarrow{p} T$.

例3.3 $Tx = 0$，$T_n x = (1/n)x$，$\|T_n - T\| = 1/n \to 0$，且$T_n \xrightarrow{c} T$，但$T_n \overset{cc}{\nrightarrow} T$。

例3.4 $Tx = 0$，$T_n x = (x, e_n)e_1$，$\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n B$，它是$\{e_1\}$

的有界集，是相对紧的：$T_n \xrightarrow{cc} \mathscr{T}$，但$\|T-T_n\|=1$。

例3.5 设$x=\Sigma_{i=1}^{\infty}x_i e_i$，其中$x_i=(x, e_i)$，$x \mapsto Tx = \Sigma_{i=1}^{\infty}x_{i+1}e_i$。对于$x \in X_n$，设$x \to \mathscr{T}_n x = \Sigma_{i=1}^{n-1}x_{i+1}e_i$。设$\pi_n$是在$X_n$上的正交投影，$T_n=\mathscr{T}_n\pi_n$且$x \mapsto T_n x = \Sigma_{i=1}^{n-1}x_{i+1}e_i = T\pi_n$.对于$x_n \in X_n$，$(T-T_n)x_n=0$：$T_n \xrightarrow{a-c} T$.

注意到T不是紧的：它的谱已在第二章例2.25给出，并且本征值不是孤立的。

对于任意的有界算子T，T_n，上面定义的收敛性概念不是严格有序的。下面给出收敛性间的相互关系，并在表3.1中总结了这些结果。

2. $\mathscr{L}$(X)中收敛的性质

2.1 关于逐点收敛

我们首先从Banach—Steinhaus定理手着。

定理3.1 设X及Y是复Banach空间。对于$\mathscr{L}(X, Y)$的有界算子序列$\{T_n\}$在X上逐点收敛于一个线性算子的必要且充分条件是

(i) $\sup_n\|T_n\|<M$，

(ii) 对于在X内稠密的某一集F的所有x，$T_n x$收敛。

关于证明见Yosida（1965，P.69）或Banach和Steinhaus（1927）.

例如，设$\{\pi_n\}$是从X到X_n上的投影序列使得$\pi_n \xrightarrow{p} 1$；因此存在M使得$\|\pi_n\| \leqslant M$。π_n是关于n一致有界的。相反地，设$\sup_n\|\pi_n\|<\infty$，若对于任何n_0存在$N(n_0)$，使得当$n>N(n_0)$时有$X_{n_0}\subset X_n$，且若$\cup_{n\geq 1}X_n$在X中稠密，则对于X中的所有x，$\pi_n(x)\to x$。

定理3.2 设$T_n x \to Tx$，$x \in X$。则对任何相对紧集U，$\sup_{x \in U}\|T_n - T)x\| \to 0$。

证明　设U是相对紧集。对于任意$\varepsilon > 0$，U有以直径小于ε的集合所成的有限覆盖。对于每个$x \in U$，存在x_ε使得$\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$；有有限个这样的$x_\varepsilon$。于是

$$\begin{aligned}\|(T_n - T)x\| &\leqslant \|(T_n - T)(x - x_\varepsilon)\| + \|(T_n - T)x_\varepsilon\| \\ &\leqslant (\|T_n\| + \|T\|)\varepsilon + \max_{x_\varepsilon}\|(T_n - T)x_\varepsilon\|.\end{aligned}$$

即得所求结果。 □

习题

在下面的两个习题中，T_n属于类$\mathscr{D}$。

3.1 证明由Kantorovitch和Akilov（1964，P.543）所给出的条件

(i) $\|(T_n - \pi_n T)_{|X_n}\| = \sup\limits_{\substack{x \in X_n \\ \|x\| = 1}} \|\mathscr{T}_n - \pi_n T)x\| \to 0$，

(ii) $\|(1 - \pi_n)T\| \to 0$；

蕴涵$T_n \xrightarrow{d-c} T$。

3.2 证明在Descloux等（1978a）中给出的条件

$$\|(T - T_n)_{|X_n}\| = \sup_{\substack{x \in X_n \\ \|x\| = 1}} \|(T - \mathscr{T}_n)x\| \to 0$$

蕴涵$T_n \xrightarrow{d-c} T$。比较这些条件与习题3.1所给出的条件。

3.3 证明若$T_n \xrightarrow{cc} T$，则$\|(T_n - T)^2\| \to 0$，$n \to \infty$。

3.4 证明若在$\mathscr{L}(X)$中$T_n \xrightarrow{p} T$，则对于相对紧序列$\{x_n\}$，$(T - T_n)x_n \to y$蕴涵着$y = 0$。

2.2.1 与紧收敛的关系

显然，$T_n \xrightarrow{cc} T$ 蕴涵 $T_n \xrightarrow{c} T$．反之一般则不真，如例 3.3 所示。从实际观点看，有趣的情形是集体紧收敛由紧收敛来刻划，这是因为（3.2）比（3.1）更容易证明。

我们首先注意 $T_n \xrightarrow{cc} T$ 蕴涵着每个 $T-T_n$ 是紧的，这是因为对 $n \in \mathbb{N}$，$(T-T_n)B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(T-T_n)B$ 是相对紧的。$K:=\bigcup_{n=1}^{\infty}(T-T_n)B$ 中的任意序列具有形式 $y_n=(T-T_{\sigma(n)})x_n$，$x_n \in B$，这里 σ 是从 $\mathbb{N}$ 到它自身的映射。K 是相对紧的，当且仅当 K 中的任何序列 $\{y_n\}_{\mathbb{N}}$ 在 X 中有收敛子序列。我们寻找关于 T 及 T_n 的条件，在这些条件下 $T_n \xrightarrow{c} T$ 蕴涵了 $T_n \xrightarrow{cc} T$。

命题3.3 下面的（i）与（ii）是等价的：

（i）对任何整数 n，$T-T_n$ 是紧的并且 $T_n \xrightarrow{c} T$；又

（ii）$T_n \xrightarrow{cc} T$。

证明　从上面讨论可知，只剩下证明由（i）推出（ii）。设 σ 是任意映射：$\mathbb{N} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{N}$。我们先假设 $\sigma(\mathbb{N})$ 是无界的．存在一个无穷子集 $N_1 \subset \mathbb{N}$ 使得 $\sigma_1=\sigma_{\restriction N_1}$ 是单射的．σ_1 是在 $\sigma(N_1)$ 上双射。当 $n \in \mathbb{N}-\sigma(N_1)$，规定 $x'_n=0$；当 $n \in \sigma(N_1)$，规定 $x'_n=x_{\sigma_1^{-1}(n)}$，而 $y'_n=(T_n-T)x'_n$。对于 $n \in N_1$，

$$y_n=(T-T_{\sigma(n)})x_n=(T-T_{\sigma(n)})x_{\sigma_1^{-1}(\sigma(n))}$$

$$=(T-T_{\sigma(n)})x'_{\sigma(n)}=y'_{\sigma(n)}.$$

因此

$$\bigcup_{n\in N_1} y_n=\bigcup_{\sigma(n)\in\sigma(N_1)} y'_{\sigma(n)} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} y'_n,$$

由（3.2），它是相对紧的。并且序列 y_n 有收敛子序列。如果

$\sigma(\mathbb{N})$有界，则存在无穷子集$N_1\subset\mathbb{N}$及$p\in\mathbb{N}$使得$\sigma(N_1)=\{p\}$. 对于$n\in\mathbb{N}$，$y_n=(T-T_p)x_n$，其中$T-T_p$是紧的. □

命题3.4 假设$V_n\xrightarrow{cc}V$，V是紧的，并且对于$U_n\in\mathscr{L}(X)$，$U_n\xrightarrow{p}U$，那么$V_nU_n\xrightarrow{cc}VU$及$U_nV_n\xrightarrow{cc}UV$.

证明 V及$V-V_n$是紧的；因此V_n，VU与UV是紧的. 对于$x\in X$，$V_nU_nx\to VUx$且$U_nV_nx\to UVx$. 设$x_n\in B$；则显然对于$\mathbb{N}$的任何无穷子集N_1，每个序列$\{U_nU_nx_n\}_{N_1}$及$\{U_nV_nx_n\}_{N_1}$都有收敛子序列. □

在实际中，T_n常常是有限秩的（但T不是）.

命题3.5 若T_n是紧的，则$T_n\xrightarrow{cc}T$蕴涵T是紧的.

证明 $T_n\xrightarrow{cc}T$蕴涵对于$n\in\mathbb{N}$，T_n-T是紧的，从而$T=T_n-(T_n-T)$是紧的. □

因为在实际中T_n通常是有限秩的；从而是紧的. 因此只有当T_n是紧算子T的逼近时，集体紧收敛概念才是有用的. 在这种情形下(3.1)可以仅由(3.2)证明；即$T_n\xrightarrow{cc}T\iff T_n\xrightarrow{c}T$.

2.2.2 与一致收敛的关系

一般说来，$\|T_n-T\|\to 0$不蕴涵$T_n\xrightarrow{cc}T$，如例3.3所示. 此外$T_n\xrightarrow{cc}T$并不蕴涵$T_n^*\xrightarrow{p}T^*$，如例3.4所见，那里$T_n^*e_1=e_n$，它在l^2内不收敛.

命题3.6 若T_n-T是紧的，$n\in\mathbb{N}$，则$\|T_n-T\|\to 0$蕴涵$T_n\xrightarrow{cc}T$.

证明 $\|T-T_n\|\to 0$蕴涵（3.2）. 再利用命题3.3. □

命题3.7 若$T_n\xrightarrow{cc}T$且$T_n^*x\to T^*x$，$x\in X^*$，则$\|T-T_n\|\to$

$\to 0$.

证明　假设$\|T-T_n\|\nrightarrow 0$. 存在$\{x_n\}_{N_1\subset\mathbb{N}}$其中$x_n\in B$, $\delta>0$及$y\in X$使得

$$\|(T-T_n)x_n\|\geqslant\delta \text{ 且 } \lim_n(T-T_n)x_n=y,\quad \|y\|\geqslant\delta.$$ 设

$y^*\in X^*$使得$\|y\|=\langle y^*,y\rangle$. 那么

$$\|y\|=\lim_n\langle y^*,(T-T_n)x_n\rangle=\lim_n\langle(T^*-T_n^*)y^*,x_n\rangle=0,$$

这与$\|y\|\geqslant\delta$矛盾. □

命题3.8 设$S\in\mathscr{L}(X)$是紧的并且假定$S_n\xrightarrow{cc}S$. 若$T_n\xrightarrow{p}T$, 则$\|(T-T_n)S_n\|\to 0$.

证明　因为S是紧的, $\bigcup_{n=1}^{\infty}S_nB$是相对紧的. 由定理3.2即可得出结果. □

2.2.3　与离散紧收敛的关系

我们假设T_n属于类$\mathfrak{D}$. 因为$X_n\subset X$, 显然$T_n\xrightarrow{cc}T$蕴涵$T_n\xrightarrow{d-c}T$. 在例3.5中, $T_n\xrightarrow{d-c}T$但$T_n\overset{cc}{\nrightarrow}T$. 因为$T_n$是有限秩且$T$不是紧的, 由命题3.5集体紧收敛是不可能的. 于是当考虑非紧的有界算子T的逼近时, 离散紧收敛将起作用.

命题3.9 若T是紧的, T_n属于类$\mathfrak{D}$, 则$T_n\xrightarrow{d-c}T$蕴涵$T_n\xrightarrow{cc}T$.

证明　$T-T_n$是紧的; 则(3.2)蕴涵(3.1). 因而希望证明(3.3)蕴涵(3.2). 我们知道$T_n\pi_n=T_n$. 设$x_n\in B$,

$$(T-T_n)x_n=(T-T_n)\pi_nx_n+(T-T_n)(1-\pi_n)x_n.$$

因为$\{\pi_nx_n\}_{\mathbb{N}}$是$X_n$中的有界序列, 由(3.3), $\{(T-T_n)\pi_nx_n\}$是相对紧的, 再由命题3.3, $\bigcup_{n=1}^{\infty}(T-T_n)\pi_nB$是相对紧的. 由于$T$是紧的, 且$\{(1-\pi_n)x_n\}$是$X$中的有界序列, 因而$\bigcup_{n=1}^{\infty}T(1-\pi_n)B$是相对紧的. 又由于$T_n(1-\pi_n)x_n$

$=0$，这就证明$\bigcup_{n=1}^{\infty}(T-T_n)B$是相对紧的．□

于是得出当T是紧时，若T_n属于类$\mathscr{D}$，则$T_n \xrightarrow{d-c} T$蕴涵$T_n \xrightarrow{c} T$。另一方面$T_n \xrightarrow{c} T$总是蕴涵着$T_n \xrightarrow{d-c} T$．

2.3 紧投影序列的收敛性

为了在以后讨论谱投影，我们关心紧投影序列的性态．设$\{P_n\}_{\mathbb{N}}$是$\mathscr{L}(X)$中的投影序列，逐点收敛于投影P．令$M_n:=P_nX$，$M:=PX$，且设$m:=\dim M<\infty$，P是紧投影．

命题3.10 设P, P_n，（$n\in\mathbb{N}$）是投影使得$P_n \xrightarrow{p} P$，且$\dim PX<\infty$．则$\|(P-P_n)P\|\to 0$，且对于足够大的n，

$$\dim P_nX\geqslant\dim PX$$

证明 由定理3.2得$\|(P-P_n)P\|\to 0$．设$\{x_i\}_1^m$是M的基，且设$\{x_i^*\}_1^m$是M^*中的伴随基：$\langle x_i, x_j^*\rangle=\delta_{ij}$，$i, j=1, \cdots, m$．显然$\langle P_nx_i, x_j^*\rangle\to\delta_{ij}$．因此，对于足够大的$n$，$m$个向量$x_{in}=P_nx_i$在$M_n$内是无关的．$\dim P_nX\geqslant\dim PX$．□

我们给出$\dim P_nX>\dim PX$，（$n\in\mathbb{N}$）的一个例子．设$X:=l^2$具有典范基$\{e_i\}_{\mathbb{N}}$．对于$x\in X$，$P_nx=\langle x, e_1\rangle e_1+\langle x, e_n\rangle e_n$；$P_nx\to Px=\langle x, e_1\rangle e_1$；并且$\dim P_nX=2$, $\dim PX=1$．

保持M_n及M的维数，是P及P_n为谱投影的情形所需要的，除P_n逐点收敛于P外还要求另外的假设．我们假设$\dim P_nX=m$，$n=1, 2, \cdots$．对于充分大的n，m个向量$\{P_nx_i\}_1^m$无关，构成M_n的基．我们研究$M_n^*:=P_n^*X^*$中由

$$\langle P_nx_i, x_{jn}^*\rangle=\delta_{ij},\quad i, j=1, \cdots, m$$

确定的伴随基．

引理3.11 伴随基$\{x_{in}^*\}_1^m$满足$\lim_n\|x_{in}^*-P_n^*x_i^*\|=0$且$\|x_{in}^*\|\leqslant c$．

证明　对于充分大的n，$\{x^*_{in}\}_1^m$可以由$\{P^*_n x^*_i\}_1^m$经过Schmidt正交化建立，如我们现在所见。

对于$i=1$，$x^*_{1n}=\alpha_{11}^{(n)}P^*_n x^*_1$，这里

$$1=\langle x^*_{1n},P_n x_1\rangle=\alpha_{11}^{(n)}\langle x^*_1,P_n x_1\rangle.$$

因为$P_n x_1\to x_1$，我们断定当$n\to\infty$时$\alpha_{11}^{(n)}\to 1$。

对于$i=2$，$x^*_{2n}=\alpha_{21}^{(n)}P^*_n x^*_1+\alpha_{22}^{(n)}P^*_n x^*_2$，这里

$$0=\langle x^*_{2n},\ P_n x_1\rangle=\alpha_{21}^{(n)}\langle x^*_1,\ P_n x_1\rangle+\alpha_{22}^{(n)}\langle x^*_2,P_n x_1\rangle,$$

$$1=\langle x^*_{2n},\ P_n x_2\rangle=\alpha_{21}^{(n)}\langle x^*_1,\ P_n x_2\rangle+\alpha_{22}^{(n)}\langle x^*_2,\ P_n x_2\rangle.$$

解这个2×2的线性方程组，我们得到$\alpha_{22}^{(n)}\to 1$及$\alpha_{21}^{(n)}\to 0$（$n\to\infty$）。

由关于i的归纳法，$i=1,2,\cdots,m$，容易证明

$$x^*_{in}=\sum_{j=1}^{i}\alpha_{ij}^{(n)}P^*_n x^*_j$$

其中$\alpha_{ij}^{(n)}\to\delta_{ij}$，$j\leqslant i$，$i=1,\cdots,m$。所以

$$|\|x^*_{in}\|-\|P^*_n x^*_i\||\leqslant\|x^*_{in}-P^*_n x^*_i\|\to 0.$$

因为$\|P_n\|=\|P^*_n\|\leqslant c$，我们得到$\|x^*_{in}\|<c'$．□

引理3.12　设M，M_n是X的闭子空间使得$\dim M<\infty$，并且对任何有界序列$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$，$x_n\in M_n$，存在子序列$\{x_n\}_{N_1\subset\mathbb{N}}$收敛于$x\in M$，则对于充分大的$n$，$\dim M_n\leqslant\dim M$。

证明　假设对于$n\in N_1$，N_1是$\mathbb{N}$的无限子集，$\dim M_n\geqslant m$，这里m是给定的正整数。由推论2.3，对于$n\in N_1$，$i=1,\cdots,m$及对于α_j的任何选择，存在$x_{n,i}\in M_n$使得$\|x_{n,i}\|=1$，$\|x_{n,i}-\Sigma_{j=1}^{i-1}\alpha_j x_{n,j}\|\geqslant 1$。对于$n\in N_2\subset N_1$，$i=1,\cdots,m$，存在子序列$x_{n,i}\to x_i\in M$使得$\|x_i\|=1$及$\|x_i-$

$\|\Sigma_{j=1}^{i-1}\alpha_j x_j\|\geqslant 1$. 因而这$m$个向量$\{x_i\}$是无关的，并且$\dim M\geqslant m$. 所以，如果$\dim M<m$，则对于充分大的$n$, $\dim M_n<m$. 等价地，$\dim M_n\leqslant\dim M$. □

现在，我们能够证明下面的基本属性：

命题3.13 (Anselone) 对于投影P及P_n使得P是紧的，下面是等价的：

(i) $P_n\xrightarrow{p}P$且对于充分大的n，$\dim P_nX=\dim PX<\infty$；

(ii) $P_n\xrightarrow{cc}P$.

证明 我们首先证明 (i) 蕴涵 (ii)．因为对$n\in\mathbb{N}$，P_n-P是紧的，$P_n\xrightarrow{cc}P$，当且仅当对于B中的任何序列$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$，$\{P_nx_n\}_{\mathbb{N}}$是B中的相对紧序列. 设N_1是$\mathbb{N}$的任意一个无限集. 我们希望证明$\{P_nx_n\}_{N_1}$有收敛子序列. 在伴随基$\{P_nx_i\}_1^m$及$\{x_{in}^*\}_1^m$下，$P_nx_n=\Sigma_{i=1}^m\beta_{in}P_nx_i$，其中$\beta_{in}=\langle x_n,\ x_{in}^*\rangle$. 由引理3.11，$\sup_n\|x_{in}^*\|<\infty$及$|\beta_{in}|\leqslant c$, $i=1,\cdots,m$，则$y(n)=\Sigma_{i=1}^m\beta_{in}x_i$是$M$中的有界序列. 存在收敛子序列$y(n)\to y$，且对于$n\in N_2\subset N_1$，$P_ny(n)\to y$.

相反地，若$P_n\xrightarrow{cc}P$则由命题3.10得出对于充分大的n，$\dim P_nX\geqslant\dim PX$. 再由引理3.12以$M=PX$，$M_n=P_nX$得出对于充分大的$n$，$\dim P_nX\leqslant\dim PX$. □

命题3.14 设P及P_n是投影且使$\dim PX<\infty$. 则$P_n\xrightarrow{cc}P$蕴涵着$\|(P-P_n)P_n\|\to 0$及$\Theta(PX,P_nX)\to 0$.

证明 这是命题3.8，3.10，及2.13的结果. □

命题3.15 若P及P_n是Hilbert空间中正交投影$\dim PX<\infty$，则$\|P-P_n\|\to 0$，当且仅当$P_n\xrightarrow{cc}P$.

关于T与T_n的假设	$\mathscr{L}(X)$中收敛性次序
$T, T_n \in \mathscr{L}(X)$	$\|\cdot\| \Rightarrow c$, $cc \Rightarrow c$; $c \Rightarrow d\text{-}c \Rightarrow p$
$T - T_n$ 紧	$\|\cdot\| \Rightarrow cc \Leftrightarrow c \Rightarrow d\text{-}c \Rightarrow p$
T, T_n 紧	$\|\cdot\| \Rightarrow cc \Leftrightarrow c \Leftrightarrow d\text{-}c \Rightarrow p$
T, T_n 自伴随	$\|\cdot\| \Leftrightarrow cc \Rightarrow c \Rightarrow d\text{-}c \Rightarrow p$
$\dim T_n X = \dim TX < \infty$	$\|\cdot\| \Rightarrow cc \Leftrightarrow c \Leftrightarrow d\text{-}c \Leftrightarrow p$

表 3.1 $\mathscr{L}(X)$中的收敛性

证明 显然可从命题3.6及命题3.7得出。 □

3. 概述

收敛性$T_n \to T$的五个概念，即 P（逐点收敛），c（紧收敛），d－c（离散紧收敛），cc（集体紧收敛），及$\|\cdot\|$（一致收敛）依照关于T及T_n的假设排序，如表 3.1 所示。当考虑离散紧收敛时，假设T_n属于类$\mathscr{D}$。第一节所定义的收敛性的例子将用第四章中的实际方法给出。

由Sobolev(1956) 所引入的集体紧收敛被Anselone(1971) 广泛使用于积分算子。Vainikko (1969a)引入离散紧收敛，并应用于有限差分法.在离散逼近论的有关内容中（参阅附录）定义$\mathscr{T}_n$的空间X_n不是X的子空间，离散紧收敛性首先由Stummel (1970) 定义，他在一般的抽象框架中证明了命题3.13 (Stummel, 1971,PP.253—254)，现在形式的命题 3.13 乃是由Anselone (1971) 证明的。

紧收敛是在Goldberg（1974）中定义的．在 Anselone 及 Ansorge（1979）中已推广到非线性算子及积分方程的应用．对上述收敛性的拓朴性质感兴趣的读者可以在Anselone和 Ansorge（1979）中查阅前四种概念，在Stummel（1970）中查阅第五种概念．

4. $\mathscr{C}(X)$ 中算子序列的收敛性

设T_n，$n=1,2,\cdots$，是在$\mathscr{C}(X)$内的算子序列，按照下面定义之一收敛于$T\in\mathscr{C}(X)$．我们假设$\mathrm{Dom}T_n=\mathrm{Dom}T=D$，$n=1,2,\cdots$．

（a）逐点收敛 $T_n\xrightarrow{P}T$，当且仅当对于D内的所有x，当$n\to\infty$时，$T_nx\to Tx$．

（b）稳定收敛 $T_n\xrightarrow{S}T$，当且仅当

（i）$T_n\xrightarrow{P}T$，且

（ii）满足下面稳定性条件：

$$\exists M>0,\ \exists N:\ 对于 n>N,\ T_n^{-1}\in\mathscr{L}(X) 且 \|T_n^{-1}\|\leqslant M. \tag{3.4}$$

（c）正则收敛 $T_n\xrightarrow{r}T$，当且仅当

（i）$T_n\xrightarrow{P}T$，且

（ii）满足下面正则条件：

D中任何使得$T_nx_n\to y$，$n\in N_1\subset\mathbb{N}$的有界序列$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$本身满足$x_n\to x$，$n\in N_2\subset N_1$，且$Tx=y$．（3.5）

注意如果T及T_n有界时，上述定义也适用；在这种情形下$\mathrm{Dom}T_n=\mathrm{Dom}T=D\equiv X$．(3.5)中的条件$Tx=y$是前者的结果．

例3.6 在$X=L^2(0,1)$内考虑例2.24（第二章）的算子T．T是自伴算子具有谱$\sigma(T)=[-1,1]$．设π_n是在$X_n=\{e_1,\cdots,e_n\}$上的正交投影，这里$e_i(t)=\sqrt{2}\sin i\pi t$．$\{e_i\}_1^\infty$是

$L^2(0,1)$ 的标准正交基.我们考虑$T_n=\pi_n T\pi_n$；显然$T_n \xrightarrow{p} T$，当$n\to\infty$时。在X_n的已选定的基下，用$n\times n$矩阵A_n表示限制$T_{n|X_n}$，矩阵的元素确定为$a_{i,i+1}=a_{i+1,i}=\frac{1}{2}$，$i=1,\cdots,n-1$，其余$a_{ij}=(\cos\pi t\, e_j(t),\ e_i(t))=0$除零（如果可能的话）以外，$A_n$及$T_n$有相同的谱，且

$$\sigma(A_n)=\left\{\cos\pi\frac{i}{n+1},\ i=1,2,\cdots,n\right\}\subset\sigma(T).$$

于是

$$\|(T_n-2)^{-1}\|=\frac{1}{\operatorname{dist}(2,\sigma(A_n))}\leqslant 1.$$

所以$T_n-2\xrightarrow{s}T-2$，$n\to\infty$。这表明$T_n'=\pi_n T$也满足

$T_n'-2\xrightarrow{s}T-2.$

例3.7 在前面的例中，$T_n-2\xrightarrow{r}T-2$。的确，设$\{x_n\}$是X中的有界序列使得$(T_n-2)x_n\to y$。2在$\rho(T)$内。我们令$x:=(T-2)^{-1}y$。则

$x_n-x=(T_n-2)^{-1}[(T_n-2)x_n-y+(T-2)x-(T_n-2)x]$表明$x_n\to x$且$(T-2)x=y$。

例3.8 我们假设T及T_n是有界的，且$\|T_n-T\|\to 0$。对于$\rho(T)$内的任何固定的z，我们写出

$T_n-z=T-z-(T-T_n)=[1-(T-T_n)R(z)](T-z).$

对于任意$\varepsilon>0$，存在N使得对于$n>N$，$\|T-T_n\|<\varepsilon$。于是对于$\varepsilon<1/\|R(z)\|$，有$\|(T-T_n)R(z))\|<1$并且关于$[1-(T-T_n)R(z)]^{-1}$的Neumann级数展开式在$\mathscr{L}(X)$中收敛.由定理2.7，

$\|[1-(T-T_n)R(z)]^{-1}\| \leqslant [1-\|(T-T_n)R(z)\|]^{-1} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon\|R(z)\|}$. 由此得知级数

$$R_n(z):=(T_n-z)^{-1}=R(z)\sum_{k=0}^{\infty}[(T-T_n)R(z)]^k \tag{3.6}$$

也在$\mathscr{L}(X)$中收敛。我们容易断定$\|R_n(z)\|$关于n一致有界，$T_n-z\xrightarrow{s}T-z$，且对于$\rho(T)$内任何固定的z有$\|R_n(z)-R(z)\|\to 0$。

例3.9 我们现在假设T及T_n有界且$T_n\xrightarrow{cc}T$。对于$\rho(T)$内任何固定的z，当$n\to\infty$时有

$$r_\sigma[(T-T_n)R(z)]\leqslant\|[(T-T_n)R(z)]^2\|^{1/2}\to 0 .$$

级数(3.6)在$\mathscr{L}(X)$中收敛，并且$R_n(z)-R(z)=R(z)[1+(T-T_n)R(z)](T-T_n)R(z)\sum_{k=0}^{\infty}[(T-T_n)R(z)]^{2k}$。这表明了$T_n-z\xrightarrow{s}T-z$；由应用于$T$及$T_n$的第二预解方程(2.5)得知$R_n(z)\xrightarrow{cc}R(z)$。

可以考虑其它类型的收敛。当T及T_n是闭的，在$\mathscr{C}(X)$中$T_n\to T$可用对于$\rho(T)$中的某个z的预解式$R_n(z)\to R(z)$在$\mathscr{L}(X)$中的收敛来确定，假设对于充分大的n，$z\in\rho(T_n)$。例如对于某个$z\in\rho(T)$，$\|R_n(z)-R(z)\|\to 0$或$R_n(z)\xrightarrow{cc}R(z)$。间隙收敛由$\Theta(T_n, T)\to 0$定义，这里

$$\Theta(T,U):=\Theta(G(T), G(U))$$

是算子T及U的图象$G(T)$及$G(U)$所组成的$X\times X$的闭子空

间之间的间隙。

习题

3.5　设T及$T_n \in \mathscr{C}(X)$是可逆的。证明：$\Theta(T, T_n) \to 0$，当且仅当

$$\|T_n^{-1} - T^{-1}\| \to 0 .$$

3.6　设T及T_n有界。证明对$\|T_n - T\| \to 0$（或$T_n \xrightarrow{cc} T$）的必要条件是对于每个$z \in \rho(T)$，对于充分大的n，$z \in \rho(T_n)$有$\|R_n(z) - R(z)\| \to 0$（或$R_n(z) \xrightarrow{cc} R(z)$），而对于某个$z \in \rho(T)$它却是充分的。

3.7　证明若$T_n \xrightarrow{s} T$，则$T^{-1} \in \mathscr{L}(X)$。

3.8　若$T_n \xrightarrow{s} T$，证明对所有的z，使得$|z| < 1/M$，这里M是对于充分大的n，由$\|T_n^{-1}\| \leqslant M$定义，有$T_n - z \xrightarrow{s} T - z$。

5.　$\mathscr{C}(X)$中收敛的性质

5.1　关于稳定收敛

对于$\rho(T)$内任何已知的z，我们考虑X内的适定方程

$$(T - z)x = f, \quad x \in D. \tag{3.7}$$

在X内，它由

$$(T_n - z)x_n = f, \quad x_n \in D. \tag{3.8}$$

来逼近。显然$x = R(z)f$及$x_n = R_n(z)f$。

引理3.16　对所有$z \in \rho(T)$下述命题是等价的：

(i)　　$T_n - z \xrightarrow{s} T - z$，

(ii)　　$R_n(z) \xrightarrow{p} R(z)$　且　$T_n \xrightarrow{p} T$.

证明　由等式

$$R_n(z)-R(z)=R_n(z)(T-T_n)R(z),$$

可知这是显然的。 □

显然从上述特征可知稳定收敛的重要性，因为对于X内的任何右边f，$x_n=R_n(z)f$收敛于$x=R(z)f$.用经典的说法称：在$\rho(T)$内已知的z处，T_n是T的稳定逼近，当且仅当$T_n-z\xrightarrow{s}T-z$．另一方面$T_n-z\xrightarrow{s}T-z$表明$z\in\rho(T)$（参阅习题3.7）．因而求T在z处的稳定逼近是一种构造性的方式，首先证明方程（3.7）具有唯一解x，其次用x_n逼近x．

5.2 关于正则收敛

我们证明下面的特性：

命题3.17 对于$\rho(T)$内的所有z，下述命题是等价的：

(i) $T_n-z\xrightarrow{r}T-z$,

(ii) $T_n-z\xrightarrow{s}T-z$.

证明 设z在$\rho(T)$内固定。我们首先考察直接蕴涵关系。T_n-z的稳定性可以写为

$\|(T_n-z)x_n\|\geqslant M^{-1}(z)\|x_n\|$ 对于$x_n\in D, n>N(z)$.我们假设这不成立：存在一个序列$\{x_n\}_{N_1\subset N}$，$x_n\in D$，$\|x_n\|=1$使得$\|(T_n-z)x_n\|\to 0$．由于正则性，$x_n\to x$，$x\in D$，$\|x\|=1$对于$n\in N_2\subset N_1$，且$(T-z)x=0$，这与$z\in\rho(T)$矛盾．

反之，如果$(T_n-z)x_n\to y$对于$x_n\in D$，令$x:=(T-z)^{-1}y\in D$；那么

$$x_n-x=(T_n-z)^{-1}[(T_n-z)x_n-y+(T-z)x-(T_n-z)x]$$

并且$x_n\to x$．这表明$T_n-z\xrightarrow{r}T-z$．□

对于在X内方程（3.8）是方程（3.7）的逼近，使$x_n\to x$，其充分必要条件是$T_n-z\xrightarrow{r}T-z$．这个条件比稳定性条件

(ii) 容易验证. 奇怪的是在证明实用的逼近方法的收敛性时却比 (ii) 用得更少.

习题

3.9 证明如果$z_n \to z$及$T_n - z \xrightarrow{r} T - z$，那么$T_n - z_n \xrightarrow{r} T - z$. 如果$z \neq 0$及$T_n \xrightarrow{r} T$，证明$z_n T_n \xrightarrow{r} zT$.

3.10 我们假设在$\mathscr{L}(X)$中$T_n \xrightarrow{r} T$及$U_n \xrightarrow{r} U$. 导出$T_n U_n \xrightarrow{r} TU$.

3.11 对于$z \neq z_0 \in \rho(T)$，令$t = 1/(z - z_0)$，且对于$\lambda \in Q\sigma(T)$，$\nu = 1/(\lambda - z_0)$. 对于T，$T_n \in \mathscr{C}(X)$，及$z \in \rho(T)$，证明下面四种蕴涵关系.

(i)

$$\left.\begin{array}{r} T_n - z \xrightarrow{s} T - z \\ R_n(z_0) \xrightarrow{p} R(z_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow R_n(z_0) - t \xrightarrow{s} R(z_0) - t,$$

(ii)

$$\left.\begin{array}{r} R_n(z_0) - t \xrightarrow{s} R(z_0) - t \\ T_n \xrightarrow{p} T \end{array}\right\} \Longrightarrow T_n - z \xrightarrow{s} T - z,$$

(iii)

$$\left.\begin{array}{r} T_n - z \xrightarrow{r} T - z \\ R_n(z_0) \xrightarrow{p} R(z_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow R_n(z_0) - t \xrightarrow{r} R(z_0) - t,$$

(iV)

$$\left.\begin{array}{r} R_n(z_0) - t \xrightarrow{r} R(z_0) - t \\ T_n \xrightarrow{p} T \end{array}\right\} \Longrightarrow T_n - z \xrightarrow{r} T - z.$$

当$z = \lambda$及$t = \nu$时，讨论 (iii) 及 (iV).

我们对加于T及T_n的条件感兴趣，这些条件对于保证$T_n - z \xrightarrow{r} T - z$ (对$\rho(T)$内的任何z) 是充分的.

命题3.18 若下面三性质之一成立:

(i) $\|T_n - T\| \to 0$；

(ii) $T_n \xrightarrow{cc} T$；

(iii) $T_n \xrightarrow{c} T$，

则对于$\rho(T)$中的任何z，有$T_n - z \xrightarrow{r} T - z$成立。

证明　在第2节中已经证明（i）或（ii）蕴涵（iii）．因而我们假设$T_n \xrightarrow{c} T$并且证明对于$\rho(T)$内的任何z有$T_n - z \xrightarrow{r} T - z$。令$x_n \in B$使得$(T_n - z)x_n \to y$。于是对于$n \in N_1 \subset \mathbb{N}$，$(T - T_n)x_n \to u$且$(T - z)x_n \to y + u$，$n \in N_1$。因而得知$\{x_n\}_{N_1}$的收敛性，因为从习题3.4知$z \in \rho(T)$，$x_n \to x$及$u = 0$．所以$(T - z)x = y$。 □

设T是闭的，定义域为D。对于图象范数，D成为Banach空间$\hat{D}$。且T是$\mathscr{L}(\hat{D}, X)$内的有界算子。令i是$\hat{D}$到X内的单射。如果i是紧的，则可知T在$\mathscr{C}(X)$内是反紧的。

命题3.19　如果单射$i: \hat{D} \to X$是紧的，则在$\mathscr{L}(\hat{D}, X)$内$T_n \xrightarrow{r} T$蕴涵对于所有$z \in \mathbb{C}$，$T_n - z \xrightarrow{r} T - z$。

证明　令$\{x_n\}$是$\hat{D}$内的有界序列，使得对于$z \in \mathbb{C}$，$\{(T_n - z)x_n\}$在X内相对紧。i的紧性蕴涵有$\{T_n x_n\}$也在X内相对紧；因为在$\mathscr{L}(\hat{D}, X)$内$T_n \xrightarrow{r} T$，$\{x_n\}$在$\hat{D}$内相对紧。这就证明了$T_n - z \xrightarrow{r} T - z$。 □

5.3　T_n属于类$\mathscr{D}$

我们考虑类$\mathscr{D}$的一族逼近算子T_n，这在实际中是一种很普通的情形。我们定义离散稳定（或离散正则）收敛概念．如同离散紧收敛推广到紧收敛一样推广了稳定（或正则）收敛．我们回顾$T_n = \mathscr{T}_n \pi_n$及$D_n = \pi_n D$：

（a）离散稳定收敛 $T_n \xrightarrow{d-s} T$，当且仅当

（i）$T_n \xrightarrow{p} T$，且

（ii）满足下面稳定性条件

$\exists M > 0$，$\exists N$：对于 $n > N$：$\|T_n x_n\| \geqslant M^{-1}\|x_n\|$

（3.9）

对于 D_n 内的所有 x_n。

（b）离散正则收敛 $T_n \xrightarrow{d-r} T$，当且仅当

（i）$T_n \xrightarrow{p} T$，且

（ii）满足下面正则条件：

任何序列 $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$，$x_n \in D_n$，$\|x_n\| \leqslant c$，并且当 $n \in N_1 \subset \mathbb{N}$ 时，使得 $T_n x_n \to y$，它自身则使得对 $n \in N_2 \subset N_1$，$x_n \to x \in D$，且 $Tx = y$。　　（3.10）

这些概念在通过

$$(\mathscr{T}_n - z)x_n = \pi_n f,\ x_n \in D_n \tag{3.11}$$

来研究方程（3.7）在X_n中的离散逼近时是有用的。设1_n是X_n的恒等算子；我们写$z1_n = z$，并且设在 X_n内的逆算子$\mathscr{R}_n(z) := (\mathscr{T}_n - z)^{-1}$。$x_n = \mathscr{R}_n(z)\pi_n f$ 收敛于 $x = R(z)f$，当且仅当

$T_n - z\pi_n \xrightarrow{d-s} T - z$，正如可从等式

$$\pi_n R(z) - \mathscr{R}_n(z)\pi_n = \mathscr{R}_n(z)(\pi_n T - \mathscr{T}_n \pi_n)R(z)$$

得知。容易证明下面属性，它是命题3.17的离散类似。

命题3.20　对于 $\rho(T)$内的 z，下述命题是等价的：

（i）$T_n - z\pi_n \xrightarrow{d-r} T - z$，和

(ii) $T_n - z\pi_n \xrightarrow{d-s} T - z$.

证明　它容易由命题3.17的证明得到，这里的$\{x_n\}$属于D_n. □

正则条件（i）又比稳定条件（ii）容易处理。

例3.10　设1_n: $X_n \to X_n$是X_n上的恒等算子，且设π_n是X_n上的投影使得$\pi_n \xrightarrow{p} 1$. $\pi_n = 1_n \pi_n$是类$\mathscr{D}$的算子. $\pi_n \xrightarrow{d-s} 1$, $\pi_n \xrightarrow{d-r} 1$.

例3.11　正则收敛概念起源于Polskii (1962) 及其后继者通过在H内有限维子空间E_n上投影研究关于方程$Lx = f$的可解—可逼近性工作，这里L是Hilbert空间H上的有界算子，使得$0 \in \rho(L)$. 令π_n是E_n上的正交投影并假设$\pi_n \xrightarrow{p} 1$. 在E_n内的逼近方程取为

$$\pi_n L x_n = \pi_n f, \quad x_n \in E_n.$$

这方程对应于离散逼近$\pi_n L_{\restriction E_n}$及它的属于类$\mathscr{D}$的延拓$L_n := \pi_n L \pi_n$.

由命题3.20, $x_n \to x$, 当且仅当$L_n \xrightarrow{d-r} L$. 由Polskii给出的表征是: $x_n \to x$, 当且仅当$\sup_n \Theta(LE_n, E_n) < 1$. 因而说$L$是正则算子 (Vainikko和Umanskii, 1968). Vainikko (1965a) 指出使得$0 \in \rho(L)$的$L \in \mathscr{L}(H)$是正则的，当且仅当它可以表示为$aL = 1 + S + K$, 其中a是非零常数，$\|S\| < 1$, 且K是紧的。

我们将在第四章证明如果$L = 1 + K$, K是紧的，$1 \in \rho(K)$, 则$\sup_n \Theta(LE_n, E_n) < 1$成立 (参阅Krasnoselskii等, 1972).

例3.12　在例3.6中所确定的算子$T_n = \pi_n T \pi_n$属于类$\mathscr{D}$,

显然$T_n-2\pi_n\xrightarrow{d-s}T-2$并且$T_n-2\xrightarrow{s}T-2$。这是下面引理的特殊情形。

引理3.21 若T_n属于类$\mathfrak{D}$，则对于$\rho(T)$内任何不等于零的z，下述命题是等价的：

(i) $T_n-z\xrightarrow{s}T-z$，与

(ii) $T_n-z\pi_n\xrightarrow{d-s}T-z$。

证明 考虑方程$(T_n-z)x=y$，$z\in\rho(T)$，$y\in X$。由此得出 $\pi_n x=(\mathscr{T}_n-z)^{-1}\pi_n y$，及$(1-\pi_n)x=-(1/z)(1-\pi_n)y$。所以由于$R_n(z)=(\mathscr{T}_n-z)^{-1}\pi_n-(1/z)(1-\pi_n)$对于$0\neq z\in\rho(T)$，$x=R_n(z)y$是确定的。对于$z\neq 0$，若$(\mathscr{T}_n-z)^{-1}$一致有界，则$R_n(z)$也是如此。对于$z=0$，当$T_n$属于类$\mathfrak{D}$，注意$T_n\xrightarrow{s}T$是不确定。

习题

3.12 证明若T_n属于类$\mathfrak{D}$，则对于$\rho(T)$内任何不等于零的z，$T_n-z\pi_n\xrightarrow{d-r}T-z$等价于$T_n-z\xrightarrow{r}T-z$。

3.13 证明若T_n属于类$\mathfrak{D}$，则对于$\rho(T)$内的任何z，$T_n\xrightarrow{d-c}T$蕴涵$T_n-z\pi_n\xrightarrow{d-r}T-z$。

3.14 设单射$i:\hat{D}\to X$是紧的，证明对于$T,T_n\in\mathscr{L}(\hat{D},X)$及类$\mathfrak{D}$的$T_n$，则对于$\mathbb{C}$内的所有$z$，$T_n\xrightarrow{d-r}T$蕴涵$T_n-z\pi_n\xrightarrow{d-r}T-z$。

3.15 如果稳定性条件(3.9)成立，证明$T_nx_n=y_n$，$\|y_n\|<C$的求解问题对n一致稳定。这意味着摄动方程

$$(T_n+\Delta T_n)(x_n+\Delta x_n)=y_n+\Delta y_n$$

当 $\|\Delta T_n\| \leqslant \varepsilon$，$\|\Delta y_n\| \leqslant \alpha$ 时对 $\varepsilon < 1/M$ 是可解的，并且存在 β 使得 $\|\Delta x\| \leqslant \beta$.

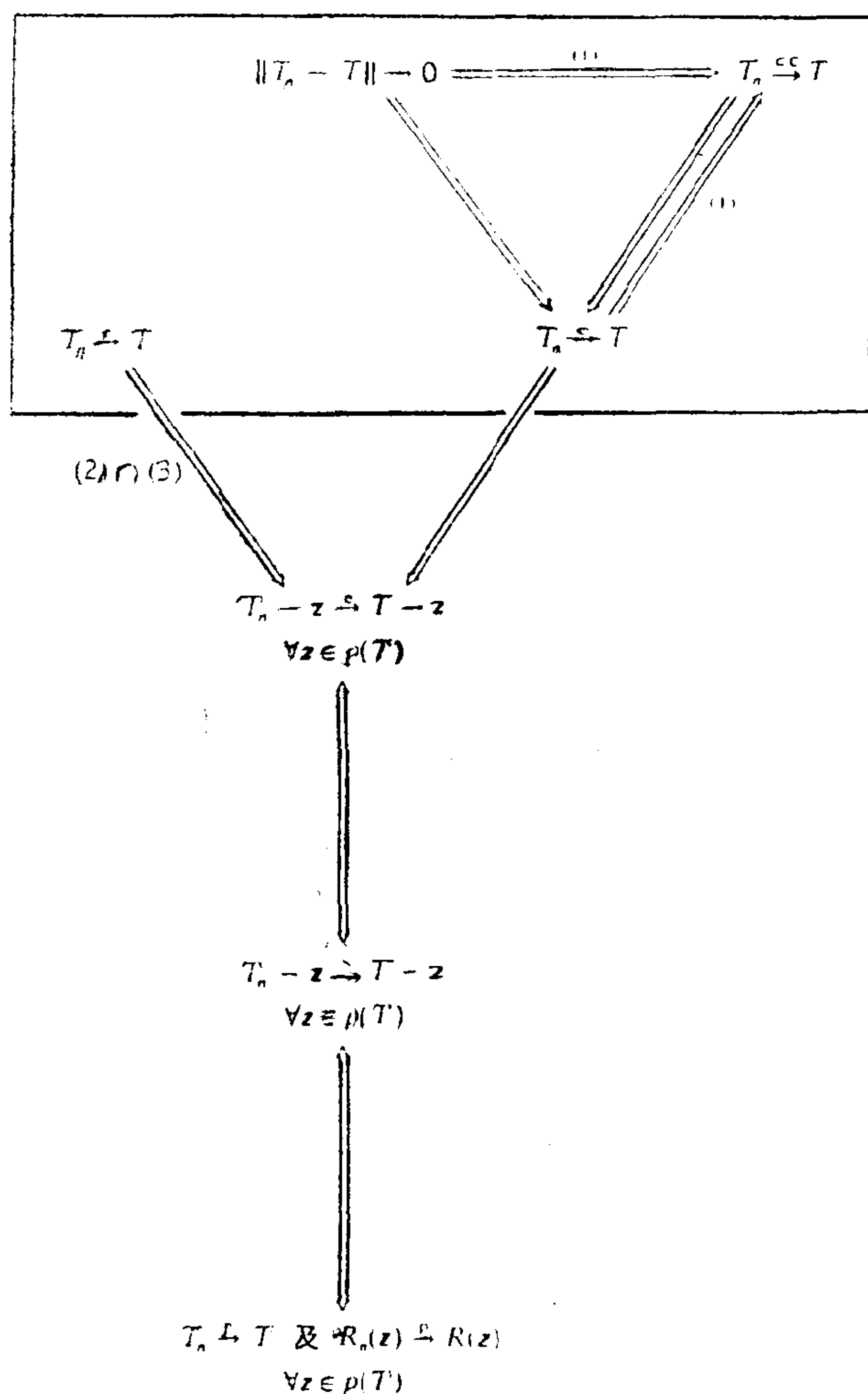
6. 概述

收敛性之间的各种联系在表3.2及表3.3中作出总结。在方框内的条件中 z 不出现。一些特性的表述可用不同的形式给出（Grigorieff，1973；Vainikko，1978a），但所选择的形式对于第五章所做出的谱收敛研究最直接可用，那里谱投影 P 是预解式 $R(z)$ 在 $\Gamma \subset \rho(T)$ 上关于 z 的积分来确定的。

引理3.16发现已有很长时间了，并且稳定收敛已或多或少明显地使用于解积分方程或微分方程。在离散逼近理论的内容中，离散正则收敛在 Karma（1971）的论文及在 Grigorieff（1973）中作了介绍。作为一类特殊的投影法推广了 Polskii（1962），Browder（1967）及Petryshyn（1968）的工作。离散正则收敛的判别准则在 Grigorieff（1973）中给出。在 $\mathscr{L}(\hat{D}, X)$ 内算子的离散稳定收敛及离散正则收敛连同应用于非线性算子的详尽的研究是在 Vainikko（1978a）中。正则收敛的概念，由Anselone及Ansorge（1979）为非线性连续算子给出，对线性算子简化为上述定义．离散正则收敛的概念已成功应用于微分方程的有限差分法（参阅 Grigorieff，1970a，b，1972，1973，1975a，b；Grigorieff 和 Jeggle，1973；Vainikko，1975，1976 a，b，1977 a，b，1978 a，b；Vainikko 和 karma 1974 a，b）．习题 3.14 所给出的性质由 Grigorieff，Vainikko实质上已应用于偏微分方程，此外他们的同事证明了有限差分格式的离散稳定性。用离散正则性来表征离散稳定性见 Grigorieff（1973）．

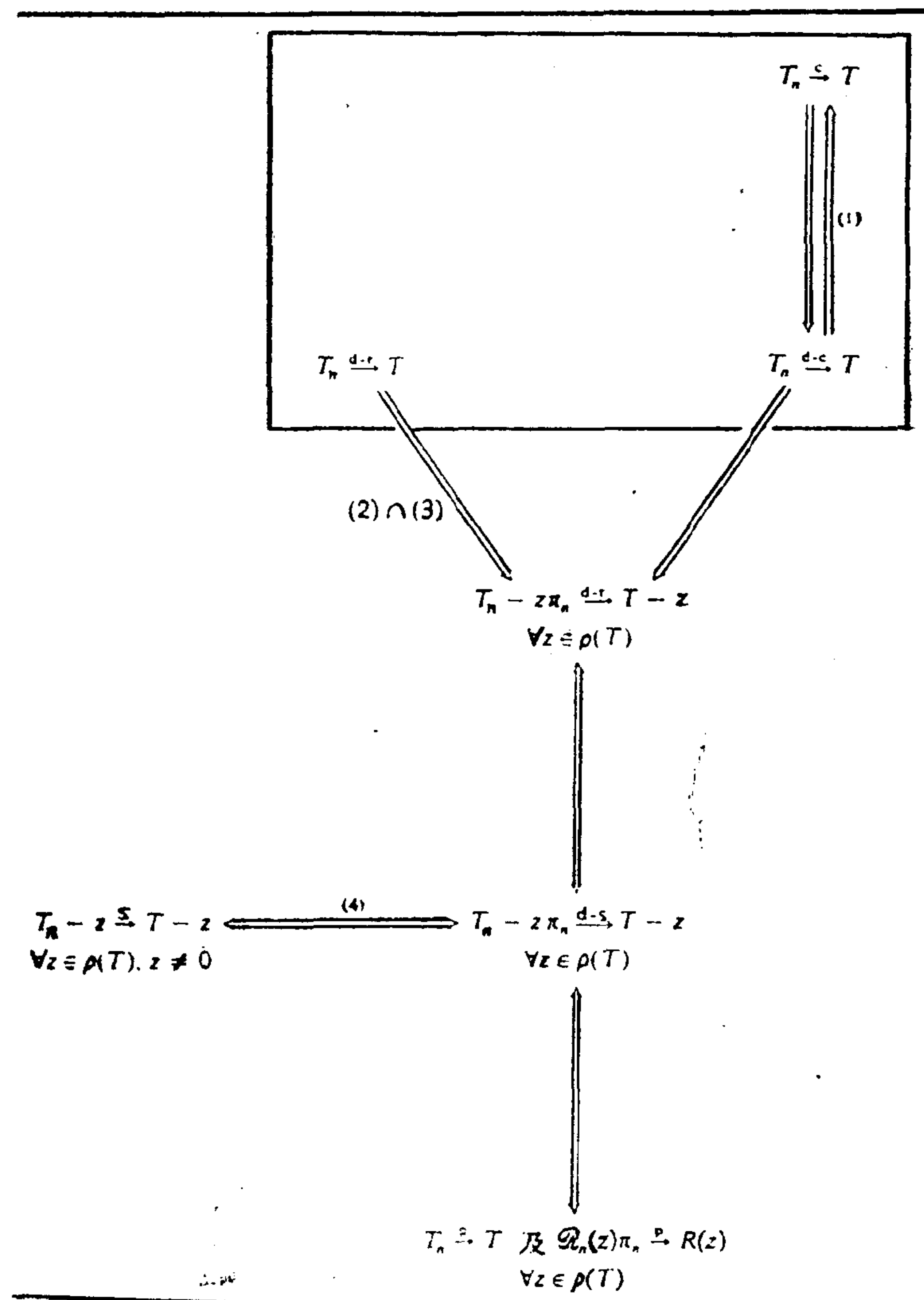
间隙收敛 $\Theta(T_n, T) \to 0$，在Descloux 等（1981）中应用于用有限元法逼近具有非紧预解式的闭算子。

表 3.2　在$\rho(T)$[a]中的稳定性



[a] （1）当T及T_n是紧时成立；（2）当T是反紧时成立；（3）在$\mathscr{L}(\widehat{D}, X)$中成立。

表 3.3 在$\rho(T)$[a] 中的稳定性



[a] （1）当T和T_n紧时成立；（2）当T反紧时成立；（3）在$\mathscr{L}(\widehat{D},X)$中成立；（4）当z非零时成立

B 解析摄动论

设T是定义域为D的闭算子.我们假设$T=T'-H$. T是摄动H作用于T'的结果，这里H及T'都是闭算子其定义域为D.我们的问题是求解

$$(T-z)x=f \quad 或 \quad T\varphi=\lambda\varphi。$$

但是我们仅知道如何解用T'代替T的方程。这是十分常见的情形。我们将主要关心两个基本例子：

（a）T'是T的数值逼近T_n；所以$T=T_n-(T_n-T)$；

（b）T'是T的部分$\widetilde{T}$，由$\widetilde{T}:=QTQ+(1-Q)T(1-Q)$所定义，这里$Q$是给定的投影，并且$T=\widetilde{T}+\widetilde{H}$，其中$\widetilde{H}:=QT(1-Q)+(1-Q)TQ$。

为了联系T及T'，我们考虑依赖于复参数t的算子族$T(t)=T'-tH$。显然$T(1)=T$及$T(0)=T'$。考虑问题

$$(T(t)-z)x(t)=f,$$

$$T(t)\varphi(t)=\lambda(t)\varphi(t).$$

我们希望知道$x(t)$，$\lambda(t)$，及$\varphi(t)$是否为以零为中心并包含$t=1$的圆盘内的解析函数。当回答肯定时，解x，λ，及φ将分别从方程

$$(T'-z)x'=f \tag{3.12}$$

$$T'\varphi'=\lambda'\varphi', \tag{3.13}$$

的解x'，λ'及φ'迭代算出。设Γ是围绕λ'的封闭正向Jordan曲线，λ'是T'的重数为m的孤立本征值其陡度为l。形式地定义

$$R(t,z)=(T(t)-z)^{-1} \qquad 对\ z\in\rho(T')$$

$$P(t)=\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma R(t,z)dz \quad 对\ \Gamma\subset\rho(T')$$

$$\hat{\lambda}(t)=(1/m)\mathrm{tr}T(t)P(t).$$

我们研究这些函数关于 t 的解析性。

7. R(t, z), P(t), 及 $\hat{\lambda}$(t) 的解析性

7.1 $R(t,z)$ 的解析性

设已知 z 在$\rho(T')$ 内。$R'(z):=(T'-z)^{-1}$，$TR'(z)$ 及 $T'R'(z)$ 都是闭算子，定义域为X。由闭图象定理，如同 $HR'(z)$ 那样，它们都是有界的。我们定义

$$r'_z:=r_\sigma[HR'(z)],$$

$$\delta'_z:=\{t\in\mathbb{C};\ |t|<1/r'_z\}.$$

引理3.22 对于δ'_z内的所有 t，$T(t)$ 是闭的，定义域为 D。

证明 从等式

$$T(t)-z=T'-z-tH=[1-tHR'(z)](T'-z)$$

形式上得出$R(t,z)$ 的 Neumann 级数展开式：

$$R(t,z)=R'(z)\sum_{k=0}^{\infty}t^k[HR'(z)]^k. \qquad (3.14)$$

(3.14) 中的级数在$\mathscr{L}(X)$ 内收敛，当且仅当 $r_\sigma[tHR'(z)]<1$，由命题2.25，即当且仅当$|t|<1/r'_z$。$T(t)-z$，有值域为D的有界逆算子，且本身是闭的，定义域为D。□

命题3.23 对于δ'_z内的所有 t，$R(t,z)$ 是解析的，并且它的Neumann 级数展开式 (3.14) 在$\mathscr{L}(X)$ 内收敛。

证明 由引理3.22的证明，这是显然的。□

推论3.24 对δ'_z内的所有 t，$x(t)$是解析的。

证明 $x(t)=R(t,z)f=\Sigma_{k=0}^{\infty}t^k y_k$，其中 $y_k:=R'(z)[HR'(z)]^k f$，$k\geqslant 0$。□

7.2 $P(t)$ 及 $\hat{\lambda}(t)$ 的解析性

设 Γ 是围绕 λ' 的闭 Jordan 曲线，λ' 是 T' 的有有限代数重数 m 的孤立本征值。我们知道谱半径 $r_\sigma(HR'(z))$ 在 $\rho(T')$ 内是上半连续的（命题 2.20）。因而它在紧集 $\Gamma\subset\rho(T')$ 上达到它的最大值。定义

$$r'_\Gamma:=\max_{z\in\Gamma} r_\sigma[HR'(z)],$$

$$\delta'_\Gamma:=\{t\in\mathbb{C};\ |t|<1/r'_\Gamma\}.$$

那么对于所有 $z\in\Gamma$，$r'_z\leqslant r'_\Gamma$ 及 $\delta'_z\supset\delta'_\Gamma$。

习题

3.16 证明 δ'_Γ 是 $\mathbb{C}$ 内中心在 0 的最大开圆盘，使得对 δ'_Γ 内的任何 t，$T(t)$ 是闭的，其定义域为 D，并且 Γ 位于 $\rho(T(t))$ 内。

3.17 证明在 $\mathscr{L}(\hat{D},X)$ 内有下述特性（Lemordant）：集合

$$\{H\in\mathscr{L}(\hat{D},X);\ \max_{z\in\Gamma} r_\sigma[HR'(z)]<1\}$$

是 $\mathscr{L}(\hat{D},X)$ 内最大平衡集 W 使得对于 W 内的所有 H，$T'-H\in\mathscr{C}(X)$ 及 $\Gamma\subset\rho(T'-H)$。

命题3.25 $P(t)$ 及 $\hat{\lambda}(t)$ 是 δ'_Γ 内 t 的解析函数。

证明 $P(t)$ 在 δ'_Γ 内是明确定义的，我们来证明它在 δ'_Γ 内固定的 t_0 附近的解析性。若 $|t-t_0|<(\max_{z\in\Gamma}\|HR(t_0,z)\|)^{-1}$，级数

$$R(t,z)=R(t_0,z)\sum_{k=0}^{\infty}(t-t_0)^k[HR(t_0,z)]^k$$

在 Γ 上关于 z 一致收敛。由在 Γ 上积分，这就证明了 $P(t)$ 在

δ_Γ'内的任何一点t_0附近解析。

因为$P(t)$是在δ_Γ'内t的连续函数，由推论2.15它的值域$P(t)X$的维数是常数。这证明$\dim P(t)X = m$. $T(t)$在Γ内有m个孤立本征值，用它们的代数重数计数，$\hat{\lambda}(t) := (1/m)\operatorname{tr} T(t)P(t)$是它们的算术平均。

我们现在证明$\hat{\lambda}(t)$在δ_Γ'内t_0的某邻域内解析。设$\{x_i\}$（或$\{x_i^*\}$）是$M_0 := P(t_0)X$（或$M_0^* := P^*(t_0)X^*$）的基使得$\langle x_i^*, x_j\rangle = \delta_{ij}$：

$$P(t_0) = \sum_{i=1}^{m} \langle \cdot, x_i^* \rangle x_i.$$

对于充分小的$|t - t_0|$，由命题3.10，向量$\{P(t)x_i\}_1^m$形成$P(t)X$的基。伴随基定义为$\{\Sigma_{k=1}^m b_{jk}(t)x_k^*\}_1^m$，这里函数$b_{jk}$是方程组

$$\sum_{k=1}^{m} b_{jk}(t)\langle x_k^*,\ P(t)x_i\rangle = \delta_{ji},\quad i,j = 1,\cdots,m,$$

的解。由系数$\langle x_i^*,\ P(t)x_j\rangle$所定义的$m\times m$矩阵$A(t)$在$t_0$附近是可逆的，因为$A(t_0) = I$. $A^{-1}(t)$的系数是$b_{jk}(t)$，所以它们在t_0附近解析。现在

$$m\hat{\lambda}(t) = \operatorname{tr} T(t)P(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \langle (T' - tH)P(t)x_i,\ \sum_{k=1}^{m} b_{ik}(t)x_k^* \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \overline{b_{ik}(t)} \langle (T' - tH)P(t)x_i, x_k^* \rangle .$$

这证明了$\widehat{\lambda}(t)$在δ_r'内的任何点t_0附近解析. □

命题3.26 下面展开式对于δ_r'内的 t 成立:

$$P(t) = P' - \sum_{k=2} t^{k-1} \sum_{*} S'^{(P_1)} HS'^{(P_2)} \cdots HS'^{(P_k)}, \quad (3.15)$$

$$\widehat{\lambda}(t) = \lambda' + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} t^k \frac{1}{k} \sum_{*} \mathrm{tr}[HS'^{(P_1)} \cdots HS'^{(P_k)}], \quad (3.16)$$

其中

$$* = \left\{ P_i \geqslant 1 - l, \quad i = 1, \cdots, k; \quad \sum_{i=1}^{k} P_i = k - 1 \right\},$$

$$S'^{(0)} := -P', \quad S'^{(-P)} := -D'^P, \quad S'^{(P)} := S'^P,$$

对于 $p > 0$,

$$D' := (T' - \lambda')P', \quad 且 S' := \lim_{z \to \lambda'} R'(z)(1 - P').$$

证明 上述展开式是闭算子族$T(t) = T' - tH$ 的著名摄动级数。例如在 Kato(1976, pp.74—80, 379 及380) 中对充分小的 t 给出了它们. □

7.3 当$m = 1$时 $\phi(t)$ 的解析性

当$m = 1$时, 若 $P'\varphi(t) \neq 0$, 由 $p'\phi(t) = \varphi'$ 所规范化的$T(t)$ 的本征向量$\phi(t)$ 是明确定义的. 且现在假定定义域D是稠密的, 因此伴随算子T'^* 是唯一确定的.

命题3.27 当$m=1$时，由$P'\phi(t)=\varphi'$所规范化的本征向量$\phi(t)$对于充分小的$|t|$是解析的.

证明 我们知道，当$m\geqslant 1$时，由（3.16），对于δ_r'内的所有t，$\hat{\lambda}(t)=\Sigma_{k=0}^{\infty}t^k\nu_k$，这里

$$\nu_0:=\lambda',\quad \nu_k:=\frac{1}{mk}\sum_{*}\mathrm{tr}[HS'^{(p_1)}\cdots HS'^{(p_k)}],\ k\geqslant 1.$$

但是（即使$m=1$），本征向量的情况更复杂．设φ'是T'的相应于λ'的本征向量，$\|\varphi'\|=1$．$P(t)\varphi'$在δ_r'内关于t解析，但是只有非零向量才是$T(t)$的本征向量。对于充分小的$|t|$，因为$P(t)\varphi'$接近于$P'\varphi'=\varphi'\neq 0$，所以$P(t)\varphi'$是非零的．$\phi(t)$与$P(t)\varphi'$共线。我们设$\phi(t):=\gamma(t)P(t)\varphi'$，这里$1/\gamma(t)=\langle P(t)\varphi',\varphi'^*\rangle$。只要$\langle P(t)\varphi',\varphi'^*\rangle$非零，则$\gamma$是关于$t$解析的，同样$\phi(t)$是解析的。对于充分小的$|t|$，因为$1/\gamma(0)=\langle P'\varphi',\ \varphi'^*\rangle=1$，$1/\gamma(t)$是非零的。所以，对于充分小的$|t|$，$\phi(t)=\Sigma_{k=0}^{\infty}t^k\eta_k$，这里，系数$\eta_k$是根据$\gamma(t)$与$P(t)\varphi'$的级数展开式的乘积得出的。□

在

$$\langle P(t)\varphi',\ \varphi'^*\rangle\text{对于}\delta_r'\text{内的}t\text{是非零}\tag{3.17}$$

的条件下，由$P'\phi(t)=\varphi'$所规范化的本征向量$\phi(t)$关于δ_r'内的t解析。注意$P'P(t)\varphi'=\langle P(t)\varphi',\ \varphi'^*\rangle\varphi'$.

习题

3.18 证明$\langle P(t)\varphi',\ \varphi'^*\rangle$对于$|t|\leqslant 1$是非零的，如果

$$\max_{z\in\Gamma}\|HR'(z)\|<\left(1+\frac{\mathrm{meas}\Gamma}{2\pi}\max_{z\in\Gamma}\|R'(z)\|\|\varphi'^*\|\right)^{-1},$$

这里measΓ表示Γ的Lebesgue 测度.

8. 级数展开式的系数的迭代计算

我们介绍关于$x(t)$，$\hat{\lambda}(t)$ 及 $\phi(t)$ 的级数展开式的系数y_k，ν_k，η_k 的迭代计算．关于本征元素，假设 $m=1$，所以$\hat{\lambda}(t)=\lambda(t)$ 为 $T(t)$ 在 Γ 内仅有的本征值．

ν_k和η_k的计算公式将比从（3.15）与（3.16）所得到的公式要简单得多．

8.1 $x(t)$的系数计算

引理3.28 对于δ_z'内的 t，级数$x(t)=\Sigma_{k=0}^{\infty}t^k y_k$ 收敛，这里系数y_k由

$$y_0=x',\ y_k=R'(z)Hy_{k-1}\quad (k\geqslant 1)$$

给出．

证明 从（3.14）容易得到．□

设x是

$$(T-z)x=f \tag{3.7}$$

的解．如果 $t=1$ 属于δ_z'，我们可以认为T'作为T的逼近，使得x能从x'迭代来改进计算，这仅需要借助于（$T'-z$）的逆的运算．为此目的，我们确定

$$x_k:=\sum_{i=0}^{k}y_i=x_{k-1}+y_k\quad 对于\quad k\geqslant 1,\ x_0=y_0=x'.$$

那么

$$Hy_{k-1}=[T'-z-(T-z)]y_{k-1}=f-(T-z)\left(\sum_{i=0}^{k-1}y_i\right)$$

$$=f-(T-z)x_{k-1};$$

即y_k是

$$(T'-z)y_k=f-(T-z)x_{k-1},\quad k\geqslant 1 \tag{3.18}$$

的解，这里右边是（3.7）在x_{k-1}计算的剩余。

命题3.29 如果$r'_2<1$，$x=\lim_k x_k$，这里x_k是$x_0=x'$，

$$(T'-z)(x_k-x')=(T'-T)x_{k-1},\quad k\geqslant 1, \tag{3.19}$$

的解。

证明 如果$r'_2<1$，$t=1$属于δ'_2及（3.19）容易从引理3.28得出。□

x是方程组（3.19）的解的极限，而（3.19）仅右边在变化，要求计算Tx_{k-1}。

例3.13 当$X=\mathbb{C}^N$，在$\|H\|\|A'^{-1}\|<1$条件下，用于求$Ax=b$的解x的迭代加细方法给出一个例子，该假设比$\gamma_\sigma(HA'^{-1})<1$更强。

例3.14 迭代加细方法是Stetter（1978）提出的迭代亏损校正方法的特殊情形：$R'(z)$是线性算子$T-z$的逼近逆，

$$HR'(z)=1-(T-z)R'(z)=K(z).$$

因为$K(z)\in\mathscr{L}(X)$，它是收缩的，当且仅当它的谱半径小于1，即条件$r'_2<1$。当T'是T的数值逼近时（第五章与第七章）我们将再次讨论这个问题。

例3.15 考虑$\mathbb{R}^2$内的2×2矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\quad 与\quad A_n=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{n}\\ 1/n & 2\end{pmatrix}$$

对于$n\in\mathbb{N}$。那么

$$A_n-A=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{n}\\ 1/n & 0\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix},$$

$$(A_n-A)A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/2\sqrt{n}\\ 1/n & 0\end{pmatrix},$$

$$[(A_n-A)A^{-1}]^2=\begin{pmatrix}1/2\sqrt{n} & 0\\ 0 & 1/2\sqrt{n}\end{pmatrix},$$

且

$$r_\sigma[(A_n - A)A^{-1}] = \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} n^{-1/4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

注意当 $n \to \infty$ 时，$\|A_n - A\|_2 \to \infty$.

方程组

$$x + \sqrt{n}\, y = 1, \quad (1/n)x + 2y = 0$$

有解

$$x = \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^{-1}, \quad y = \frac{-1}{2n}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^{-1}.$$

如果$(1/2)\sqrt{n} < 1$，即条件 $r_\sigma[(A_n - A)A^{-1}] < 1$，此解有 $n^{-1/2}$的幂的收敛展开式.

习题

3.19 令

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

由 $x = 1$，$2y = 0$ 的解开始，迭代计算方程组

$$x + y = 1, \quad x + 2y = 0$$

验证收敛的速率是等比的，公比为$1/\sqrt{2}$.

3.20 证明命题3.29中$x_n \to x$ 的收敛速率是任意接近于r_z' < 1.（提示：如习题3.28进行）

8.2 当 $m = 1$ 时，$\lambda(t)$与 $\phi(t)$的系数计算

我们先考虑引理3.28的类似情形.

引理3.30 当 $m = 1$ 时，在假设（3.17）下，级数$\lambda(t) = \Sigma_{k=0}^{\infty} t^k \nu_k$ 与 $\phi(t) = \Sigma_{k=0}^{\infty} t^k \eta_k$，当 $t \in \delta_r'$时收敛. 系数ν_k与η_k为

$$\nu_0 = \lambda' \quad \nu_k = \langle -H\eta_{k-1}, \varphi'^* \rangle, \quad k \geqslant 1,$$

(3.20)

$$\eta_0 = \varphi', \quad \eta_k = s'\left[H\eta_{k-1} + \sum_{i=1}^{k} \nu_i \eta_{k-i}\right], \quad k \geqslant 1.$$

证明　我们用待定系数法。在

$$T(t)\phi(t) = (T' - tH)\phi(t) = \lambda(t)\phi(t)$$

中，这里$\phi(t)$由$P'\phi(t) = \varphi'$规范化，形式上令t^k的系数相等。

对于$k = 0$，选择$\nu_0 = \lambda'$与$\eta_0 = \varphi'$，满足$T'\eta_0 = \nu_0\eta_0$。因为$P'\phi(t) = \varphi' = \phi(0)$，得出对于$k > 0$，$P'\eta_k = 0$。

对于$k = 1$，我们有

$$(T' - \lambda')\eta_1 - H\varphi' = \nu_1\varphi'.$$

左乘φ'^*使得$T'^*\varphi'^* = \overline{\lambda}'\varphi'^*$且$\langle\varphi'^*, \varphi'\rangle = 1$，我们得

$$\overline{\nu_1} = \langle\varphi'^*, -H\varphi'\rangle \Longleftrightarrow \nu_1 = \langle -H\varphi', \varphi'^*\rangle.$$

已选择ν_1使得方程

$$(T' - \lambda')\eta_1 = H\varphi' + \nu_1\varphi'$$

的右边在$(1 - P')X$内。于是存在唯一解η_1使得

$$\eta_1 = S'[H\varphi' + \nu_1\varphi'] = S'H\varphi', \quad P'\eta_1 = 0.$$

对于$k = 2$，我们得到

$$(T' - \lambda')\eta_2 - H\eta_1 - \nu_1\eta_1 = \nu_2\varphi'.$$

因为$P'\eta_1 = 0$，乘φ'^*，我们得到

$$\nu_2 = \langle -H\eta_1, \varphi'^*\rangle.$$

现在

$$(T' - \lambda')\eta_2 = H\eta_1 + \nu_1\eta_1 + \nu_2\varphi'$$

具有唯一解η_2使得

$$\eta_2 = S'[H\eta_1 + \nu_1\eta_1], \quad P'\eta_2 = 0.$$

类似地，令t^k的系数相等，$k > 2$，我们证得(3.20)。□

如果$t = 1$属于δ_r'，λ与ϕ，即$T\phi = \lambda\phi$的解，这里ϕ由

$P'\phi = \varphi'$ 规范化，可以从 λ' 与 φ' 迭代算出。我们定义 $\lambda_k := \sum_{i=0}^{k} \nu_i = \lambda_{k-1} + \nu_k$， $k \geqslant 1$，$\lambda_0 := \nu_0 = \lambda'$。类似地

$$\phi_k := \sum_{i=0}^{k} \eta_i = \varphi_{k-1} + \eta_k, \quad k \geqslant 1, \quad \varphi_0 := \eta_0 = \varphi'.$$

命题3.31 如果 $m = 1$ 且 $r_r' < 1$，那么在假设（3.17）下，$\lambda = \lim_k \lambda_k$，$\phi = \lim_k \varphi_k$，其中 λ_k，φ_k 是

$$\lambda_0 = \lambda', \quad \varphi_0 = \eta_0 = \varphi', \quad \lambda_k = \langle T\varphi_{k-1}, \varphi'^{*} \rangle,$$

$$(T' - \lambda)(\varphi_k - \varphi') = (1 - P')\Big[(T' - T)\phi_{k-1} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \nu_j \eta_{i-} \tag{3.21}$$

对于 $k \geqslant 1$ 的解。

证明 如果 $r_r' < 1$，$t = 1$ 属于 δ_r'，并且从引理3.30容易得出（3.21）。 □

命题3.32 在命题3.31的假设下，序列 λ_k，φ_k 的收敛速率至少是公比任意接近于 r_r' 的几何级数速率

证明 $\lambda(t)$ 与 $\phi(t)$ 在 δ_r' 内是解析的。因而我们可以在圆 $\{t;\ |t| = 1/q\}$（$q > r_r'$）上用Cauchy不等式（参阅第二章，第7.3节）。我们得到对于 $i \geqslant 0$ $|\nu_i| \leqslant Cq^i$ 及 $\|\eta_i\| < C'q^i$ 其中 $C = \sup_{|t|=1/q} |\lambda(t)|$ 与 $C' = \sup_{|t|=1/q} \|\phi(t)\|$。对于 $\lambda - \lambda_k = \Sigma_{k+1}^{\infty} \nu_i$ 与 $\phi - \varphi_k = \Sigma_{k+1}^{\infty} \eta_i$，结果立刻得出。 □

例3.16 我们在第一章已见到迭代加细方法应用于矩阵的两个例子。

（a）在命题1.14中，应用到 $A = A' - H$。由习题3.18若 $\|H\|$ 充分小，条件3.17是满足的（也可参阅定理1.7，那里 $A' = A - \varepsilon L$）。

（b）在定理1.17中，应用于分解 $A = \widetilde{A} + \widetilde{H}$ 对应于投影

$Q = xy^H$，$\zeta = y^H Ax$。$\widetilde{H}$的特殊构造蕴涵着级数的特性，即对于$k \geqslant 1$，$\eta_{2k} = 0$与$\nu_{2k-1} = 0$，在定理1.17的证明中，直接证明了收敛性$\lambda_k \to \lambda$与$\varphi_k \to \varphi$（这里φ由$Q\varphi = x$规范化），不考虑$r'_\Gamma = \max_{z \in \Gamma} r_\sigma[\widetilde{H}(\widetilde{A} - zI)^{-1}]$，$\Gamma$是围绕$\zeta$的Jordan曲线。

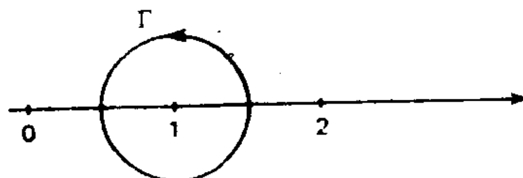


图 3.1

例3.17 在量子力学的框架中，由（3.20）所给出的$\lambda(t)$与$\phi(t)$的级数展开式称为Rayleigh—Schrödinger级数（Reed和Simon，1978）．当T'是紧算子T的数值逼近T_n时，其它类型的迭代法将在第五章给出，在第6.5节与第6.6节中给出了关于非线性算子迭代亏损的修正方法。

例3.18 考虑在$\mathbb{C}^2$内

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 5t \\ t/25 & 2 \end{pmatrix}.$$

那么

$$B(0) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}，\quad R(z) = (A - zI)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/(1-z) & 0 \\ 0 & 1/(2-z) \end{pmatrix},$$

$$(B(t) - A)R(z) = \begin{pmatrix} 0 & 5t/(2-z) \\ t/25(1-z) & 0 \end{pmatrix}.$$

A有两个本征值，1与2．设Γ是圆$|z-1|=\frac{1}{2}$，围绕$\lambda=1$；见图3.1。那么

$$\max_{z\in\Gamma} r_\sigma[(B(t)-A)R(z)]=\sqrt{\frac{4}{5}t^2}=(2/\sqrt{5})|t|.$$

$B(t)$有本征值

$$\lambda(t)=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4}{5}t^2}.$$

它们有收敛的关于t^2的幂级数展开式．如果$t^2<\frac{5}{4}$，即条件

$$\max_{z\in\Gamma} r_\sigma[(B(t)-A)R(z)]<1.$$

注意对于$t=1$，

$$B(1)=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1/25 & 2\end{pmatrix},$$

及

$$B(1)-A=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 1/25 & 0\end{pmatrix}$$

没有小范数．

习题

3.21 证明φ_k的计算稳定性取决于$\|S'\|$与$\|P'\|$。

在命题3.31中计算λ及ϕ，为了清楚起见，我们已经假设λ'是单的．重本征值或一组相近本征值的情形已在Lemordant（1980）中论述．现在我们介绍Lemordant的方法，并改写使之适合我们的框架。

8.3 $m>1$的情形

现在我们假定谱投影P'的秩为m，考虑两种可能：Γ包围一个代数重数为m的本征值λ'，或Γ包围几个本征值μ'_i，总计代数重数m．用第7.2节的记号，$P(t)$与$\hat{\lambda}(t)$在δ'_r内是t

的解析函数。我们定义不变子空间$M(t):=P(t)X$。我们将说明存在$M(t)$的基$\{u_i(t)\}_1^m$使得$u_i(t)=\Sigma_{k=0}^{\infty}t^k u_{ik}$，$i=1$，…，$m$，这里向量$\{u_{ik}\}$能从$M':=P'X$的基迭代得到。

$M(t)$的基用$Q(t)$到$M(t)$上的投影来定义，沿着固定的子空间W。例如，令x_1，…，x_m是M'中的m个无关向量。我们考虑X^*内m个向量$\{y_i\}_1^m$，使得

$$\langle y_i, x_j\rangle=\delta_{ij}, \qquad i, j=1, \cdots, m.$$

$Q':=\Sigma_{i=1}^m\langle\cdot, y_i\rangle x_i$是沿$W:=\{y_1, \cdots, y_m\}^{\perp}\cap X$在$M'$上的投影。类似地，我们希望定义$Q(t)$作为沿$W$在$M(t)$上的投影。我们引入条件

$$r_\sigma[(P(t)-P')Q']<1\text{，对于}\delta'_r\text{内的}t \tag{3.22}$$

引理3.33 在条件（3.22）下$P(t)(Q'P(t)_{\restriction M'})^{-1}Q'$是$t$的函数，且在$\delta'_r$内解析。它定义了沿$W$在$M(t)$上投影.

证明 我们令$S(t):=[Q'(P(t)-P')Q']_{\restriction M'}$。因为$Q'$是投影，$r_\sigma[Q'(P(t)-P')Q']=r_\sigma[(P(t)-P')Q']<1$；所以$(1+S(t))^{-1}$在$\mathscr{L}(M')$内存在并且在$\delta'_r$内关于$t$是解析的。$1+S(t)=Q'P(t)_{\restriction M'}$，且我们令$Q(t):=P(t)(Q'P(t)_{\restriction M'})^{-1}Q'$。显然$Q^2(t)=Q(t)$（参阅图3.2），$Q(t)X=M(t)$，且$Q(t)(1-Q')=0$。 □

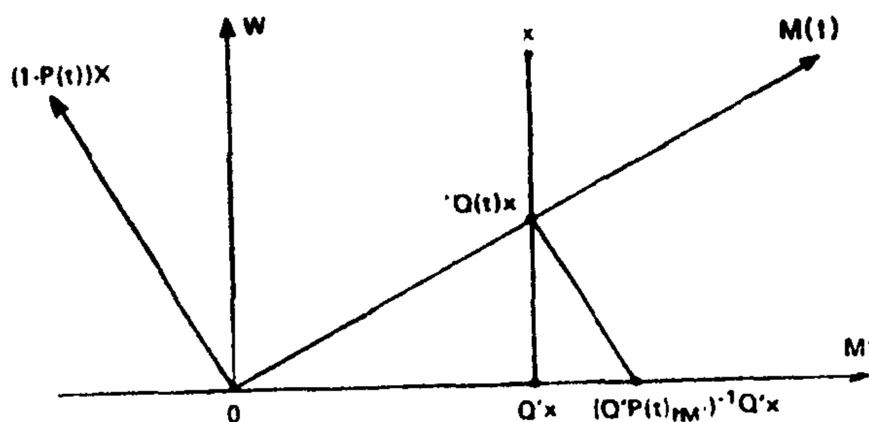


图 3.2

引理3.34 在条件(3.22)下，展开式$Q(t)=\Sigma_{k=0}^{\infty}t^kQ_k$在$\mathscr{L}(X)$内是收敛的。$Q_k$是下列递推关系式的解：

$$Q_0=Q',\ (1-Q')T'Q_k-Q_kT'Q'=B_k, \tag{3.23}$$

$$Q'Q_k=Q_k(1-Q')=0,\ k\geqslant 1$$

其中 $B_1:=(1-Q')HQ'$,

$$B_k:=(1-Q')HQ_{k-1}-\sum_{i=1}^{k-1}Q_iHQ_{k-i-1}+\sum_{i=1}^{k-1}Q_iT'Q_{k-i},$$

$k\geqslant 2$.

证明 $Q(t)$是解析的，并且系数Q_k可由对方程

$$(1-Q(t))(T'-tH)Q(t)=0$$

应用待定系数方法来得到。于是得到$Q_0=Q'$，及方程(3.23)且使$Q'Q_k=0$，$Q_kQ'=Q_k$，$k\geqslant 1$，由于利用$Q'Q(t)=Q$及$Q(t)=(1-Q')=0$。注意到我们还有

$$Q'B_k=B_k(1-Q')=0. \quad \square$$

现在我们把注意力集中于方程（3.23）对于固定的$k\geqslant 1$的分解上．为此目的，我们考虑未知的X，有界算子的一般方程

$$(1-Q')T'X-XT'Q'=B,\ Q'X=X(1-Q')=0 \tag{3.24}$$

这里$Q'B=B(1-Q')=0$。

引理3.35 如果方程（3.24）有解X，那么它是唯一的，并且它可以写为$X=\Sigma_{i=1}^{m}\langle\cdot,y_i\rangle v_i$，其中$v_i\in(1-Q')D$。

证明 我们假设(3.24)有两个解，并且考虑$Y=X_1-X_2$，Y是

$$(1-Q')T'Y-YT'Q'=0,\ Q'Y=Y(1-Q')=0 \tag{3.25}$$

的解。条件$Q'Y=Y(1-Q')=0$蕴涵Y可以写为$Y=\Sigma_{i=1}^{m}\langle\cdot,y_i\rangle w_i$其中$w_i=Yx_i\in(1-Q')D$。由（3.25）我们得出（1－

$Q')T'w_j - \Sigma_{i=1}^m \langle T'Q'x_j, y_i\rangle w_i = 0$，$j=1,\cdots,m$。令 V 由$\{w_1,\cdots,w_m\}$所张成：在$(1-Q')T'$下它是不变的。令Π是V上的投影。$\Pi\mathbf{Y}=\mathbf{Y}$，且（3.25）蕴涵

$$\Pi(1-Q')T'\Pi\mathbf{Y}-\mathbf{Y}Q'T'Q'=0. \qquad (3.26)$$

Π与Q'是秩至多为m的投影，（3.26）确定矩阵方程有0作为仅有的解，根据Gantmacher（1959），如果对应于$\Pi(1-Q')T'\Pi$与$Q'T'Q'$的矩阵的谱不相交。这是正确的，因为第一个谱位于Γ之外而第二个谱位于Γ之内（习题3.24）。□

习题

3.22 当$m=1$及$Q'=P'$时，验证（3.23）可简化为（3.20）。

3.23 证明$r_\sigma[Q'(P(t)-P')Q']<1$蕴涵$Q'P(t)x_i\neq 0$，$i=1,\cdots,m$。当$m=1$时与（3.17）的条件相比较。

如果已知m个向量$\{v_i\}_1^m$，$\mathbf{X}=\Sigma_{i=1}^m\langle\cdot, y_i\rangle v_i$确定。注意$v_i=\mathbf{X}x_i$；解关于未知$\mathbf{X}\in\mathscr{L}(X)$的方程（3.24）等价于解$m$个未知量$v_i\in X$的$m$个方程组：$(1-Q')T'v_i-\Sigma_{j=1}^m\langle T'x_i, y_j\rangle v_j=Bx_i$，$i=1,\cdots,m$。我们注意到如果$x_i$，$i=1,\cdots,m$．是$T'$的本征向量，那么$\langle T'x_i, y_j\rangle=\mu_i'\delta_{ij}$，且方程组简化为一组$m$个方程$(1-Q')(T'-\mu_i')v_i=Bx_i$，$i=1,\cdots,m$。

当T'的本征值在Γ内形成一组时，通过更精确的方式，我们给出解（3.24）的一个算法。我们记T'的位于Γ内的m个重的本征值为$\mu_1',\cdots,\mu_m'$，且$\hat{\lambda}'=(1/m)\Sigma_{i=1}^m\mu_i'$是它们的算术平均值．我们定义

$$a:=\max_i|\mu_i'-\hat{\lambda}'|,$$

$$b:=\operatorname{dist}(\hat{\lambda}', \sigma(T')-\{\mu_i'\}_1^m),$$

与

$$U' := (T' - \hat{\lambda}')Q'.$$

如果 $b>0$，$\hat{\lambda}'$不在$(1-Q')T'_{\restriction W}$的谱内（习题3.25）且我们令 $\Sigma' := (1-Q')[\mathring{T}'_{\hat{\lambda}'}]^{-1}(1-Q')$，其中 $\mathring{T}_{\hat{\lambda}'} := (1-Q')(T'-\hat{\lambda}')_{\restriction W}$。那末$\Sigma' \in \mathscr{L}(X)$。

习题

3.24 证明$\{0\}\cup\sigma(T') = \sigma(Q'T'Q)\cup\sigma((1-Q')T'(1-Q'))$（提示：$(1-Q')T'Q' = 0$）．证明除0外，两个谱是不相交的．

3.25 研究$U'_{\restriction M}$和$\mathring{T}_{\hat{\lambda}'}$ 的谱．证明第一个谱位于圆盘

$$\{z;\ |z-\hat{\lambda}'|\leqslant a\}$$

之内而第二个谱位于

$$\{z;\ |z-\hat{\lambda}'|\geqslant b\}$$

之内．由此得如果$b>0$，$\hat{\lambda}'$不在$(1-Q')T'_{\restriction W}$的谱内．

引理3.36 如果$b>0$，方程(3.24)的解X是$X = \Sigma'(XU'+B)$使得$Q'X = X(1-Q') = 0$的不动点．

证明 从(3.24)我们得到$(1-Q')(T'-\hat{\lambda}')X - X(T'-\hat{\lambda})Q' = B$．等价地，$(1-Q')(T'-\hat{\lambda}')(1-Q')X-(1-Q')XU' = (1-Q')B$。所以$X = \Sigma'(XU'+B)$。□

注意如果在Γ之内存在陡度为1的单本征值λ'，U'简化为$(T'-\lambda')Q' = 0$。在X是由$X = \Sigma'B$直接给出的情形下，因为λ'是孤立本征值，$b>0$自动满足．在最一般情形，X在较强的假设$0\leqslant a<b$下，可用不动点迭代算出．

命题3.37 如果$a<b$，方程(3.24)的解X是下列不动点迭代的极限

$$X_0 = \Sigma' B,$$

$X_{i+1} = \Sigma'(X_i U' + B)$, $Q' X_i = X_i(1 - Q') = 0$, $i = 0, 1, 2, \cdots$, X_i 收敛于 X 的速率可任意接近 a/b。

证明　如果存在常数 $a<1$ 使得

$$\|\Sigma' X^1 U' - \Sigma X^2 U'\| \leqslant a \|X^1 - X^2\|$$

不动点迭代收敛，如果$\|\Sigma'\|\|U'\|<1$ 这个条件满足．我们知道 $r_\sigma(U') \leqslant a$ 及 $r_\sigma(\Sigma') \leqslant \frac{1}{b}$。所以对于任何 $\varepsilon>0$，存在等价范数$\|\cdot\|_*$，使得$\|\Sigma'\|_*\|U'\|_* < (a+\varepsilon)/(b-\varepsilon)$。如果 $a<b$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得$(a+\varepsilon)/(b-\varepsilon)<1$，并且由$(a+\varepsilon)/(b-\varepsilon)$ 所界定的收敛速率可以任意接近于a/b．□

从引理 3.36 和命题 3.37 推导出确定X的 m 个向量 $\{v_i\}_1^m$ 的计算方法，留给读者作为练习。

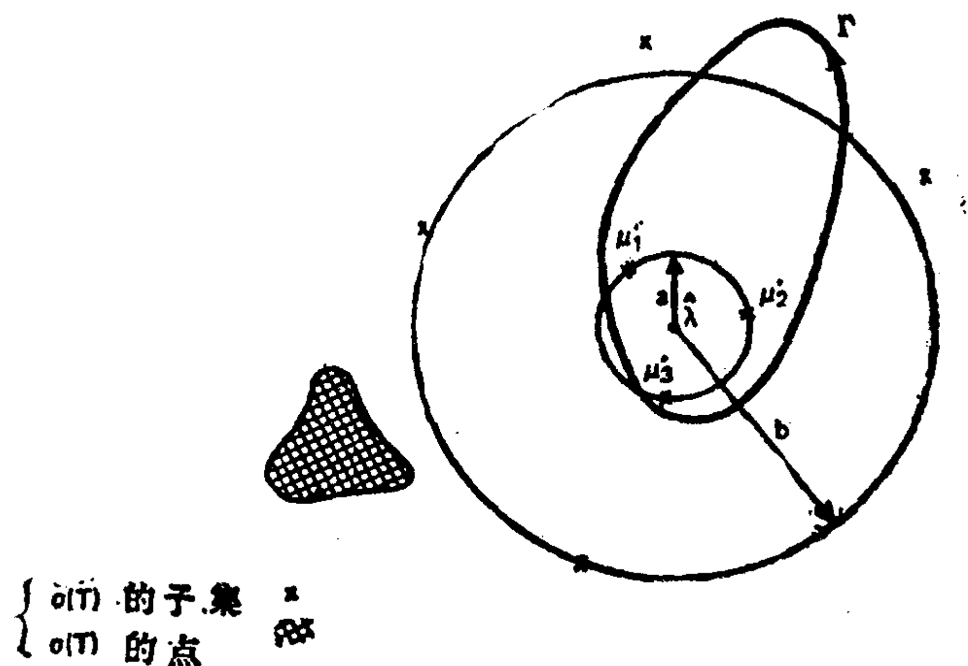


图　3.3

因而我们说当 $a<b$ 时 T' 在 Γ 内的本征值形成一“组”（图3.3）. 可以注意在引理 3.36 内 $\hat{\lambda}'$ 的选择有任意性。我们可以选择 $\mu\in\rho((1-Q')T'_{|W})$ 使得 a/b 尽可能小（图3.4）.

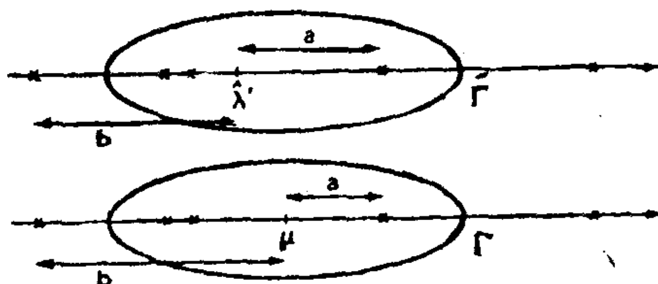


图 3.4

众所周知，处理 T 的重的或相近本征值的困难之一是确定 T' 有多少本征值是聚集的. 当上述方法可行时，基于可供使用的量 a、b 提供了一种对策. 特别地，当 T' 是 T 的数值逼近时，a 和 b 可以先验地计算.

定理3.38 在条件（3.22）下对于 $t\in\delta'_{\Gamma}$, $Q(t)=\Sigma_{k=0}^{\infty}t^kQ_k$ 收敛，这里 Q_k 是(3.23)的解. 若 $a<b$，那么对于固定 $k\geq1$，Q_k 是命题 3.37 所确定的不动点迭代的极限，收敛速率为 a/b. $Q(t)$ 定义了 $M(t)$ 的基：

$$u_i(t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^ku_{ik},\quad Q'u_i(t)=x_i,\quad i=1,\cdots,m.$$

证明 因为 $Q'P(t)x_i\neq0$，$i=1,\cdots,m$，由 $Q'u_i(t)=x_i$ 规范化的向量 $u_i(t)$ 是明确定义的。其余部分由引理3.34与命题 3.37 显而易见。对于 $k\geq1$，每个 Q_k 可以写成 $Q_k=\Sigma_{i=1}^{m}\langle\cdot,y_i\rangle u_{ik}$，其中 $u_{ik}\in(1-Q')D$. 于是

$$Q(t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^kQ_k=\sum_{i=1}^{m}\langle\cdot,y_i\rangle\Big(\sum_{k=0}^{\infty}t^ku_{ik}\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\langle\cdot,y_i\rangle u_i(t). \quad \square$$

现在我们转到计算$\hat{\lambda}(t)=(1/m)\mathrm{tr}T(t)P(t)$。

引理 3.39

$$\hat{\lambda}(t)=(1/m)\mathrm{tr}T(t)P(t)=(1/m)\mathrm{tr}T(t)Q(t).$$

证明 显然，因为有限秩算子$T(t)P(t)$的迹是$T(t)_{|M(t)}$的迹，并且$P(t)$，$Q(t)$有相同的值域$M(t)$。□

定理3.40 对于$t\in\delta_\Gamma'$，$\hat{\lambda}(t)=\Sigma_{k=0}^{\infty}t^k\hat{\nu}_k$这里系数$\hat{\nu}_k$给出为

$$\hat{\nu}_0=\hat{\nu}',\ \hat{\nu}_k=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\langle(T'Q_k-HQ_{k-1})x_i,y_i\rangle,k\geqslant 1.$$

证明 由命题3.26，$\hat{\lambda}(t)$在δ_Γ'内解析，因而有唯一展开式，

$$\hat{\lambda}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^k\hat{\nu}_k=\frac{1}{m}\mathrm{tr}(T'-tH)\left(\sum_{k=0}^{\infty}t^kQ_k\right)$$

$$=\frac{1}{m}\mathrm{tr}T'Q'+\sum_{k=1}^{\infty}t^k\frac{1}{m}(\mathrm{tr}T'Q_k-\mathrm{tr}HQ_{k-1}).$$

于是得出所求的结果．注意我们用到的展开式$\Sigma_{k=0}^{\infty}t^kQ_k$，对于$\delta_\Gamma'$内的所有$t$不必都收敛．□

我们现在考虑问题$T\varphi=\lambda\varphi$，其中$T=T'-H$．如果$t=1$属于δ_Γ'，曲线Γ位于$\rho(T)$．内并且包围T的一个或几个本征值，且共计代数重数等于m 令$\hat{\lambda}$是它们的算术平均值，且令P是与Γ内的本征值相应的谱投影．$M=PX$是对应的不变子空

间。令Q是沿着W在M上的投影。$\hat{\lambda}$与M的基$\{\mu_i\}_1^m$可以按照下面的定理迭代计算。

定理 3.41 如果$r_\Gamma'<1$，那么在条件（3.22）下$\hat{\lambda}=\Sigma_{k=0}^{\infty}\hat{\nu}_k$及$u_i=\Sigma_{k=0}^{\infty}u_{ik}$，$i=1,\cdots,m$，这里$\hat{\lambda}_k$及$u_{ik}$分别在定理3.40与定理3.38内确定。

证明 显然，因为$t=1$属于δ'。注意到$\hat{\nu}_0=\hat{\lambda}'$，$u_{i0}=x_i$与$Q'u_i=x_i$。我们写出$Q=\Sigma_{i=1}^m\langle\cdot,y_i\rangle u_i$，于是$\hat{\lambda}=(1/m)\mathrm{tr}TQ$。□

8.4 拟三角矩阵本征元的迭代加细

我们现在讨论在$\mathbb{C}^N$内的矩阵的应用。令$A=T+H$，这里T是A的上三角部分而H是严格下三角部分。令$\varepsilon:=\|H\|_2$，a_{11}（或，a_{NN}）是A的近似本征值，其中e_1（或e_N）作为近似的右（或左）本征向量。在习题1.59中，从a_{11},e_1（或$\overline{a}_{NN},e_N$）导出一个计算A（或A^H）的精确本征元的算法。为了提高近似本征值a_{ii}，$1<i<N$的精度，我们现在提出一种算法，它不需要关于a_{ii}的（左或右）近似本征向量的信息。我们区别a_{ii}是与其它对角元分离的存在m个对角元素与a_{ii}相近的情形。设$\sigma>0$是给定的限。

8.4.1 $\min_{j\neq i}|a_{ii}-a_{jj}|\geqslant\sigma$

分别交换第i行与第1行及第i列与第1列，置换后，我们得到

这里，ε记阶为ε的元素，×记阶为1的元素。

a_{ii}是T'的具有本征向量e_1的单本征值．P'是相应的本征投影，$Q'=e_1e_1^T$是在$\{e_1\}$上的正交投影。令Γ是隔离a_{ii}的曲线。令$R'(z):=(T'-zI)^{-1}$。$A(t):=A'+t'H$及$P(t)$是它的谱投影。

引理3.42 对于充分小的ε，满足条件

$$
A' = i \rightarrow \left[\begin{array}{c|cccccc}
a_{ii} & \varepsilon & - & \overset{\overset{i}{\downarrow}}{\varepsilon} & \times & \times \\
\hline
0 & a_{22} & \times & \varepsilon & \times & \times \\
\vdots & & \ddots & | & & \\
0 & & & a_{11} & & \\
\vdots & & & & \ddots & \times \\
0 & 0 & & & & a_{NN}
\end{array}\right]
$$

$$
+ \left[\begin{array}{c|cccccc}
0 & 0 & & & \overset{\overset{i}{\downarrow}}{0} & & \\
\hline
\times & 0 & \ddots & & & 0 & \\
| & & & \ddots & & & \\
\times & x & - & x & 0 & \ddots & \\
\varepsilon & \varepsilon & & & & \varepsilon & 0
\end{array}\right] \leftarrow i
$$

$$
= T' + H' = \left[\begin{array}{c|c}
a_{ii} & T_2' \\
\hline
0 & T_4'
\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c}
0 & 0 \\
\hline
H_3' & H_4'
\end{array}\right],
$$

$$
\max_{z \in \Gamma} r_\sigma [H'R'(z)] < 1
$$

与

$$
\sup_{|t| < 1} r_\sigma [Q'(P(t) - P')Q'] < 1
$$

证明　首先我们证明对于充分小的 ε, $\max_{z\in\Gamma}\|[H'R'(z)^3]\|<1$. 对于 Γ 上的任何 z, $\|[H'R'(z)]^3\|\leqslant C\max_{1<i<N}\|[H'R'(z)]^3e_j\|$。由于 $R'(z)$ 与 H' 的构造，容易验证 $\|[H'R'(z)]^3e_1\|$ 是小的就足够了.

$$
\begin{aligned}
&R'(z)e_1=(\times\ 0\cdots\qquad 0)^T\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \mathrm{i}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \downarrow\\
&x_1=H'R'(z)e_1=(0\ \times\cdots\times\ \times\ \varepsilon\cdots\varepsilon)^T,\\
&R'(z)x_1=(\varepsilon\ \times\cdots\times\ \varepsilon\cdots\varepsilon)^T,\\
&x_2=H'R(z)x_1=(0\ \varepsilon\cdots\varepsilon\ \times\ \varepsilon\cdots\varepsilon)^T,\\
&R'(z)x_2=(\varepsilon\ \varepsilon\cdots\times\ \varepsilon\cdots\varepsilon)^T,\\
&x_3=H'R'(z)x_2=(0\ \varepsilon\cdots\varepsilon\ \varepsilon\ \varepsilon\cdots\varepsilon)^T,
\end{aligned}
$$

即 $\|[H,R'(z)]^3e_1\|<C\varepsilon$。现在，

$$
Q'(P(t)-P')Q'=\frac{-1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma Q'[\underbrace{R(t,z)-R'(z)}_{A(t,z)}]Q'dz
$$

其中

$$
A(t,z)=tR'(z)H'R'(z)+R'(z)[tH'R'(z)]^2
$$

$+R'(z)\sum_{k=1}^{\infty}([tH'R'(z)]^3)^k$. 对于充分小的 ε,

$$
\begin{aligned}
\sup_{|t|<1} r_\sigma[Q'(P(t)-P')Q'] &= \sup_{|t|<1}|e_1^T(P(t)-P')e_1|\\
&\leqslant C\sup_{|t|<1}\max_{z\in\Gamma}|e_1^TA(t,z)e_1|<1.\ \square
\end{aligned}
$$

习题

3.26　令 $L=H'-H$. 证明对于 $\mathrm{i}>2$(或 $\mathrm{i}=2$) L 是幂零矩阵使得 $L^3=0$ （或 $L^2=0$）. 证明对于 $\mathrm{i}>2$（或 $\mathrm{i}=2$），L 的秩为 2 （或 1）.

$A\varphi=\lambda\varphi$，这里 λ 是 A 的接近于 a_{ii} 的本征值。我们知道本征向量 φ 满足 $e_i^T\varphi\neq 0$（习题1.77）．交换 φ 的第一个分量与第 i 个分量，定义 φ' 为 A' 的本征向量，使得 $A'\varphi'=\lambda\varphi'$，且 $e_1^T\varphi'\neq 0$．这也是引理 3.42 的结果。记 A' 的本征向量为 ϕ'，并用 $e_i^T\phi'=1$ 规范化．
我们定义

$$\lambda_0=a_{ii}, \qquad \lambda_k=a_{ii}+\sum_{j=1}^{k}\nu_j,$$

且

$$\varphi_0=e_1,\ \varphi_k=e_1+\sum_{j=1}^{k}\eta_j,\quad e_1^T\eta_j=0\,.$$

并令

$$\eta_k=\begin{pmatrix}0\\ \mathring{\eta}_k\end{pmatrix},$$

这里 $\mathring{\eta}_k\in\mathbb{C}^{N-1}$，对于 $k\geqslant 1$ 用迭代 $\nu_k=T_2'\mathring{\eta}_k$ 算出 ν_k 与 $\mathring{\eta}_k$

$$(T_4'-a_{ii}I)\mathring{\eta}_k=\begin{cases}-H_3', & k=1\\ -H_4'\mathring{\eta}_{k-1}+\sum\limits_{j=1}^{k-1}\nu_j\mathring{\eta}_{k-j}, & k\geqslant 2.\end{cases}\tag{3.27}$$

于是

$$\varphi_k=e_1+\sum_{j=1}^{k}\eta_j,\ \text{且}\quad \lambda_k=e_1^TT'\varphi_k,\quad k\geqslant 1\,.$$

方程组（3.27）有固定三角矩阵其对角线元素为 $a_{jj}-a_{ii}$，$j\neq i$，$|a_{jj}-a_{ii}|\geqslant\sigma$。
定理 3.41 的应用表明当 $k\to\infty$ 时，$\lambda_k\to\lambda$，$\varphi_k\to\phi'$（习题

3.27）.

习题

3.27　证明（3.23）在上述特殊框架下简化为（3.27）．证明上述所确定的递推也是在（1.14）中所给出的递推。

例3.19　我们考虑 4×4 矩阵 $A=T+H$ 其中

$$T=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&5&6&7\\0&0&8&9\\0&0&0&10\end{pmatrix},\quad H=10^{-3}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0.1&0&0&0\\3\times10^{-5}&0.12&0&0\\0.046&0.09&0.09&0\end{pmatrix}$$

我们计算接近8的精确本征值。在10步内，迭代法收敛于具有15位十进制数字的精确值．对于前几步迭代．收敛是不规则的，如由 ν_j 盈亏值的序列所示：

-2×10^{-4}，-10^{-3}，-10^{-4}，2×10^{-7}，2×10^{-8}，
7×10^{-11}，-7×10^{-11}，-7×10^{-12}，-2×10^{-13}.

这是由于$H'R'(z)$三次幂的范数小的结果．

如果将8换为5.1，接近于5，收敛速率剧烈地减慢：15步给出精确回答仅到6位十进制数字．盈亏值γ_j的序列是：
7×10^{-3}，-10^{-2}，-10^{-3}，-10^{-3}，-5×10^{-5}，-2×10^{-4}，
5×10^{-7}，-6×10^{-5}，3×10^{-6}，-2×10^{-5}，2×10^{-6}，
-6×10^{-6}，9×10^{-7}，-2×10^{-6}，4×10^{-7}.

在这种情形下，我们采用λ_0算法应该注意到相近的对角元.

8.4.2　m个对角元素满足$|a_{ii}-a_{jj}|\leqslant\sigma$

为简单起见，我们假设$m=2$，且a_{ii}，$a_{i+1,\ i+1}$是两个相近的对角元素。我们分别交换第 i 行（列）与第 1 行(列)，第(i +1)行(列)与第 2 行(列). 置换之后，得到

对于$m\geqslant2,e_1,\cdots,e_m$张成$T'$的不变子空间相应于前$m$个对

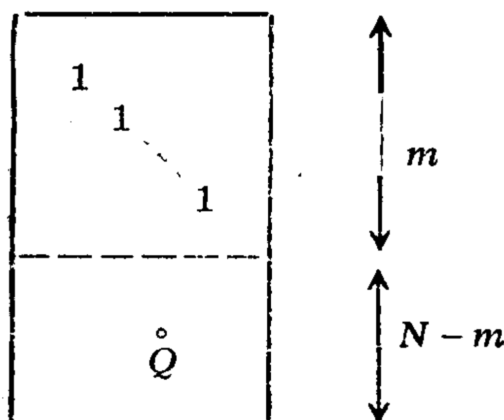
$$
A' = \begin{array}{c|cccccc}
 & & & \downarrow i & \downarrow i+1 & & \\
a_{ii} \quad \times & \varepsilon & — & \varepsilon & \varepsilon & & \times \\
0 \quad a_{i+1,i+1} & \varepsilon & — & \varepsilon & \varepsilon & & \times \\
\hline
 & a_{33} & & \varepsilon & \varepsilon & & \times \\
 & & \ddots & | & | & & \\
 & & & \varepsilon & \varepsilon & & \\
i \rightarrow \qquad 0 & & & \boxed{a_{11}} & x & & \\
i+1 \rightarrow & & & 0 & a_{22} & & \\
 & & & & & \ddots & \times \\
 & & 0 & & & & a_{NN}
\end{array}
$$

$$
+ \begin{array}{cc|cccccc}
 & & & & & \downarrow i & \downarrow i+1 & \\
0 & 0 & & & 0 & & & \\
\varepsilon & 0 & & & & & & \\
\hline
\times & \times & 0 & & & & & \\
| & | & & \ddots & & 0 & & \\
\times & \times & \times & — & \times & 0 & 0 & \leftarrow i \\
\times & \times & \times & — & \times & \varepsilon & 0 & \leftarrow i+1 \\
 & & & & & & \ddots & \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & & \varepsilon & 0 &
\end{array}
$$

$$
= T' + H' = \begin{bmatrix} T'_1 & T'_2 \\ 0 & T'_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H'_1 & 0 \\ H'_3 & H'_4 \end{bmatrix}
$$

角元素．$Q' = \Sigma_{i=1}^{m} e_i e_i^{T}$是$\{e_1, \cdots, e_m\}$上的正交投影．

留给读者验证引理 3.42 仍然有效，并且定理 3.41 是适用的。公式（3.23）包含矩阵 Q_k（或 B_k）使得 $Q'Q_k=Q_k(I-Q')=0$（或$Q'B_k=B_k(I-Q')=0$）。记对应于 Q_k（或B_k）内非零的块 $(N-m)\times m$矩阵为$\mathring{Q}_k$（或$\mathring{B}_k$），令 $\mathring{Q}=\Sigma_{k=1}\mathring{Q}_k$ 那么$N\times m$矩阵$\hat{Q}$由



定义，它的列形成 T' 的不变子空间的基。对于 $k\geqslant 1$，$\mathring{Q}_k$是

$$T_4'\mathring{Q}_k-\mathring{Q}_kT_1'=\mathring{B}_k, \tag{3.28}$$

的解。其中

$$\mathring{B}_1=-H_3',\quad \mathring{B}_k=-H_4'\mathring{Q}_{k-1}+\mathring{Q}_{k-1}H_1'+\sum_{i=1}^{k-1}\mathring{Q}_iT_2'\mathring{Q}_{k-i},$$

并且

$$\hat{\lambda}_k=\sum_{j=0}^{k}\hat{\nu}_j\frac{1}{m}\operatorname{tr}T_1'+\frac{1}{m}\operatorname{tr}T_2'\left(\sum_{j=1}^{k}\mathring{Q}_j\right).$$

因为T_4'与T_1'已经是三角形的，（3.28）的解是容易得到的，当且仅当$\sigma(T_1')\cap\sigma(T_4')\neq\phi$存在唯一解。

对$m=2$，令 $\mathring{Q}_k=(y_1^k,\ y_2^k)$ 及 $\mathring{B}_k=(b_1^k,\ b_2^k)$，于是（3.28）产生关于$N-2$个未知数的两个三角形方程组

$$(T_4' - a_{ii}I)y_1^h = b_1^h, (T_4' - a_{i+1,i+1}I)y_2^h = b_2^h$$
$$+ a_{i,i+1}y_1^h.$$

并且$\mathrm{dist}(a_{ll}, \sigma(T_4')) \geqslant \sigma$， $l = i$或$i+1$.

习题

3.28　令$A = T + H$. 直接证明对于充分小的$\|H\|$，存在A的不变子空间的基$\{u, v\}$，相应接近于a_{ii}，$a_{i+1,i+1}$的本征值使得$e_i^T u \neq 0$与$e_{i+1}^T v \neq 0$.

3.29　考虑一般方程 $AX + XB = C$，这里矩阵A是$n \times n$，B是$m \times m$，X与C是$n \times m$. 给出关于A与B的本征值的一个充分条件，以使$X = \lim_i X_i$其中

$$X_0 = (A - aI)^{-1}C,\quad X_{i+1} = (A - aI)^{-1}[-X_i(B - aI) + C],\quad i \geqslant 0,$$

这里$a \notin \sigma(A)$. 与Bartels和Stewart (1972) 给出的算法比较.

例3.20　对于矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 10^{-6} & 3.9998 & 1 & 2 & 2 \\ 10^{-6} & 10^{-4} & 4.0002 & 1 & 1 \\ 10^{-6} & 10^{-4} & 10^{-4} & 4 & 1 \\ 10^{-6} & 10^{-6} & 10^{-6} & 10^{-6} & 14 \end{pmatrix}$$

通过计算得,

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.28 & 0.23 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.2\times10^{-7} & -1.4\times10^{-7} & -1.6\times10^{-7} \end{pmatrix}$$

与

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{3}\operatorname{tr} A\hat{Q}=4+5.7\times 10^{-8}.$$

$\hat{Q}$的三个列向量是标准正交化的；这产生5×3矩阵Q使得A的三个接近于4的本征值作为3×3矩阵Q^TAQ的本征值，A的三个相近本征值的计算问题已成为真正困难的部分。

我们提醒读者注意刚才描述的算法在矩阵的实际计算中未必是最好的。我们介绍它，是为了给出定理3.41中最一般算法的一个简单例证，它适用于选择T的数值逼近T_n作为T'的情形（第五章与第七章）。

在数值线性代数中，有限维的框架允许在分解$A=A'+H$的选择中有更大的自由。例如，提高a，e_1精度的几种算法建立在分裂

$$A=\begin{pmatrix} a & v^H \\ u & C \end{pmatrix}$$

其中$a\in\mathbb{C}$，u，$v\in\mathbb{C}^{N-1}$及在本征值问题$A\phi=\lambda\phi$的不动点阐述基础上，其中

$$\phi=\begin{pmatrix} 1 \\ d \end{pmatrix},\quad d=\mathbb{C}^{N-1},$$

即，若$\|u\|_2\|v\|_2$足够小，$\lambda=a-v^H(C-\lambda I)^{-1}u$，$d=-(C-\lambda I)^{-1}u$。在$A$由拟三角矩阵上置换而得的情形中，这个条件显然可以减弱，正如在第8.4.1节。我们得到迭代

$$d_0=0,\ d_k=-(C-\lambda_{k-1}I)^{-1}u,\ \lambda_k=a-v^Hd_k,k\geqslant 1.$$

除它的第（$i-1$）行外，C是拟三角矩阵。

对于m个相近对角元素，考虑分裂

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & V \\ U & C \end{pmatrix},$$

这里A_1与C分别是m与$N-m$阶方阵。为了由关于

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

的基$\{e_1, \cdots, e_m\}$计算关于A的不变基，需要计算$m \times (N-m)$矩阵D与$m \times m$矩阵M，使得

$$A \begin{pmatrix} I \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ D \end{pmatrix} M;$$

即

$$A_1 + VD = M, \quad CD - DM = -U.$$

解决这个问题的 Newton 迭代法在 Dongarra 等（1981）中介绍。

8.5 文献注释

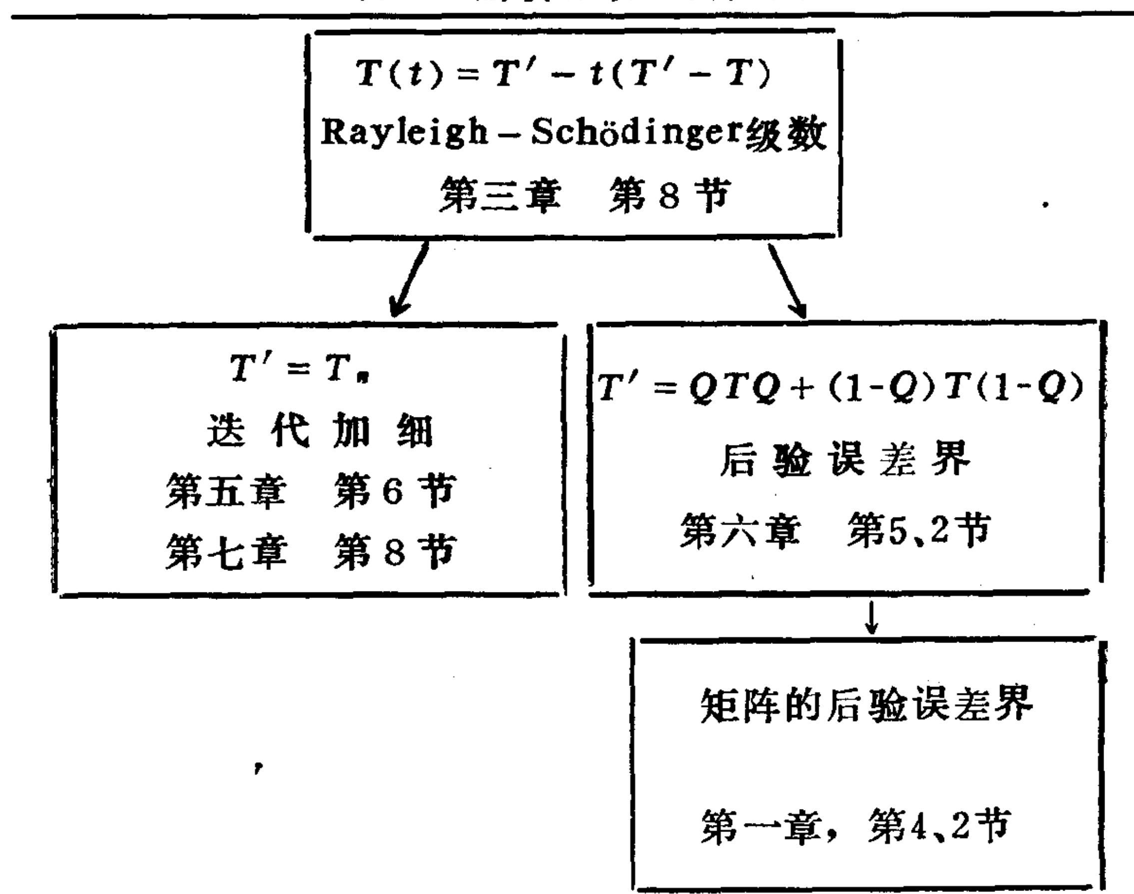
在第 7 节与第 8 节中，我们的框架是解析摄动论。关于$R(t,z)$的 Neumann 级数展开式的收敛性在讨论预解式、谱投影及迹的级数展开式的收敛性时起着根本作用。因为这是量子力学中常用的本征元的Rayleigh-Schrödinger展开式的基础，所以这在实际中是重要的。在微分方程的内容中，使预解式 Neumann 级数展开式收敛的摄动称为正则的摄动（Reed 和 Simon，1978）。

Rellich（1936—1942），Sz,—Nagy(1951)，Kato (1976)及其他人已经发展了当参数t充分小时，闭算子的解析摄动论。然而，在我们的情形中，关于T及T'，要求$t=1$属于解析区域。人们可以想到，在这个内容中参数t的引入是人为的。实际上，Lemordant（1980）已提出关于闭摄动H的解析相关理论。我们的大部分介绍取自 Redont（1979a）与 Lemordant（1980）。

正如我们在第一章及本章所见到的，关于矩阵，解及本征

元的级数展开式可以既是理论工具又是实用工具．一方面在与分解 $T=\widetilde{T}+\widetilde{H}$ 有关的使用中是理论工具．在第六章中我们将用这样的分解从“小”的算子 QTQ 的谱知识得到关于闭算子 T 的谱知识，这里 Q 是已知子空间上的有限秩投影．在实际中，这个子空间可以选为 T 的逼近不变子空间，但这不必得出后验误差界．用 T 的谱投影所得到的逼近算子 T_n 的类似分解得到本征元的收敛速率．另一方面，当与分解 $T=T_n-(T_n-T)$ 有关的使用时它们是实用工具．T' 是 T 的数值逼近算子 T_n 的情形将在第五章与第七章中描述．关于 T_n-T 的充分条件将给出来满足（3.17）．对于有趣的实际情形，条件将容易满足（当 T 是积分算子时，$\|T_n-T\|\to 0$ 或 $T_n\stackrel{cc}{\to}T$；参阅第七章）全书中应用解析摄动论的概述在表3.4中给出．

表3.4 解析摄动论的应用



第四章　积分算子及微分算子的数值逼近方法

引　　言

我们介绍方程

$$(T-z)x=f, \qquad (*)$$

这里，z 在$\rho(T)$ 内给定，及其相应的本征值问题 $T\varphi=\lambda\varphi$，（$\varphi\neq 0$）的数值逼近的一些方法。我们选择方程的上述形式（*）而不是形式 $Tx=f$ 来研究，是因为形式（*）与谱投影

$$P=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma}(T-z)^{-1}dz$$

有着明显的联系。

将这些数值方法纳入一个抽象的框架，其中逼近算子 T_n 与 T 定义在相同的Banach空间 X 中。（*）的解 x 用$(T_n-z)x_n=f$ 的解x_n来逼近。

在大多数情形下，收敛性 $x_n\to x$ 在文献中已直接证明。这里我们介绍收敛性$T_n\to T$的研究，由此收敛性 $x_n\to x$ 可直接得出。而且，更有趣的是本征元的收敛性也将从收敛性$T_n\to T$导出（这个收敛性的建立总是比$x_n\to x$ 更为困难）这些将在第五章完成。

一类重要的方法是在X的有限维子空间 X_n 上的投影法。它包含诸如Galerkin法，最小二乘法，配置法及有限元法．误差$\|x-x_n\|$可以用dist (x,X_n) 来表示，它是解 x 到X_n的距离。因而关于$\|x-x_n\|$ 的估计在逼近论中可以简化为计算 dist$(x,$

X_n）的问题．第六章及第七章中给出的例子将表明投影法起着重要作用．

A. FREDHOLM 积分算子

1. 问题

设X是复 Banach 空间，且设T在X上有界，我们讨论问题

$$Tx - zx = f\text{，对于}X\text{内已知的}f\text{，}z\text{在}\rho(T)\text{内} \tag{4.1}$$

$$T\varphi = \lambda\varphi,\quad 0 \neq \varphi \in X \tag{4.2}$$

的数值解．算子T的主要例子将是积分算子．

$$x(t) \mapsto (Tx)(t) = \int_\Omega k(t,s)x(s)ds,\quad t \in \Omega \tag{4.3}$$

这里Ω是$\mathbb{R}^N(N \geqslant 1)$的有界区域．在实际中，$X$通常是$C(\Omega)$或$L^2(\Omega)$．（4.1）是对于$z \neq 0$的第二类Fredholm方程，而（4.2）是相应的本征值问题．

对于Ω内的每一个t，定义函数k_t为

$$k_t(s) = k(t,s),\quad s \in \Omega,$$

我们可以改写（4.3）为

$$(Tx)(t) = \int_\Omega k_t(s)x(s)ds$$

我们假设x及k_t是 Lebesgue 可测函数，因而（4.3）是明确定义的．

我们将考虑T作为在$L^r(\Omega)$（$1 \leqslant r \leqslant \infty$）上定义的算子．很多积分算子不但是有界的而且是紧的．我们给出核k的特性，使T成为从$L^r(\Omega)$到$C(\Omega)$内的紧算子．

定理4.1（Graham 和 Sloan）设$1 \leqslant P \leqslant \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$. 对于所有使得$q \leqslant r \leqslant \infty$的$r$，由（4.3）所定义的积分算子从

$L^r(\Omega)$ 到$C(\Omega)$ 是紧的，当且仅当k 满足

(i) $\sup_{t\in\Omega}\|k_t\|_p<\infty$；

(ii) $\lim_{t'\to t}\|k_{t'}-k_t\|_p=0$，对于所有$t',t\in\Omega$。

证明见Graham和Sloan (1979)。

对于$1\leqslant r\leqslant\infty$，从包含关系$C\subset L^\infty\subset L^r\subset L^1$得到核$k$也引出从$L^r$到$L^r$，从$L^r$到$C$，及从$L^\infty$到$C$的紧算子。最后的一种情形在应用中常常是最重要的。

现在我们给出非紧算子的例子。

例4.1 由

$$(Tx)(s)=\int_0^s\frac{x(t)dt}{\sqrt{s^2-t^2}}\quad 对于0<s\leqslant 1$$

且$(Tx)(0)=(\pi/2)x(0)$所定义的算子T是有界的但不是紧的。实际上，可以证明纯量1是T的点谱，具有无限的重数。

习题

4.1 设$X=C(a,b)$，且设

(i) $$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b|k(t,s)|\,ds<\infty,$$

(ii) $$\lim_{\delta\to 0}\int_a^b|k(t+\delta,s)-k(t,s)|\,ds=0,\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

用Ascoli-Arzela定理直接证明T在X内是紧的。用定理4.1验证结果。

现代的实际方法主要是用有限维子空间上的投影或者用数值求积来逼近T。我们着手考察这些技巧。

2. 投影及数值求积

2.1 数值分析中的投影

设X_n是复Banach空间X的有限维子空间。由于计算的原因，X_n常常是多项式的集合，或者是逐段多项式或者是在Ω

上用单个表达式所定义的多项式。考虑从X到X_n上的投影序列π_n。令

$$\delta_n(x):=\text{dist}(x,X_n)=\inf_{y\in X_n}\|x-y\|.$$

对于X中的任何x，

$$\delta_n(x)\leqslant\|(1-\pi_n)x\|\leqslant\|1-\pi_n\|\delta_n(x).$$

所以逐点收敛性$\pi_n x\to x$取决于$\delta_n(x)$及$\|\pi_n\|$.当$n\to\infty$，$\|\pi_n\|$可能不是有界.

作为基本例子，我们考虑在$X=C(a,b)$内插值投影L_n，它将$x\in C(a,b)$与在点$\{t_{in}\}_1^n$,($a\leqslant t_{1n}<t_{2n}<\cdots<t_{nn}\leqslant b$)上它的$(n-1)$次Lagrange插值多项式$L_n x$相对应.$X_n$是$\mathbb{P}_{n-1}$，即在$[a,b]$上次数小于$n$的多项式集合。于是对$\{t_{in}\}_1^n$的任何选择，

$$\|L_n\|_\infty\geqslant(2/\pi^2)\log(n-1)+b(n),$$

这里b是n的有界函数（Laurent, 1972, P.301）。所以在$C(a,b)$内至少存在一个函数，使得$L_n f\nrightarrow f$。但$\{t_{in}\}_1^n$的某种选择会比较好些。如果$\{t_{in}\}_1^n$是Chebyshev点（即在$[a,b]$上的第一类n次Chebyshev多项式的零点），那么$\|L_n\|_\infty\leqslant(4/\pi)\log n+8$。对于均匀间隔的结点，$e^{n/2}\leqslant\sup_n\|L_n\|_\infty\leqslant 2^n$（Laurent, 1972, P.302）

注意，如果投影在某个空间内无界，它可以在另外的空间内有界。例如，如果$\{t_{in}\}_1^n$是在$[-1,1]$上的Chebyshev点，L_n是从$C(-1,1)$到$L_\rho^2(-1,1)$的一致有界算子，这里$L_\rho^2(-1,1)$是加权平方可积的函数x的空间，其中权函数$\rho(t):=(1-t^2)^{-1/2}$，$t\in[-1,1]$（参阅第7节）.

在$X=C(a,b)$及$X_n=\mathbb{P}_{n-1}$的例子中，x的最佳逼近$p^*\in\mathbb{P}_{n-1}$，达到$\|x-p^*\|_\infty=\text{dist}(x,X_n)$，它可以用连续函数$x$对于$\delta>0$的连续模$\omega(\delta,x)$所界定。

$$\omega(\delta,x):=\sup_{|t-t'|<\delta}(|x(t)-x(t')|,\ t,t'\in[a,b]).$$

对于$x\in C(a,b)$，有$\text{dist}_\infty(x,X_n)=O(\omega(1/n,x))$，而更一般地对于$x\in C^p(a,b)$且$n\geqslant p$，$\text{dist}_\infty(x,X_n)\leqslant(c/n^p)\|x^{(p)}\|_\infty$（见Cheney Jackson定理中的，1966,P.142—145）.

习题

4.2 设$0\neq x\in X$；证明间隙$\delta(\{x\},X_n)$等于$(1/\|x\|)\delta_n(x)$。

4.3 设π_n是在E_n上正交投影，E_n是Hilbert空间H的有限维子空间。证明$\pi_n x\to x$，当且仅当$\text{dist}(x,E_n)\to 0$。

设Δ是$[a,b]$的严格分划：$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$.令$\Delta_i:=[t_{i-1},t_i)$，$i=1,\cdots,n$及$h:=\max_{1\leq i\leq n}(t_i-t_{i-1})$。$\mathbb{P}_{r,\Delta}$是在每个$\Delta_i$($i=1,\cdots,n$)上次数小于$r+1$的逐段多项式集合，在$b$点的值由连续性确定。

习题

4.4 在$H=L^2(a,b)$内，设π_n是投影$x\mapsto\pi_n x$，与$x|_{\Delta_i}$相对应，它在Δ_i($i=1,\cdots,n$)上的次数小于$r+1$的多项式集合中的最小二乘方逼近，$(\pi_n x)(b)$由连续性确定。证明$\pi_n:L^2(a,b)\to\mathbb{P}_{r,\Delta}$是正交的。证明若$h\to 0$，$r$固定，则在$L^2(a,b)$中$\pi_n x\to x$。

4.5 证明在$L^2(a,b)$中，若$x\in C^\alpha(a,b)$则$\text{dist}_2(x,\mathbb{P}_{r,\Delta})\leqslant h^\beta\|f^{(\beta)}\|_\infty$其中

$$\beta:=\min(r+1,\ \alpha).$$

习题4.4所定义的投影π_n是在$L^2(a,b)$中，$\|\pi_n\|_2=1$。同样的投影可以认为是从$L^\infty(a,b)$到$\mathbb{P}_{r,\Delta}\subset L^\infty(a,b)$上的算子，而且在关于分划$\Delta$的某些假定下$\sup_n\|\pi_n\|$可以是有界的.（de Boor，1976；Graham，1982）.

记$\overline{\Delta}_i=[t_{i-1}, t_i]$，定义$C_\Delta:=\prod_{i=1}^n C(\overline{\Delta}_i)$。$f\in C_\Delta$由$n$个分量$f_i\in C(\overline{\Delta}_i)$所组成，$f$是逐段连续函数，在分点$t_i$上（$i=2,\cdots,n-1$）（可能）有不同的左边值及右边值。用$\|f\|_\Delta=\max_i\|f_i\|_\infty$定义范数$\|\cdot\|_\Delta$，$C_\Delta$是Banach空间且对于$f\in C_\Delta$，由于$\|f\|_\Delta=\|f\|_\infty$，因而$C_\Delta\subset L^\infty(a,b)$.对于$f\in\mathbb{P}_{r,\Delta}$，若在$t_i^\pm$的值由连续性确定，则$\mathbb{P}_{r,\Delta}\subset C_\Delta$。

习题

4.6 设$[a, b]$上的分划是拟一致的。对于$x\in C_\Delta$，在每个$\overline{\Delta}_i$（$i=1, \cdots, n$）上，在点$\{\tau_i^j\}_{j=1}^{r+1}$处我们定义它的逐段Lagrange插值$L_n x$，其次数小于$r+1$：$L_n x\in\mathbb{P}_{r,\Delta}$，假设这分划是拟一致的证明$x\in C_\Delta\mapsto L_n x$在$L^\infty(a,b)$中定义了一个有界算子，具有定义域$C_\Delta$使得$L_n^2=L_n$。证明在$C(a, b)$上，当$h\to 0$时，有$L_n x\to x$。推导出$\sup_n(\|L_n x\|_\infty, x\in C(a,b), \|x\|_\infty=1)<\infty$。

在计算上，另一个重要空间是样条空间$S_{r,\Delta}$，即$C^{r-2}(a, b)$的子空间由属于$\mathbb{P}_{r-1,\Delta}$的函数所组成：$S_{r,\Delta}$定义在Δ上的r次样条函数。当$h\to 0$时，我们有

$$\mathrm{dist}_\infty(x, S_{r,\Delta})=O(\omega(h, x)), x\in C(a, b)$$

且

$$\mathrm{dist}_\infty(x,S_{r,\Delta})=O(h^p\omega(h,x^{(p)})), x\in C^p(a,b), 0\leqslant p\leqslant r-1.$$

习题

4.7 证明 $\dim S_{r,\Delta}=n+r-1$。

2.2 数值求积

我们考虑线性泛函

$$I(x)=\int_a^b x(t)dt$$

的逼近值的计算，其中 $x \in C(a, b)$，借助于求积公式

$$I_n(x) = \sum_{i=1}^{n} w_{in} x(t_{in}), \quad a \leqslant t_{in} \leqslant b,$$

这里权 w_{in} 是实的或复的。

我们希望公式 I_n 对于任何连续函数 x 都收敛：$I_n(x) \to I(x)$，对所有 $x \in C(a, b)$。

引理4.2 在 $C(a, b)$ 中，对任何 x，$I_n(x) \to I(x)$ 成立的充分必要条件是

(i) $\lim_{n \to \infty} I_n(p) = I(p)$ 对任何多项式 p，

(ii) $\sup_n \Sigma_{i=1}^{n} |w_{in}| < \infty$。

证明　因为 $\|I_n\| = \Sigma_{i=1}^{n} |w_{in}|$，从而这是 Banach-Steinhaus 定理的直接结果。 □

若对所有的 i 及 n 权 w_{in} 是非负的，则 (ii) 是 (i) 的结果。实际上，对由 $p(t) = 1$，$t \in [a, b]$ 定义的多项式

$$b - a = \int_a^b dt = \lim_n \sum_{i=1}^{n} w_{in}.$$

在条件 (i) 中，全体多项式集合可由在 $C(a, b)$ 中稠密的任何其它集合代替，如所有逐段线性的连续函数集合。

现在，我们来描述获得求积公式的基本方法。在 $[a, b]$ 内给出 $\{t_{in}\}_1^n$ 及 n 个无关函数 $\{e_i^{(n)}\}_1^n$ 使

$$e_i^{(n)}(t_{jn}) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n,$$

考虑插值投影，对于 $x \in C(a, b)$ 定义

$$x \mapsto \pi_n x = \sum_{i=1}^{n} x(t_{in}) e_i^{(n)}$$

并且定义

$$I_n(x):=\int_a^b(\pi_n x)(t)dt=\sum_{i=1}^{n}w_{in}x(t_{in})$$

其中

$$w_{in}=\int_a^b e_i^{(n)}(t)dt,\qquad i=1,\cdots,n.$$

设 $X_n=\{e_1^{(n)},\cdots,e_n^{(n)}\}$。对于 $x\in X_n$，$I_n(x)=I(x)$，即在 X_n 上 I_n 是精确的。

例4.2 在[0，1]上，$n+1$ 个等距分点的梯形法则是

$$I_n(f)=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(n)+\sum_{j=1}^{n-1}f\left(\frac{j}{n}\right)\right].$$

X_n是$C(0,1)$的子集，由逐段线性函数所组成。

让我们考虑$X_n=\mathbb{P}_{n-1}$. 于是由其构造引理 4.2的条件（i）成立。因而关于这些公式收敛的充分必要条件是条件（ii）成立. 特别是，如果$w_{in}\geq 0$，收敛性成立. 对于$\{t_{in}\}_1^n$的所有选择这种收敛性不是都能成立.

例4.3 若$\{t_{in}\}_1^n$是$[a,b]$上的Chebyshev点，则权是正的，而且求积公式收敛（Laurent，1972，P.317）。

例4.4 $\{t_{in}\}_1^n$是 Gauss 点（即 n 次 Legendre 多项式的零点），则 n 点Gauss 求积公式对直至$2n-1$次多项式是精确的，且权是正的。

在某些情形下，直接应用简单的求积公式是不能令人满意的。例如，当 x 迅速振动时就会出现这种情况. 乘积积分技巧可以用以克服这些困难。我们记$x(t)=r(t)\sigma(t)$，这里$r(t)$是性态良好的，而$\sigma(t)$含有引起困难的部分. 用

$$I_n(x)=\int_a^b\sigma(t)(\pi_n r)(t)dt=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_a^b\sigma(t)e_i^{(n)}(t)dt\right]r(t_{in})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_{in} r(t_{in})$$

来逼近$I(x)$。$\sigma(t)$应是足够简单，以便使权w_{in}可以在封闭的形式中计算（Atkinson，1976a；Sloan，1980a）。

习题

4.8 考虑$I(r) = \int_0^1 [r(t)/\sqrt{t}]dt$。计算对应于$n+1$个等距分点的梯形法则用于$r(t)$的权。如果$r \in C^2(0, 1)$，证明

$$|(I - I_n)(r)| \leqslant \frac{2}{n^2} \max_{t \in [0,1]} |r''(t)|$$

关于更多的数值积分内容，读者可参阅例如Davis和Rabinowitz（1974）及Stroud（1971）。

3. 投影法

设X是复Banach空间，X_n是X的有限维子空间，且π_n是从X到X_n上的有界投影：$\pi_n X = X_n$.(4.1)及（4.2）在X_n内分别用有限维问题

$$\pi_n T x_n - z x_n = \pi_n f, \quad x_n \in X_n \tag{4.4}$$

及

$$\pi_n T \varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad 0 \neq \varphi_n \in X_n \tag{4.5}$$

逼近。

这是在子空间X_n上的一般投影法。x_n（或λ_n，φ_n)是这样计算的，使剩余$(T - z)x_n - f$（或$(T - \lambda_n)\varphi_n$）在X_n内具有零投影。注意$\pi_n x_n = x_n$（或$\pi_n \varphi_n = \varphi_n$）。这方法常常称为Galerkin方法。

术语的注记 在积分方程的内容中，Banach空间内的投

影法常常命名为 Galerkin 法。相反地，在微分方程的内容中这一命名常常在更多限制下使用，即限制在当投影在 Hilbert 空间内是正交的。因而导致我们介绍两个定义：Galerkin 法（或者在Banach空间，或者在Hilbert 空间内斜投影）及正交 Galerkin 缩写为⊥—Galerkin（在 Hilbert 空间内正交投影）.

3.1 相应的离散问题

X_n内的问题用$\mathscr{T}_n := \pi_n T|_{X_n}$定义：

$$(\mathscr{T}_n - z)x_n = \pi_n f, \quad \mathscr{T}_n \varphi_n = \lambda_n \varphi_n.$$

X_n的维数取决于n。为了简单起见，我们令$\dim X_n := n$。给出X_n的基$\{e_i^n\}_1^n$及$X_n^* = \pi_n^* X^*$的伴随基$\{e_i^{(n)*}\}_1^n$，投影π_n是这样的，$\pi_n x = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i^{(n)*}\rangle e_i^{(n)}$。我们定义与$\mathscr{T}_n$相应的矩阵：

$$\widetilde{A}_n := (a_{ij}^{(n)}) = (\langle T e_j^{(n)}, e_i^{(n)*}\rangle), \quad i,j = 1,\cdots,n,$$

及向量

$$\xi_n := (\xi_{in}), \quad u_n := (u_{in}), \eta_n := (\eta_{in}), \quad i = 1,\cdots,n$$

其中

$$\xi_{in} = \langle x_n, e_i^{(n)*}\rangle, \quad u_{in} = \langle \varphi_n, e_i^{(n)*}\rangle, \quad \eta_{in} = \langle f, e_i^{(n)*}\rangle.$$

ξ_n及u_n分别是$\mathbb{C}^n$中矩阵问题

$$(\widetilde{A}_n - zI)\xi_n = \eta_n \quad 与 \quad \widetilde{A}_n u_n = \lambda_n u_n$$

的解。于是X_n中的解x_n及φ_n从它们关于基$\{e_i^{(n)}\}_1^n$的分量而得到。

从计算的观点来看，更有趣的是考虑X_n及X_n^*中的基不是伴随的，即是这样

$$\langle e_i^{(n)*}, e_j^{(n)}\rangle \neq \delta_{ij}$$

例如若X_n是三次样条函数子集，则B-样条（de Boor，1968；Prenter，1975）是这种类型极好的基。

考虑X_n的基$\{x_i^{(n)}\}_1^n$及X_n^*的基$\{y_i^{(n)}\}_1^n$，其相应的Gram矩阵为

$$\widetilde{B}_n=(b_{ij}^{(n)})=(\langle x_j^{(n)},\ y_i^{(n)}\rangle),\qquad i,\ j=1,\cdots,n.$$

现在π_n用$\pi_n x=\Sigma_{i=1}^m\langle x,\ \widetilde{B}_n^{-1H}y_i^{(n)}\rangle x_i^{(n)}$定义。$\widetilde{A}_n$，$\xi_n$，$u_n$及$\eta_n$分别用$\langle Tx_j^{(n)},\ y_i^{(n)}\rangle$，$\langle x_n, y_i^{(n)}\rangle$，$\langle\varphi_n,\ y_i^{(n)}\rangle$，及$\langle f,\ y_i^{(n)}\rangle$定义。要解决的矩阵问题是

$$(\widetilde{A}_n-z\widetilde{B}_n)\xi_n=\eta_n\quad 及\quad \widetilde{A}_n u_n=\lambda_n\widetilde{B}_n u_n.$$

3.2 一些例子

如果不致混乱，现在略去t_i与e_i上的指标n，虽然n仍有效用。

例4.5 设$X=C(a,\ b)$。用点t_i，$(i=1,\cdots,n)$ $t_1=a$，$t_n=b$，划分$[a,\ b]$为$n-1$个区间。设X_n是X的子集，由$[a,\ b]$上逐段线性函数所组成，有第二章例2.6所定义的基$\{e_i\}_1^n$。π_n是在点$\{t_i\}_1^n$的逐段线性插值投影，由$\pi_n x=\Sigma_{i=1}^n x(t_i)e_i$定义。显然，若

$$\max_{2\le i\le n}|t_i-t_{i-1}|\to 0$$

则$\pi_n\xrightarrow{p}1$。相应的矩阵$\widetilde{A}_n$由

$$a_{ij}^{(n)}=\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}k(t_i,\ s)e_j(s)ds\ ,\quad i,\ j=1,\ \cdots,\ n$$

定义，$(t_0=a,\ t_{n+1}=b)$。这是在配置点$\{t_i\}_1^n$上的配置法的例子，具有基函数$\{e_i\}_1^n$（参阅第3.5节）。

例4.6 设$X=L^2(a,b)$。在点t_i，$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=$

b 将$[a, b]$划分为n个区间。令$\Delta_i := [t_{i-1}, t_i)$, $i=1,\cdots,n$。X_n是$[a, b]$上逐段常数函数集合，并且基$\{e_i\}_1^n$是n个Δ_i的特征函数的集合，在Δ_i上$e_i(t)=1$，在其它地方等于零. e_i^*是X上的泛函由

$$\langle e_i^*, x\rangle = \frac{1}{t_i - t_{i-1}}\int_{\Delta_i}\overline{x(t)}dt$$

定义。π_n是平均投影

$$(\pi_n x)(t) = \frac{1}{t_i - t_{i-1}}\int_{\Delta_i} x(t)dt, \quad t \in \Delta_i.$$

若$\max_{1\leq i\leq n}|t_{i-1} - t_i| \to 0$，则对于$x \in C(a,b)$，$\pi_n x \to x$. 但是在$L^\infty(a, b)$中存在函数$f$使得$\pi_n f \not\to f$。矩阵$\widetilde{A}_n$由

$$a_{ij}^{(n)} = \frac{1}{t_i - t_{i-1}}\int_{\Delta_i}\int_{\Delta_j} k(s,t)dtds \qquad i,j=1,\cdots,n,$$

定义。这是分离区域法的例子(Mikhlin 和 Smolitskii 1967, P.254)。

例4.7 设$H = L^2(a,b)$。设$\{e_i\}_{\mathbb{N}}$是H的标准正交基。于是对于$i \in \mathbb{N}$，$e_i = e_i^*$。E_n是由$e_1, \cdots, e_n$张成。π_n是E_n上的正交投影。令

$$a_{ij} := \int_a^b \overline{e_i(t)}\int_a^b k(t,s)e_j(s)dsdt, \quad i,j=1,2, \cdots.$$

$\widetilde{A}_n$的元素不依赖于n. $\widetilde{A}_n$是系数为a_{ij}的无限矩阵的n阶左上方阵。这是最初的Galerkin法。它用算子T_n代替T，T_n是在E_n上用核

$$k_n(t,s) = \sum_{i=1}^n \left[\int_a^b k(t,s)\, e_i(s)ds\right]\overline{e_i(s)} = \sum_{i=1}^n u_i(t)\overline{e_i(s)}$$

定义的。对于$x \in E_n$，令

$$\xi_j := \int_a^b \overline{e_j(s)}x(s)ds, \qquad j=1, \cdots, n.$$

于是$x(s)=\Sigma_{j=1}^{n}\xi_j e_j(s)$且

$$(T_n x)(t)=\int_a^b k_n(t,s)x(s)ds=\sum_{j=1}^{n}\xi_j u_j(t).$$

在基$\{e_i\}_1^n$下T_n用矩阵$\widetilde{A}_n$表示。核k_n是函数的有限和，这些函数是t的函数与s的函数的乘积。这种核称为退化核.

例4.8 在$H=L^2(a,b)$中，⊥—Galerkin 法的另一个例子是用矩法给出（Vorobyev, 1965），这里π_n是对H中已知的u在$\{u, Tu,\cdots,T^{n-1}u\}$上的正交投影。

例4.9 当T是 Hilbert 空间H中自伴正定算子时，⊥—Galerkin 法取 Rayleigh—Ritz 法的特殊形式. 设E_n是H的有限维子空间。π_n是E_n上的正交投影。

Rayleigh—Ritz方法在于用$\pi_n[Tx_n-f]=0$的解$x_n\in E_n$来逼近$Tx=f$的解x. 在H上定义数量积$(x,y)_T:=(Tx,y)$及相应的范数$\|x\|_T^2:=(Tx,x)$。 于是

$$Tx_n-f\in E_n\Longleftrightarrow x_n-x\perp_T E_n,$$

这里$\perp_T$表示关于数量积$(\cdot,\ \cdot)_T$的正交性。x_n是x在E_n中关于范数$\|\cdot\|_T$的最小二乘解

$$\|x_n-x\|_T=\min_{y\in E_n}\|x-y\|_T.$$

习题

4.9 考虑无限的方程组$\Sigma_{j=1}a_{ij}x_j-x_i=b_i$, $i=1,2\cdots$,假设

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<\infty,\quad \sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^2<\infty.$$

在具有典范基$\{e_i\}_N$的l^2内考虑问题。表征出由$E_n=\{e_1,\cdots,e_n\}$定义的⊥—Galerkin 法的逼近解。给出原方程组有唯一解的关于(a_{ij})的充分条件。

3.3 Petrov法

考虑X的两个具有相同有限维数的子空间X_n及Y_n，投影法可以推广。X_n是右子空间，而Y_n是左子空间。设π_n是在Y_n上的投影。分别用

$$\pi_n[(T-z)x_n-f]=0,\quad x_n\in X_n, \tag{4.6}$$

及

$$\pi_n[(T-\lambda_n)\varphi_n]=0,\quad \varphi_n\in X_n \tag{4.7}$$

来逼近(4.1)及（4.2)。注意现在$\pi_n x_n\neq x_n$（或$\pi_n\varphi_n\neq\varphi_n$）。定义$\tilde{\pi}_n:=\pi_{n\restriction X_n}:X_n\to Y_n$，并且引入条件：

对于足够大的n，$\tilde{\pi}_n^{-1}$存在且一致有界。 (4.8)

习题

4.10 写出在X_n及Y_n的给定基下，相应于(4.6)及(4.7)的离散问题。

4.11 考虑$\pi'_n:=\tilde{\pi}_n^{-1}\pi_n$。证明$\pi'_n$是在$X_n$上的投影。推导在条件（4.8)下Petrov法等价于在X_n上用投影π'_n确定的Galerkin法。

4.12 设E_n及F_n是Hilbert空间H的子空间，且$\dim E_n=\dim F_n<\infty$。π_n是在F_n上的正交投影，参见图4.1。我们定义

$$\theta_n:=\Theta(E_n,F_n),$$

$$\tau_n:=\inf_{\substack{x\in E_n\\ \|x\|=1}}\|\pi_n x\|=(\|\tilde{\pi}_n^{-1}\|)^{-1}.$$

证明$\theta_n^2+\tau_n^2=1$。推导，对于足够大的n

$$\|\tilde{\pi}_n^{-1}\|<\infty\Longleftrightarrow\Theta(E_n,F_n)<1$$

(Krasnoselskii 等，1972)

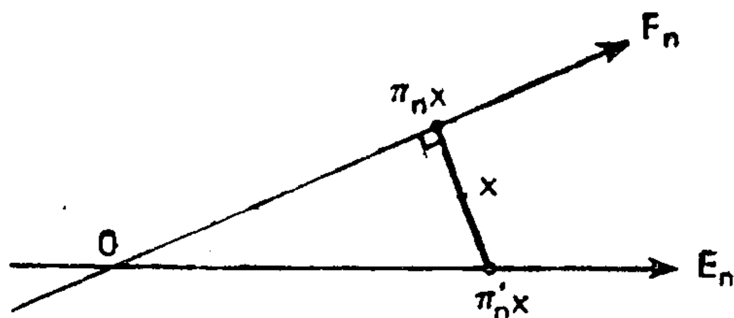


图 4.1

注记 当条件（4.8）满足时，Petrov 法在理论上与 Galerkin 法没有差别（习题4.11）。Petrov法常常称为推广的 Galerkin法．我们也区别 Petrov法（在 Banach 空间或在 Hilbert 空间具有斜投影）与在 Hilbert 空间中具有正交投影 π_n 的⊥-Petrov法．注意当$\mathrm{Sup}_n\,\Theta(E_n,F_n)<1$ 时，⊥-Petrov 法等价于（斜）Galerkin 法．在俄文文献中，Petrov，⊥-Petrov，及⊥-Galerkin法分别称为投影法，Petrov-Galerkin 法及Bubnov-Galerkin法（Krasnoselskii 等，1972）。

例4.10 设 T 是复 Hilbert 空间 H 中的有界算子．对于 $y\in H$，我们考虑方程 $(T-z)x=y$，$z\in\rho(T)$。设在 H 中给出两个稠密序列$\{e_i\}_N$及$\{f_i\}_N$。按形式$x_n=\Sigma_{i=1}^n\xi_{in}e_i$寻求逼近解$x_n$。其中系数$\xi_{in}$由剩余 $(T-z)x_n-y$正交于 $f_1,\cdots,f_n$的条件决定，即

$$((T-z)x_n-y,f_i)=0,\quad i=1,\cdots,n.$$

这给出

$$\sum_{j=1}^{n}((T-z)e_j,\ f_i)\xi_{jn}=(y,f_i),\quad i=1,\cdots,n.$$

$E_n:=\{e_1,\cdots,e_n\}$及$F_n:=\{f_1,\cdots,f_n\}$ 是H的子空间。设π_n是从H到 F_n 上的正交投影．上面 $n\times n$ 方程组等价于方程

$$\pi_n[(T-z)x_n-y]=0,\quad x_n\in E_n.$$

这是最初的 Petrov 法. 其相应的逼近本征值问题是

$$((T-\lambda_n)\varphi_n,\ f_i)=0,\quad i=1,\cdots,n,$$

$$\varphi_n=\sum_{j=1}^{n}u_{jn}e_j.$$

这给出

$$\sum_{j=1}^{n}(Te_j,\ f_i)u_{jn}=\lambda_n\sum_{j=1}^{n}(e_j,f_i)u_{jn},\quad i=1,\cdots,n$$

例4.11 我们在前面例子中选择 $F_n=TE_n$. 方程 $Tx=f$ 具有 $T^{-1}\in\mathscr{L}(H)$ 用

$$\pi_n[Tx_n-f]=0,\quad x_n\in E_n$$

来逼近, 这里 π_n 是 $F_n=TE_n$ 上的正交投影. 这就定义了最小二乘法. 容易验证 $x_n\in E_n$ 是极小化问题

$$\|Tx_n-f\|=\min_{y\in E_n}\|Ty-f\|$$

的解.

习题

4.13 设 T 是自伴正定. 说明最小二乘法作为 $\perp_T$-Galerkin方法, 由关于数量积 $(\cdot,\cdot)_T$ 是正交的投影所确定.

在 $\mathbb{C}^N$ 中, $\perp$-Petrov法连同斜投影法的例子已经在第一章第5节给出 (见 Saad, 1982a). Petrov 法的其它例子将在 B 部分中考虑.

3.4 关于 Kantorovitch 正则化方程的投影法

对于那些使 $\pi_n f\not\to f$ 的方程 (4.1) (见第2.1节), Kantorovitch (1948) 提出了下面的修正. 当仍有 $\pi_n Tf\to Tf$ 时. 令 $y:=Tx$. 于是, 由 (4.1), y 满足 $y-zx=f$. 乘以 T, 得到"正则化"方程

$$(T-z)y=Tf, \quad x=(1/z)(y-f),$$

对它们用投影法（若 $z\neq 0$），引出

$$(\pi_n T-z)y_n=\pi_n Tf, \quad y_n\in X_n,$$

$$x_n'=(1/z)(y_n-f), \quad 若 z\neq 0. \tag{4.9}$$

x_n'不属于X_n. 注意（4.9）与（4.4）引出相同的矩阵$\widetilde{A}_n$.这方法需要计算 Tf.

注意上述的正则化与不适定问题的 Tichonov 的正则化毫无共同之处.

习题

4.14 设$\widetilde{x}$是（4.1）的逼近解且令 $r:=f-(T-z)\widetilde{x}$, $v:=x-\widetilde{x}$. 然后考虑方程 $(T-z)v=r$. 写出正则化方程，以及它的投影逼近. 推导关于 x 的另一个逼近.

3.5 配置法

已知 n 个无关函数的集合$\{l_i\}_1^n$，且已知在$[a,b]$上有 n 个配置点$\{\tau_i\}_1^n$ 使得 $\det(l_j(\tau_i))\neq 0$，按照形式

$$x_n=\sum_{i=1}^n \xi_{in}l_i, \quad \varphi_n=\sum_{i=1}^n u_{in}l_i,$$

来寻找解x_n及φ_n. 对τ_i及 l_i, $i=1,\cdots,n$,仍然省略指标 n.

配置法的基本思想是决定系数ξ_{in}及u_{in}使得各个剩余 $(T-z)x_n-f$及$T\varphi_n-\lambda_n\varphi_n$在 n 个点 $\{\tau_i\}_1^n$ 上等于零. 引出两个 $n\times n$ 方程组：

$$\sum_{j=1}^n\left[\int_a^b k(\tau_i,s)l_j(s)ds-zl_j(\tau_i)\right]\xi_{jn}$$

$$=f(\tau_i), \quad i=1,\cdots,n; \tag{4.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b k(\tau_i,s)l_j(s)ds\right)u_{jn}$$

$$=\lambda_n\sum_{j=1}^{n}l_j(\tau_i)u_{jn},\quad i=1,\cdots,n. \qquad (4.11)$$

我们定义矩阵$\widetilde{A}_n$及$\widetilde{B}_n$，它们的元素为

$$a_{ij}^{(n)}=\int_a^b k(\tau_i,s)l_j(s)ds,\quad b_{ij}^{(n)}=l_j(\tau_i),$$

$$i,j=1,\cdots,n.$$

于是（4.10）及（4.11）可写为

$$(\widetilde{A}_n-z\widetilde{B}_n)\xi_n=(f(\tau_i)),\quad \widetilde{A}_nu_n=\lambda_n\widetilde{B}_nu_n.$$

为说明配置法对应于投影法，先令$X_n:=\{l_1,\cdots,l_n\}$。定义到X_n上的投影π_n，使得π_nx是在X_n中的元素，它是x在点$\{\tau_i\}_1^n$的插值函数。令

$$(\pi_nx)(t)=\sum_{j=1}^{n}c_{jn}l_j(t).$$

因为$\det(l_j(\tau_i))\neq 0$，从而c_{jn}由

$$\sum_{j=1}^{n}c_{jn}l_j(\tau_i)=x(\tau_i),\quad i=1,\cdots,n$$

唯一确定。留给读者验证（4.10）及（4.11），可以写成具有投影π_n的形式（4.4）及（4.5）。所以配置法是投影法，并以插值投影来定义的．在实际中，从两大类函数中选出基函数集$\{l_i\}_1^n$：第一类是逐段多项式，第二类是在$[a,b]$上用单个表达式定义的多项式。在第一类情形通常有逐点收敛$\pi_n\xrightarrow{p}1$，由此可以建立方法的收敛性。在第二类情形收敛性依赖于配置点

$\{\tau_i\}_1^n$的选择（参阅第2节）对于Chebyshev点及 Lagrange 插值，$\|L_n\|_\infty$是与 log n成比例的，增长最慢．此外，在$\{\tau_i\}_1^n$的插值误差公式，对于足够光滑的x，有

$$x(t)-(L_nx)(t)=\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}(t-\tau_i)x^{(n)}(s),$$

$$a\leqslant s\leqslant b,$$

而且联想到Chebyshev 零点，因为这样选择使$\max_{t\in[a,b]}|\prod_{i=1}^n(t-\tau_i)|$最小（见Chency，1966，P.61）

应该注意，不像在$L^2(a,b)$中的⊥-Galerkin 法，配置法不需要为$\widetilde{A}_n$及$\widetilde{B}_n$中的数积计算积分（比较（4.10）及(4.11）与第3.1节的一般公式）．

习题

4.15 证明在$L^2(a,b)$中关于（4.1）的⊥-Galerkin 法，这里数量积用近似求积公式计算，等价于配置法，其中配置点确定为Galerkin 法所选择的求积法的结点．

4.16 说明配置法作为Petrov 法，$X_n=\{l_1,\cdots,l_n\}$，π_n是在$\{\tau_i\}_1^n$上的插值投影由$Y_n=\{l_1',\cdots,l_n'\}$所定义，使得 $\det(l_i'(\tau_j))\neq 0$，l_i'是任意的．

推广的翼剖面方程的Bland 的配置法可以解释为关于$T:X\to Y$的Petrov法，分别由X，Y的子空间X_n，Y_n所定义．（见Bland，1970；Fromme 和 Golberg，1978）．

3.6 文献的注释

投影法已经用了很长的时间．它的抽象化处理至少可追溯到Kantorovitch（1948）及Kantorovitch 和 Akilov（1964）．

在 Atkinson (1976a) 中给出具有矩阵$\widetilde{A}_n - zI$或$\widetilde{A}_n - z\widetilde{B}_n$的离散方程组的稳定性分析，读者在那里可以找到有关退化核方法的研究（参见例4.13）。配置法由 Kantorovitch 就常微分方程引入（参照第8节）。在 Chebyshev 点上的多项式配置法曾在 Karpilovskaia (1963) 及 Vainikko (1965) 中作了研究。最近由于逐段多项式的使用，配置法已被重新考察。Petrov法在 Krasnoselskii 等 (1972) 中详尽研究. 自动与非自动积分方程解程序的比较试验在 Riddell 和 Delves (1980)中做出。

4. 近似求积法

在近似求积法中，(4.3) 的积分用某个求积法则逼近. 我们在这里讨论Ω是有限区间 $[a,b]$，$X = C(a,b)$ 的情形。我们假设 (4.3) 所确定的积分算子的核在$[a,b]\times[a,b]$上连续. 对于 t_i，e_i，w_i 仍然略去指标n，并且假设给出一个插值公式

$$I_n(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b e_i(t)dt\right)x(t_i),$$

对于所有连续的 x 它收敛于$I(x) = \int_a^b x(t)dt$.

4.1 Fredholm 法

在 (4.1) 与 (4.2) 中，积分用求积公式I_n来数值逼近. 给出

$$\sum_{j=1}^{n} w_j k(s,t_j)x_n(t_j) - zx_n(s) = f(s),$$

$$a \leqslant s \leqslant b, \tag{4.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j k(s, t_j)\varphi_n(t_j) = \lambda_n \varphi_n(s),$$

$$a \leqslant s \leqslant b. \tag{4.13}$$

Fredholm 法在于用相同的结点来离散 s，从而得到 $n \times n$ 方程组

$$\sum_{j=1}^{n} w_j k(t_i, t_j) x_n(t_j) - z x_n(t_i) = f(t_i),$$

$$i = 1, \cdots, n, \tag{4.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j k(t_i, t_j)\varphi_n(t_j) = \lambda_n \varphi_n(t_i),$$

$$i = 1, \cdots, n \tag{4.15}$$

当令

$$\widetilde{A}_n := (w_j k(t_i, t_j)), \quad \xi_n := (x_n(t_i)),$$
$$u_n := (\varphi_n(t_i)),$$

(4.14) 及 (4.15) 可以改写为

$$(\widetilde{A}_n - zI)\xi_n = (f(t_i)) \quad \text{及} \quad \widetilde{A}_n u_n = \lambda_n u_n.$$

当在 $\mathbb{C}^n$ 中计算离散解 ξ_n 及 u_n 时，在 $\mathbf{X}_n := \{e_1, \cdots, e_n\}$ 中 (4.14) 及 (4.15) 的解取为

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_{in} e_i \qquad \text{及} \qquad \varphi_n = \sum_{i=1}^{n} u_{in} e_i.$$

x_n 及 φ_n 是从在点 $\{t_i\}_1^n$ 的值计算而得的函数，用相应于求积公式 I_n 的插值。

习题

4.17 比较 Fredholm 法的矩阵与用 π_n 定义的投影法的矩

阵，其中 $\pi_n x = \Sigma_{i=1}^{n} x(t_i) e_i$.

4.2 Nyström法

从方程（4.14）及（4.15）得知 $x_n(t_i)$ 及 $(\lambda_n, \varphi_n(t_i))$，假设 z 及 λ_n 非零，由计算

$$x_n(s) = \frac{1}{z} \sum_{j=1}^{n} w_j k(s, t_j) x_n(t_j) - \frac{1}{z} f(s), \qquad (4.16)$$

$$\varphi_n(s) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j=1}^{n} w_j k(s, t_j) \varphi_n(t_j), \qquad (4.17)$$

我们可以对于 $s \neq t_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 解方程（4.12）及（4.13）。Nyström（1930）首先考察了这方面的问题. 方程（4.16）及（4.17）称为"自然的"插值公式，因为给出了 $x_n(t_i)$，$\varphi_n(t_i)$，$i = 1, \cdots, n$，它们对所有 t 确定了 $x_n(t)$ 及 $\varphi_n(t)$。

习题

4.18 证明只有当 $x_n(t_i)$ 是（4.14）的解时，（4.16）才是从 $x_n(t_i)$ 得到 $x_n(t)$ 的插值法.

自然的插值包含算子 T 的某些情况，并且作为一个结果，Nyström 解将常常比 Fredholm 解更为重要（参阅第六章）. Nyström 及 Fredholm 解可以认为是在点 $\{t_i\}_1^n$ 的值之间的两个不同的插值函数.

4.3 乘积积分

如果核 k 是光滑的，但是右边 f 不是光滑的，第3.4节的正则化技巧指出了Nyström法如何用于正则化方程

$$(T - z)y = Tf, \quad x = (1/z)(y - f).$$

这里，Tf 至少如同核 k 那样光滑.

当核 k 是不连续或坏性态时，求积法则应该属于乘积积分形式。我们写 $k(s,t)=r(s,t)\sigma(s,t)$，这里对于 $[a,b]$ 内的每个 s，r 是 t 的正则函数，而 $\sigma(s,t)$ 是奇异的或坏性态的。

用2.2节的记号，（4.3）中的积分由

$$\int_a^b \sigma(s,t)\left[\sum_{i=1}^{n} x(t_i)r(s,t_i)e_i(t)\right]dt$$

$$=\sum_{i=1}^{n} w_i(s)r(s,t_i)x(t_{in}),$$

这里

$$w_i(s)=\int_a^b \sigma(s,t)e_i(t)dt.$$

实用上最重要之处在于有一个函数 $\sigma(s,t)$，对于它，权 $w_i(s)$ 能用某些求积公式来计算。对于

$$\sigma(s,t)=1/|s-t|^{\alpha},\quad \alpha<1 \quad 及\sigma(s,t)=\log|s-t|$$

在 Atkinson（1976a）中已经做到。

于是乘积积分解 $x_n(s)$（或 $\varphi_n(s)$）由方程（4.14）及（4.16)(或（4.15）及（4.17)）来计算，这里权 w_j 用 $w_j(t_i)$ 及 $w_j(s)$ 来替代。

完全离散化方法由Fredholm（1903）提出。自从Nyström变形于1930年引入以来便被广泛应用。乘积积分由Young（1954）作出，并且由Atkinson（1972，1976a）所研究。Kantorovitch的正则化方程的用法和Nyström法的迭代变形同许多数值试验一块也可在 Atkinson（1976a）中找到。

5. 迭代解及迭代本征向量

假设 z 及 λ 两者都不等零。这当然不是一个限制，当 T 是

紧的，因为 z 属于 $\rho(T)$，不能等于零，以及 T 的任何孤立本征值也不等于零。如果当 $n\to\infty$ 时 $\lambda_n\to\lambda$，那么对于足够大的 n，λ_n 不等于零。z 或 λ 等于零的情形，见习题4.20及4.21。

设 x_n（或 λ_n，φ_n）是（4.1）（或（4.2））的逼近解。我们从 x_n（或 λ_n，φ_n）定义迭代解 $\tilde{x}_n$（或迭代本征向量 $\tilde{\varphi}_n$）为

$$\tilde{x}_n=(1/z)(Tx_n-f), \tag{4.18}$$

$$\tilde{\varphi}=(1/\lambda_n)T\varphi_n. \tag{4.19}$$

$\tilde{x}_n$ 可以认为是从逼近解 x_n 应用于方程 $x=(1/z)Tx-(1/z)f$ 的不动点迭代的结果。

习题

4.19 考虑 $\mathbb{C}\times X$ 中非线性算子 F：

$$(z,\ x)\overset{F}{\mapsto}\left(z,\ \frac{1}{z}Tx\right).$$

证明 $(\lambda,\ \varphi)$ 是 F 的不动点，并且说明（4.19）。

4.20 考虑方程 $Tx=f$，$0\in\rho(T)$。设 $0\neq z_0\in\rho(T)$ 是已知的。如果 x_n 是逼近解，证明迭代解可由

$$\tilde{x}_n=(1/z_0)[f-(T-z_0)x_n]$$

确定。

4.21 $\lambda=0$ 是 T 的本征值：$T\varphi=0$，$0\neq\varphi$。设 φ_n 是逼近本征向量：$T_n\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$，$0\neq\varphi_n$，使得当 $n\to\infty$ 时 $\lambda_n\to 0$。证明对任何已知的 $a\neq 0$，迭代的本征向量可由

$$\tilde{\varphi}_n=\frac{1}{\lambda_n+a}(T+a)\varphi_n$$

确定。

$\tilde{x}_n$ 与 $\tilde{\varphi}_n$ 的计算需要求出 Tu 的值，其中 u 是已知函数，或者是 x_n 或者是 φ_n。当这在封闭形式中不能做时，较高阶的

逼近T_M（$M \gg n$）可以用于逼近T_n（参阅例4.15）。例4.12讨论由投影方法得到的x_n及φ_n的情形。当然，在x_n（或λ_n, φ_n）之后，只有当$\tilde{x}_n$(或$\tilde{\varphi}$）比x_n（或φ_n）是x（或φ）的更好逼近时，$\tilde{x}_n$(或$\tilde{\varphi}_n$）的附加计算才有价值。这个问题将在第六章及第七章中考虑。

例4.12　设x_n（或φ_n）是（4.4）（或(4.5)）的解。T由投影法逼近。迭代的Galerkin解$\tilde{x}_n$（或$\tilde{\varphi}_n$）的使用已由Sloan（1976a，b）作为Galerkin法的变形而提出。$\tilde{x}_n$(或$\tilde{\varphi}_n$)是一个在X_n之外有非零分量的逼近解。注意$\pi_n \tilde{x}_n = x_n$(或$\pi_n \tilde{\varphi}_n = \varphi_n$）。而且$\tilde{x}_n$(或$\tilde{\varphi}_n$）的计算是相当省事的。实际上，若$x_n = \Sigma_{i=1}^n \xi_{in} e_i$，则$Tx_n = \Sigma_{i=1}^n \xi_{in} Te_i$，这里的$\{Te_i\}_1^n$在求出$\tilde{A}_n$时早已得到。所以仅需要一些附加存储器来内存这些向量，作为变量的预先指定值。

例4.13　设$\{e_i\}_1^\infty$是$H = L^2(a,b)$的标准正交基，且令$E_n := \{e_1, \cdots, e_n\}$。给出积分算子$T$，设$T_n$由退化核$k_n(s,t) = \Sigma_{i=1}^n (Te_i)(s) e_i(t)$所确定。退化核的方法在于解

$$(T_n - z)\tilde{x}_n = f \quad 对于 \quad \tilde{x}_n \in X.$$

因此

$$\tilde{x}_n(s) = -\frac{1}{z} f(s) + \frac{1}{z} \sum_{j=1}^n \xi_{jn}(Te_j)(s)$$

$$= \frac{1}{z}(Tx_n - f)(s), \qquad a \leqslant s \leqslant b,$$

这里$x_n = \Sigma_j \xi_{jn} e_j$并且$\xi_{jn}$是

$$\sum_{j=1}^n (Te_j, e_i)\xi_{jn} - z\xi_{in} = (f, e_i),$$

$$i = 1, \cdots, n$$

的解。考虑由 E_n 确定的 $\perp$ - Galerkin 法，我们看到 $\widetilde{x}_n$ 是迭代Galerkin解。

例4.14 设 x_n（或 φ_n）是由(4.10)（或 4.11）确定的配置解（或本征向量）．迭代解（或本征向量）满足

$$\widetilde{x}_n(s)=\frac{1}{z}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b k(s,t)l_j(t)dt\right)\xi_{jn}-\frac{1}{z}f(s)$$

$$a\leqslant s\leqslant b,$$

或

$$\left(\widetilde{\varphi}_n(s)=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b k(s,t)l_j(t)dt\right)u_{jn},\ a\leqslant s\leqslant b\right).$$

于是

$$\widetilde{x}_n(\tau_i)=\sum_{j=1}^{n}\xi_{jn}l_j(\tau_i)=x_n(\tau_i)\quad(\text{或}\widetilde{\varphi}_n(\tau_i)=\varphi_n(\tau_i)).$$

迭代解在配置点上是一致的。x_n及$\widetilde{x}_n$（或 φ_n 及 $\widetilde{\varphi}_n$）可以认为是由x_n（或φ_n）在点$\{\tau_i\}_1^n$处的值之间的插值而得到的两个不同的函数。

我们注意，如果对于所有 s， t，有$r(s,t)=1$，且$l_i=e_i$，$i=1,\cdots,n$．则$\widetilde{x}_n(s)$与乘积积分解是相等的。因而迭代配置法是乘积积分的特殊情形，其中 $k=\sigma$ 且集合 $\{l_i\}_1^n$ 满足$l_j(t_i)=\delta_{ij}$。因为假设 $\det(l_j(t_i))\neq 0$，总可以利用$X_n=\{l_1, \cdots, l_n\}$的基变换所得到的集合来讨论。

例4.15 当 x_n 是由（4.16）所确定的 Nyström 解时，Brakhage（1960）已经考虑$\widetilde{x}_M=(1/z)(T_Mx_n-f)$，这里 T_M 是T的一个逼近具有阶数$M\gg n$。因而$\widetilde{x}_M$是迭代 Nyström 解的一个逼近。

习题

4.22　写出相应于习题4.9确定的逼近解的迭代解。

4.23　证明由（4.18）及（4.19）所确定的$\tilde{x}_n$及$\tilde{\varphi}_n$是$(T\pi_n-z)\tilde{x}_n=f$及$T\pi_n\tilde{\varphi}_n=\lambda_n\tilde{\varphi}_n$的解。

4.24　设x_n及φ_n是由（4.6）及（4.7）所确定。证明$\tilde{x}_n$及$\tilde{\varphi}_n$分别满足$\pi_n x_n=\pi_n\tilde{x}_n\neq x_n$及$\pi_n\varphi_n=\pi_n\tilde{\varphi}_n\neq\varphi_n$。

6.　逼近算子的抽象框架

为了区别在前两节定义的各种解，我们介绍表4.1的记法，这里G，S，P，F及N分别代表 Galerkin，Sloan，projection（投影），Fredholm 及 Nyström。为了建立这些解之间及本征向量之间的相互关系，我们先初步研究如下。

表 4.1

	投影法					近似求积法			
方程编号	(4.4)	(4.5)	(4.18)[a]	(4.19)[a]	(4.9)	(4.14)	(4.15)	(4.16)	(4.17)
记号	$x_n=x_n^G$	$\varphi_n=\varphi_n^G$	$\tilde{x}_n=x_n^S$	$\tilde{\varphi}_n=\varphi_n^S$	$x'_n=x_n^P$	$x_n=x_n^F$	$\varphi_n=\varphi_n^F$	$x_n=x_n^N$	$\varphi_n=\varphi_n^N$

[a] 当$T_n=\pi_n T$

6.1　根据X的分解作T的分解

设$T\in\mathscr{L}(X)$，且设X有分解$X=Y\oplus Z$，这里Y及Z是X的两个互补闭子空间。设π是从X沿Z到Y上的投影。T按照投影π而分解成四部分。$T=T_1+T_2+T_3+T_4$，其中$T_1:=\pi T\pi$，$T_2:=\pi T(1-\pi)$，$T_3:=(1-\pi)T\pi$，及$T_4=(1-$

$\pi)T(1-\pi)$。T具有分块表示

$$T=\left(\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right).$$

我们在$\mathscr{L}(X)$中考虑下面三个算子：

$$T_\alpha := \pi T \pi, \quad 即 \quad T_\alpha = T_1,$$

$$T_\beta := \pi T, \quad 即 \quad T_\beta = T_1 + T_2,$$

$$T_\gamma := T\pi, \quad 即 \quad T_\gamma = T_1 + T_3.$$

注记 当π是Hilbert空间中的正交投影时，$T_\alpha=\pi T\pi$称为T的压缩，反之，T称为T_α的膨胀。（见Halmos，1950；Sz-Nagy和Foias，1970）。

我们令$\mathscr{T}:=\pi T_{\restriction Y}: Y\to Y$，且在$\mathscr{L}(Y)$中定义，$\mathscr{R}(z):=(\mathscr{T}-z)^{-1}$对于$z\in\rho(\mathscr{T})$。设$\mu\neq 0$是$\mathscr{T}$的一个具有有限重数的本征值，用Jordan曲线$\Gamma$孤立之，相应于$\mu$的谱投影是

$$\mathscr{P}=\frac{-1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma \mathscr{R}(z)dz\in\mathscr{L}(Y);$$

$\mathscr{D}=(\mathscr{T}-\mu)\mathscr{P}$是对应的幂零算子，且$l$是$\mu$的陡度。

定理4.3 对$\kappa\in\{\alpha,\beta,\gamma\}$，在$\rho(\mathscr{T})$中任何非零的$z$属于$\rho(T_\kappa)$而且由$\Gamma$孤立的具有有限重数$\mathscr{T}$的任何非零本征值$\mu$是$T_\kappa$的本征值且具有相同的重数。如果$\Gamma$不包围0，下面的公式成立：

$$R_\alpha(z)=\mathscr{R}(z)\pi-(1/z)(1-\pi),\quad P_\alpha=\mathscr{P}\pi, \tag{4.20}$$

$$R_\beta(z)=(1/z)\mathscr{R}(z)T_\beta-1/z,\quad P_\beta=\mathscr{E}\mathscr{P}T_\beta, \tag{4.21}$$

$$R_\gamma(z)=(1/z)T_\gamma\mathscr{R}(z)\pi-1/z,\quad P_\gamma=T_\gamma\mathscr{E}\mathscr{P}\pi \tag{4.22}$$

其中

$$\mathscr{E}=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{1}{\mu}\left(\frac{-\mathscr{D}}{\mu}\right)^k.$$

证明 我们首先在形式上解$(T-z)x=f$，在三种情

形下得到$x=R(z)f$.

情形 1
$$(T_\alpha-z)x=f \Longleftrightarrow \begin{cases}(\mathscr{T}-z)\pi x=\pi f\\ -z(1-\pi)x=(1-\pi)f\end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\pi x=\mathscr{R}(z)\pi f\\ (1-\pi)x=-(1/z)(1-\pi)f.\end{cases}$$
因此在$\rho(\mathscr{T})$中的任何$z\neq 0$都在$\rho(T_\alpha)$中。

情形 2
$$(T_\beta-z)x=f \Longleftrightarrow \begin{cases}(\mathscr{T}-z)\pi x+\pi T(1-\pi)x=\pi f\\ -z(1-\pi)x=(1-\pi)f\end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow x=\mathscr{R}(z)\left[\pi f+\frac{1}{z}\pi T(1-\pi)f\right]-\frac{1}{z}(1-\pi)f\text{。}$$
$\mathscr{R}(z)\pi T\pi f=\mathscr{R}(z)\mathscr{T}\pi f=\pi f+z\mathscr{R}(z)\pi f$. 所以
$$x=\frac{1}{z}\mathscr{R}(z)T_\beta f-\frac{1}{z}f=R_\beta(z)f.$$
并且$\rho(\mathscr{T})$中的$z\neq 0$属于$\rho(T_\beta)$.

情形 3
$$(T_\gamma-z)x=f \Longleftrightarrow \begin{cases}(\mathscr{T}-z)\pi x=\pi f\\ (1-\pi)T\pi x-z(1-\pi)x=(1-\pi)f.\end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow x=\mathscr{R}(z)\pi f-\frac{1}{z}(1-\pi)f+\frac{1}{z}(1-\pi)T\mathscr{R}(z)\pi f$$
并且
$$\pi T\mathscr{R}(z)\pi f=\mathscr{T}\mathscr{R}(z)\pi f=\pi f+z\mathscr{R}(z)\pi f.$$
因此
$$x=\frac{1}{z}T_\gamma\mathscr{R}(z)\pi f-\frac{1}{z}f=R_\gamma(z)f\quad 且\ 0\neq z\in\rho(T_\gamma).$$
因为Γ不包围0且T_κ是有界的，显然在每种情形下，μ是$\sigma(T_\kappa)$在Γ内唯一的点。其相应的谱投影是由$R_\kappa(z)$在Γ上的积分而得到。我们推断$\dim P_\kappa X=\dim\mathscr{D}Y$. 因此$\mu$是$T_\kappa$的本征值。因为$\Gamma$不包围0，由

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma \mathscr{R}(z)\pi dz=\mathscr{P}\pi \quad 及 \quad \int_\Gamma \frac{dz}{z}=0$$

容易得出$P_\alpha=\mathscr{P}\pi$。

$$\frac{1}{z}\mathscr{R}(z)=-\frac{\mathscr{P}}{z(z-\mu)}-\sum_{k=1}^{l-1}\frac{\mathscr{D}^k}{z(z-\mu)^{k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z}(z-\mu)^k\mathscr{S}^{k+1}.$$

由于围绕μ在Γ上积分，我们得

$$P_\beta=\left[\frac{\mathscr{P}}{\mu}+\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{\mu}\left(\frac{-\mathscr{D}}{\mu}\right)^k\right]T_\pi=\mathscr{C}\mathscr{P}T_\beta.$$

类似地$P_\gamma=T_\gamma\mathscr{C}\mathscr{P}_\pi$。 □

对于$\kappa\in\{\alpha,\beta,\gamma\}$，简化预解式是$S_\kappa=\lim_{z\to\lambda}R_\kappa(z)(1-P_\kappa)$（或$\mathscr{S}=\lim_{z\to\lambda}\mathscr{R}(z)(1-\mathscr{P})$）。

推论 4.4 若$\mu\neq 0$，则下面公式成立

$$S_\alpha=\mathscr{S}\pi-\frac{1}{\mu}(1-\pi), \tag{4.23}$$

$$S_\beta=\frac{1}{\mu}\mathscr{S}T_\beta+\frac{1}{\mu}\mathscr{C}\mathscr{P}T_\beta-\frac{1}{\mu}, \tag{4.24}$$

$$S_\gamma=\frac{1}{\mu}T_\gamma\mathscr{S}_\pi+\frac{1}{\mu}T_\gamma\mathscr{C}\mathscr{P}_\pi-\frac{1}{\mu}. \tag{4.25}$$

证明 我们写出恒等式：

$$R_\alpha(z)(1-P_\alpha)=\mathscr{R}(z)(1-\mathscr{P})\pi-\frac{1}{z}(1-\pi)$$

及

$$R_\beta(z)(1-P_\beta)=\frac{1}{z}\mathscr{R}(z)T_\beta-\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\mathscr{R}(z)\mathscr{T}\mathscr{C}\mathscr{P}T_\beta$$

$$+\frac{1}{z}\mathscr{C}\mathscr{P}T_\beta.$$

$\mathscr{T}\mathscr{C}=\mathscr{C}\mathscr{T}$；所以

$$\mathscr{R}(z)\mathscr{T}\mathscr{C}\mathscr{P}=\mathscr{R}(z)\mathscr{C}(\mu\mathscr{P}+\mathscr{D})$$

$$= \mathscr{R}(z)\left\{\sum_{k=0}^{l-1}\left(\frac{-\mathscr{D}}{\mu}\right)^k\right\}\left(1+\frac{\mathscr{D}}{\mu}\right)\mathscr{P} = \mathscr{R}(z)\mathscr{P}$$

因为$\mathscr{D}^l = 0$，及

$$R_\beta(z)(1-P_\beta) = \frac{1}{z}\mathscr{R}(z)(1-\mathscr{P})T_\beta - \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\mathscr{E}\mathscr{P}T_\beta .$$

类似地

$$R_\gamma(z)(1-P_\gamma) = \frac{1}{z}T_\gamma\mathscr{R}(z)\pi - \frac{1}{z} - \frac{1}{z}T_\gamma\mathscr{R}(z)\mathscr{T}\mathscr{E}\mathscr{P}\pi$$

$$+\frac{1}{z}T_\gamma\mathscr{E}\mathscr{P}\pi = \frac{1}{z}T_\gamma\mathscr{R}(z)(1-\mathscr{P})\pi + \frac{1}{z}T_\gamma\mathscr{E}\mathscr{P}_\pi - \frac{1}{z}. \ \square$$

习题

4.25 假设Γ包围$\mathscr{T}$的K个具有有限重数的不同的非零本征值$\{u_i\}_1^i$. 设$\mathscr{P}_i$（或$\mathscr{D}_i$）是相应于陡度l_i的μ_i的谱投影（或幂零） 证明

$$P_a = \left(\sum_{i=1}^{k}\mathscr{P}_i\right)\pi,\quad P_\beta = \left(\sum_{i=1}^{k}\mathscr{E}_i\mathscr{P}_i\right)T_\beta,$$

$$P_\gamma = T_\gamma\left(\sum_{i=1}^{k}\mathscr{E}_i\mathscr{P}_i\right)\pi \text{ 其中}$$

$$\mathscr{E}_i = \sum_{k=0}^{l_i-1}\frac{1}{\mu_i}\left(\frac{-\mathscr{D}_i}{\mu_i}\right)^k.$$

6.2 投影方法

6.2.1 Galerkin法

由于$\mathscr{T}_n := \pi_n T_{\restriction X_n} : X_n \to X_n$，用表4.1的记号，方程(4.4)及（4.5）在 X_n 可以写为：

$$(\mathscr{T}_n - z)x_n^G = \pi_n f,\quad \mathscr{T}_n\varphi_n^G = \lambda_n\varphi_n^G.$$

如果我们令$\mathscr{R}_n(z) := (\mathscr{T}_n - z)^{-1} : X_n \to X_n$，则$x_n^G = \mathscr{R}_n(z)\pi_n f$.

但算子$\pi_n T: X\to X$ 也能很自然地想象到. 我们令 $T_n^P := \pi_n T$ 及 $R_n^P(z) := (T_n^P - z)^{-1}$。由定理 4.3 用 $X_n = \pi_n X$, $X = \pi_n X \oplus (1-\pi_n)X$, 于是对 $z\neq 0$ 得到 $R_n^P(z) = (1/z)\mathscr{R}_n(z)T_n^P - (1/z)$. 显然$R_n^P(z)\pi_n = \mathscr{R}_n(z)\pi_n$, 且 $x_n^G = R_n^P(z)\pi_n f$。

习题

4.26　证明φ_n^G是 T_n^P相应于λ_n的本征向量。

4.27　若令 $T_n^G := \pi_n T \pi_n$, 则$T_n^G = \mathscr{T}_n \pi_n$ 是类②的$\mathscr{T}_n$ 的扩张。证明

$$R_n^G(z) = \mathscr{R}_n(z)\pi_n - \frac{1}{z}(1-\pi_n)\text{及 } x_n^G = R_n^G(z)\pi_n f.$$

证明φ_n^G也是T_n^G相应于λ_n的本征向量。注意 $x_n^G \neq R_n^G(z)f = x_n^G - (1/z)(1-\pi_n)f$。这是条件 $x_n^G\in X_n$的结果。

4.28　考虑方程（4.9）. 证明$x_n' = x_n^P = R_n^P(z)f$。

4.29　设$\mathscr{M}_n$（或M_n^G, M_n^P）是$\mathscr{T}_n$(或 T_n^G, T_n^P)相应于本征值$\lambda_n\neq 0$的不变子空间，其中λ_n是是由不包围0的 Jordan 曲线Γ所隔离，证明

$$\mathscr{M}_n = M_n^G = M_n^P.$$

4.30　设φ是T的相应于λ的本征向量。证明 $P_n^P\varphi = (\lambda/\lambda_n) P_n^G\varphi$ 这里 P_n^P及 P_n^G分别是 T_n^P及 T_n^G相应于半单非零本征值λ_n的谱投影。

6.2.2 Sloan变形

我们令$T_n^S := T\pi_n$及 $R_n^S(z) := (T_n^S - z)^{-1}$. 对于$z\neq 0$,

$$R_n^S(z) = \frac{1}{z}T\mathscr{R}_n(z)\pi_n - \frac{1}{z}\text{且 } x_n^S = \frac{1}{z}Tx_n^G - \frac{1}{z}f = R_n^S(z)f.$$

习题

4.31　证明 $\varphi_n^S = (1/\lambda_n)T\varphi_n^G$是 T_n^S相应于本征值$\lambda_n\neq 0$ 的

本征向量。证明若λ_n是半单的，则 $P_n^S\varphi=(1/\lambda_n)TP_n^G\varphi$.

4.32　设M_n^S是T_n^S相应于λ_n的不变子空间。证明$M_n^S=T\pi_n\mathscr{M}_n$。

6.3 近似求积方法

相应于Nyström法的算子记为T_n^N且由

$$(T_n^Nx)(s)=\sum_{j=1}^{n}w_jk(s,t_j)x(t_j)$$

所定义。若$R_n^N(z):=(T_n^N-z)^{-1}$，则（4.16）的解x_n^N是$x_n^N=R_n^N(z)f$。φ_n^N是T_n^N相应于λ_n的本征向量。

为确定与Fredholm法相应的Fredholm算子T_n^F我们假设I_n是由点$\{t_i\}_1^n$及函数$\{e_i\}_1^n$使得$e_i(t_j)=\delta_{ij}$所确定的插值求积公式。于是T_n^F由

$$T_n^Fx=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}w_jk(t_i,t_j)x(t_j)\right]e_i$$

所定义。

习题

4.33　设$\mathscr{T}_n'$: $X_n\to X_n$是在X_n的基$\{e_i\}_1^n$和X_n^*的伴随基$\{e_i^*\}_1^n$下，由矩阵

$$\widetilde{A}_n=(w_jk(t_i,t_j)),\quad i,j=1,\cdots,n,$$

其中$\langle x,e_i^*\rangle=x(t_i)$，所定义的算子。证明$T_n^F=\mathscr{T}_n'\pi_n=\pi_nT_n^N$。

4.34　定义$\mathscr{R}_n'(z)=(\mathscr{T}_n'-z)^{-1}$; $X_n\to X$及$R_n^F(z)=$

$(T_n^F - z)^{-1}$. 因而定义$\mathscr{P}'_n\mathscr{D}'_n$, , 及 P_n^F。证明 $R_n^F(z) = \mathscr{R}'_n(z)\pi_n - (1/z)(1-\pi_n)$如果 $z \neq 0$, 并且证明 $P_n^F = \mathscr{P}'_n\pi_n$. 推导$x_n^F = \mathscr{R}'_n\pi_n f = R_n^F(z)\pi_n f$且$\varphi_n^F$是 T_n^F与λ_n相应的本征向量.

4.35 证明

$$R_n^N(z) = \frac{1}{z} T_n^N \mathscr{R}'_n(z)\pi_n - \frac{1}{z} \text{ 及 } P_n^N = T_n^N \mathscr{E}'_n \mathscr{P}'_n \pi_n \text{ 其中}$$

$$\mathscr{E}'_n = \sum_{k=0}^{l_n-1} \frac{1}{\lambda_n}\left(-\frac{\mathscr{D}'_n}{\lambda_n}\right)^k.$$

确定M_n^N(或$\mathscr{M}'_n$), 即 T_n^N(或$\mathscr{T}'_n$) 的与λ_n相应的不变子空间, 并且用$\mathscr{M}'_n$及 T_n^N表示M_n^N。

方程 (4.16) 与 (4.17) 可以改写为

$$x_n^N = \frac{1}{z}(T_n^N x_n^F - f), \quad \varphi_n^N = \frac{1}{\lambda_n} T_n^N \varphi_n^F.$$

这些公式十分类似于投影法 (4.18) 与 (4.19) 的相应公式, (4.18) 及 (4.19) 可以写为

$$x_n^S = \frac{1}{z}(T_n^S x_n^G - f), \quad \varphi_n^S = \frac{1}{\lambda_n} T_n^S \varphi_n^G.$$

其中选择$x_n = x_n^G$及$\varphi_n = \varphi_n^G$.

7. 数值逼近方法的收敛性

我们仍不准备研究本征元的收敛性。这将推迟到第 5 章。至于对$\rho(T)$ 中的 z, $(T_n - z)x_n = f$ 的解x_n到 $(T-z)x = f$ 的解 x 的收敛性, 由引理3.16知道这收敛性等价于对 $\rho(T)$ 中的 z, $T_n - z \xrightarrow{s} T - z$.

在本节中我们假定T在复 Banach 空间X中是紧的。然后

在关于X_n的适当假设下，我们将看见对于第6节中所定义的逼近方法或者$\|T_n - T\| \to 0$，或者$T_n \xrightarrow{cc} T$. 令$R(z) := (T - z)^{-1}$及$R_n(z) := (T_n - z)^{-1}$，我们知道

(i) $\|T_n - T\| \to 0 \Rightarrow \|R_n(z) - R(z)\| \to 0$，对$\rho(T)$中任何$z$，

(ii) $T_n \xrightarrow{cc} T \Rightarrow R_n(z) \xrightarrow{cc} R(z)$，对$\rho(T)$中的任何$z$.

习题

4.36 若$\pi_n \xrightarrow{p} 1$且$R_n(z) \xrightarrow{p} R(z)$，证明$R_n(z)\pi_n \xrightarrow{p} R(z)$.

7.1 当$\pi_n \xrightarrow{p} 1$时，投影方法的收敛性

当$\pi_n \xrightarrow{p} 1$时，由于T的紧性，方法的收敛性容易得到.

定理4.5 若在X中T是紧的且$\pi_n \xrightarrow{p} 1$，则$\|T_n^P - T\| \to 0$且$T_n^S \xrightarrow{cc} T$. 此外，若在X^*、中$\pi_n^* \xrightarrow{p} 1$，则$\|T_n^S - T\| \to 0$

证明 $T_n^P - T = (1 - \pi_n)T$. 由定理3.2得出一致收敛性. 现在证明$T\pi_n \xrightarrow{cc} T$，我们利用命题3.4以$V_n := T$及$U_n := \pi_n$. 注意到

$$\|T_n^S - T\| = \|T(\pi_n - 1)\| = \|(\pi_n^* - 1)T^*\|$$

证明完毕. □

使得$\pi_n \xrightarrow{p} 1$及$\pi_n^* \xrightarrow{p} 1$的投影$\pi_n$序列的明显例子是Hilbert空间中逐点收敛的正交投影序列. Hilbert空间中使π_n及π_n^*收敛于1的非正交投影在实际中是罕见的. 这种例子将在关于有限元法的内容中给出（第9节B部分）. 这将是与非Hermite强制连续半双线性形式相应的投影序列.

对于$\rho(T)$中的任何z及对于X中的任何f，解x_n^G，x_n^P，及

x_n^S的收敛性，从在$\rho(T)$中逼近的稳定收敛性推得，并且下面的误差界成立。c是普通常数。

命题4.6 若T是紧的且$\pi_n \xrightarrow{p} 1$，则

$$c_1\|(1-\pi_n)x\| \leqslant \|x - x_n^G\| \leqslant c_2\|(1-\pi_n)x\|,$$

$$\|x - x_n^P\| \leqslant c\|(1-\pi_n)Tx\|,$$

$$\|x - x_n^S\| \leqslant c\|T(1-\pi_n)x\|.$$

证明　展示$(\pi_n T - z)(x - x_n^G)$，我们得到

$$z(1-\pi_n)x = (z - \pi_n T)(x - x_n^G) \text{ 及 } x - x_n^G$$

$$= zR_n^P(z)(\pi_n - 1)x.$$

其它两个不等式分别应用恒等式

$$x - x_n = (R(z) - R_n(z))f = R_n(z)(T_n - T)R(z)f$$
$$= R_n(z)(T_n - T)x$$

于算子T_n^P及T_n^S而推得. □

Galerkin 解x_n^G相对于X_n达到最优的阶$\delta_n(x)$，并且这个阶不能改进. 因为

$$\|T(1-\pi_n)x\| \leqslant \|T(1-\pi_n)\|\|(1-\pi_n)x\|,$$

若$\|T(1-\pi_n)\| \to 0$，有时即使$\|T(1-\pi_n)\| \nrightarrow 0$，$x_n^S$改善了$x_n^G$（参阅第6章及第7章）. 另一方面，$Tx$常常比$x$更光滑，因而$x_n^P$可以改善$x_n^G$。

习题

4.37　设π_n在Hilbert空间中是正交的. 证明定理4.6中的常数c_1，c_2可以这样地选择使得$c_1 = 1$及$c_2 \leqslant 1 + \varepsilon_n$，其中当$n \to \infty$时$\varepsilon_n \to 0$。

4.38　设$\pi_n: L^2(a,b) \to \mathbb{P}_{r,\Delta}$是习题4.4定义的投影. 证明若$h \to 0$，则$\|(1-\pi_n)T\|_2 \to 0$，当$x \in C(a,b)$，$x_n^G \to x$，及当

$x \in C^p(a,b)$, $p \geqslant r+1$, $\|x - x_n^G\|_2 = O(h^{r+1})$.

4.39 $X = L^\infty(a,b)$. T是从X到$C(a,b)$ 中的紧算子. L_n是习题4.6定义的投影。证明若$h \to 0$, 则$\|(1-L_n)T\|_\infty \to 0$, 并且 $(L_nT - z)^{-1}$在$L^\infty(a,b)$ 中对于$\rho(T)$ 中的 z 一致有界。推导当$x \in C(a,b)$ 时, $x_n^G \to x$, 以及当$x \in C^p(a,b)$, $p \geqslant r+1$ 时, $\|x - x_n^G\|_\infty = O(h^{r+1})$。

4.40 对于习题4.39定义的投影方法,证明在 $C(a,b)$ 中, $TL_n \xrightarrow{cc} T$ 且$x_n^S \to x$.

4.41 对于x, 给出关于k及f使得 $(T-z)x = f$ 的解在$C^p(x,b)$ 内的充分条件。

7.2 Petrov法的收敛性

我们考虑由复Banach 空间X的子空间 X_n 及 Y_n 所定义的Petrov法. 设 π_n (或$\overline{\omega}_n$) 是到Y_n (或 X_n) 上的投影.

引理4.7 我们假设T是紧的, 在X中$\overline{\omega}_n \xrightarrow{p} 1$, π_n是一致有界的且满足 (4.8) . 则 Petrov 法是收敛的并且收敛速率由

$$\|x - x_n\| \leqslant c\|(1 - \overline{\omega}_n)x\| \leqslant c\,\mathrm{dist}(x, X_n)$$

给出。

证明 $\pi_n' := \tilde{\pi}_n^{-1}\pi_n$是在$X_n$上的投影。于是

$$\pi_n[(T-z)x_n - f] = 0, \quad x_n \in X_n,$$

等价于用 π_n'所定义的Galerkin方法:

$$\pi_n'[(T-z)x_n - f] = 0, \quad x_n \in X_n$$

剩下只要证明 $\pi_n' \xrightarrow{p} 1$. 对X中的任何x, 恒等式

$$1 - \pi_n' = (1 - \tilde{\pi}_n^{-1}\pi_n)(1 - \overline{\omega}_n)$$

证明了 $\|(1-\pi_n')x\| \leqslant c\|(1-\overline{\omega}_n)x\|$。由定理4.6 得出结果。□

当在 Hilbert 空间H中由子空间 E_n及 F_n 所定义的$\perp$-Petrov法的情形，条件（4.8）等价于条件

$$\sup_n \Theta(E_n, F_n) < 1 \tag{4.26}$$

（参阅习题4.12）. 我们注意对于$\perp$—Galerkin方法因为$E_n = F_n$蕴涵$\Theta(E_n, F_n) = 0$，条件（4.26）显然满足.

引理4.7 以某个到 X_n 上 的投影$\overline{\omega}_n$的收敛性$\overline{\omega}_n \xrightarrow{P} 1$ 来表示 Petrov 法的 收 敛性. 但是对于 Y_n 上的投影 π_n 的性质比$\overline{\omega}_n$ 的性质掌握得更多. 于是借助于 $\pi_n \xrightarrow{P} 1$ 的收敛性，对于研究 Petrov 法的收敛性是有用的.现在我们证明对于某个已知紧算子K及$\alpha \in \rho(K)$ 关系

$$X_n = (K - \alpha) Y_n$$

成立就属于上述情形.

命题4.8 若T及K是紧的且 $\pi_n \xrightarrow{P} 1$，则关于$(T - z)x = f$ $z \in \rho(T)$ 的由子空间X_n，Y_n定义的Petrov 法是收敛的，其中$X_n = (K - \alpha) Y_n$，$\alpha \in \rho(K)$，且

$$\|x - x_n\| \leqslant C \|(1 - \pi_n)(K - \alpha)^{-1} x\| \leqslant C \ \mathrm{dist}(y, Y_n)$$

其中$x = (K - \alpha) y$.

证明 为证明 $\pi_n' \xrightarrow{P} 1$，我们应用由Y_n定义的Galerkin 法于方程 $(K - \alpha) u = g$，对于X内的任意 g. 它引出方程

$$\pi_n (K - \alpha) u_n = \pi_n g, \quad u_n \in Y_n \tag{4.27}$$

因为K是紧的并且 $\pi_n \xrightarrow{P} 1$，对于足够大的 n，这 个 方程有唯一解u_n，当 $n \to \infty$时收敛于 $u = (K - \alpha)^{-1} g$. 令

$$v_n := (K - \alpha) u_n$$

方程（4.27）可以改写为

$$\pi_n v_n = \pi_n g.$$

对于X中的任何 g，方程有唯一解$v_n \in X_n$. 这证明$\widetilde{\pi}_n = \pi_n|_{X_n}$

在 X_n 上是可逆的：$v_n=\tilde{\pi}_n^{-1}\pi_n g=\pi_n' g$.

现在对于 X 中的任何 g，$v_n\to g$ 可以改写为

$$\pi_n' g=\tilde{\pi}_n^{-1}\pi_n g\to g.$$

由Banach—Steinhaus定理，$\|\tilde{\pi}_n^{-1}\pi_n\|\leqslant c$。特别是对于 $g_n\in Y_n$,

$$\|\tilde{\pi}_n^{-1}g_n\|=\|\tilde{\pi}_n^{-1}\pi_n g_n\|\leqslant c\|g_n\|.$$

所以 $\|\tilde{\pi}_n^{-1}\|\leqslant C$. Petrov法的收敛性由引理4.7得出. 界 $\|x-x_n\|\leqslant c\|(1-\pi_n')x\|\leqslant c\,\mathrm{dist}(x,X_n)$ 是显然的. 由恒等式

$$(1-\pi_n')g=(K-\alpha)(u-u_n)=\alpha(K-\alpha)(\pi_n K-\alpha)^{-1}(\pi_n-1)(K-\alpha)^{-1}g$$

得出所求的界.

于是

$\|(1-\pi_n)(K-\alpha)^{-1}x\|\leqslant c\ \mathrm{dist}((K-\alpha)^{-1}x,\ (K-\alpha)^{-1}X_n)\leqslant c\,\mathrm{dist}(y,Y_n)$.□

命题4.8的一个重要应用是关于方程

$$(T-z)x=f,\ z\in\rho(T),\ T\text{ 紧}$$

在 $E_n\subset H$ 上最小二乘法的收敛性分析. 它等价于由子空间 E_n, F_n 所定义的⊥—Petrov法，其中使 $F_n=(T-z)E_n$。于是若定义 $S:=(1/z)T(T-z)^{-1}$，则 S 是紧的且 $S-1/z\pm(T-z)^{-1}$ 是可逆的。所以 $(S-1/z)F_n=E_n$，且当 $\pi_n\xrightarrow{P}1$ 时Petrov法是收敛的。

注记 我们刚才已证明 $\pi_n\xrightarrow{P}1$ 及 T 紧蕴涵 $\sup_n\Theta((T-z)E_n,E_n)<1$；$T-z$ 因而是正则的（参阅第三章例3.11）.

习题

4.42 如何减弱命题4.8中 K 是紧的条件？

命题4.8 的另一个应用将在第9节给出。

7.3 $\pi_n \overset{p}{\nrightarrow} 1$ 的例子

在$C(a,b)$ 中，如已指出，逐段多项式插值投影是逐点收敛的，但对于在全区间 $[a,b]$ 上多项式插值投影的情形就不是这样了。所以配置点的选择对于证明这种配置法的收敛性将是重要的.

这里指定$\{\tau_i\}_1^n$是Chebyshev 点。当$a=-1$，$b=1$ 时，Chebyshev 点为

$$\tau_i=\cos[(2i-1)/2n]\pi,\quad i=1,\cdots,n,$$

并且用L_n表示投影，L_n映射$[-1,\ 1]$上的每一个连续函数到它在Chebyshev 点$\{\tau_i\}_1^n$的$n-1$次插值多项式。Banach 空间X可以按各种方法选择。下面的结果属于空间$L_\rho^2(-1,\ 1)$，且有权函数$\rho(t)=1/\sqrt{1-t^2}$，$t\in[-1,\ 1]$。

命题4.9 (Vainikko) 若T是从$L_\rho^2(-1,\ 1)$ 到$C(-1,1)$中的紧算子，则$\|L_nT-T\|_{2,\rho}\to 0$. 误差公式是

$$\|x-x_n\|_{2,\rho}\leqslant c\ \mathrm{dist}_\infty(x,\mathbb{P}_{n-1})\ \text{对于}x\in C(-1,1).$$

证明　显然$C(-1,\ 1)\subset L_\rho^2(-1,\ 1)$，并且对于$x\in C(-1,\ 1)$，$\|x\|_{2,\rho}\leqslant c\|x\|_\infty$。设 i 是嵌入$C(-1,\ 1)$ 到$L_\rho^2(-1,1)$ 中的算子。由Erdös-Turan 定理（见Cheney，1966，P137），对每个$x\in C(-1,\ 1)$，L_nx 按加权$\rho(t)$二次平均收敛于x，即

$$\int_{-1}^{1}|(L_nx-x)(t)|^2\rho(t)dt\to 0.$$

换言之，在$L_\rho^2(-1,\ 1)$中$L_n\to$ i . 现在T是映射$L_\rho^2(-1,\ 1)$到$C(-1,\ 1)$中的紧算子，且$\|(L_n-\mathrm{i})T\|_{2,\rho}\to 0$.

设$z_n\in\mathbb{P}_{n-1}$且$x\in C(-1,\ 1)$。于是

$$\|x-L_nx\|_{2,\rho}=\|(x-z_n)-L_n(x-z_n)\|_{2,\rho}$$

$$\leqslant \|x-z_n\|_{2,\rho}+\|L_n(x-z_n)\|_{2,\rho}$$
$$\leqslant\left(\left[\int_{-1}^{1}\rho(t)dt\right]^{1/2}+\|L_n\|_{C\to L_\rho^2}\right)\|x-z_n\|_\infty.$$

$\|L_n\|_{C\to L_\rho^2}$是一致有界的。因为z_n在$\mathbb{P}_{n-1}$中是任意的，由命题4.6我们得到所要求的界。 □

上述结果仅是建立基于Chebyshev点的配置法的解x_n关于权$\rho(t)$的均方收敛性。现在我们能够证明补充结果，即迭代配置法的解$\tilde{x}_n$在$L^{\infty}(-1,1)$中收敛。

命题4.10 (Sloan和Burn) 设核k满足条件，对某$p>1$，

$$\text{(i)}\quad \sup_{t\in[-1,1]}\|k_t\|_p<\infty \tag{4.28}$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{t'\to t}\|k_{t'}-k_t\|_p=0 \quad -1\leqslant t,t'\leqslant 1. \tag{4.29}$$

那么积分算子T在$C(-1,1)$上是紧的并且在$C(-1,1)$中$TL_n\xrightarrow{cc}T$。误差公式是对于$x\in C(-1,1)$，$\|x-\tilde{x}_n\|\leqslant c\cdot \mathrm{dist}_\infty(x,\mathbb{P}_{n-1})$。

证明 它是根据下面的结果（Erdös和Feldheim，1936）：对于$X=C(-1,1)$中的每个x及每个实数q，$0<q<\infty$，

$$\int_{-1}^{1}|(L_nx-x)(t)|^q\rho(t)dt\to 0,\quad n\to\infty.$$

我们取p使得$p^{-1}+q^{-1}=1$，对于$p>1$，$q<\infty$。我们首先证明对于$x\in X$，$TL_nx\to Tx$：

$$|TL_nx(s)-Tx(s)|=\left|\int_{-1}^{1}k(s,t)[L_nx(t)-x(t)]dt\right|$$
$$\leqslant\int_{-1}^{1}\left|k(s,t)\frac{1}{\rho(t)}\right||(L_nx-x)(t)|\rho(t)dt$$
$$\leqslant\left[\int_{-1}^{1}\left|k(s,t)\frac{1}{\rho(t)}\right|^p\rho(t)dt\right]^{1/p}$$

$$\times \left[\int_{-1}^{1} |L_n x - x)(t)|^q \rho(t) dt\right]^{1/q}$$

其中用带权函数$\rho(t)$的Hölder不等式．对于$p>1$

$$\max_{t\in[-1,1]} \rho(t)^{1-p} = 1.$$

由（4.28）及Erdös—Feldheim定理，我们断定在X中$TL_n \xrightarrow{p} T$．由定理4.1，T在X中是紧的．为了得到$TL_n \xrightarrow{cc} T$，我们仅须证明$K=\bigcup_{n=1}^{\infty} TL_n B$是相对紧的，这里$B$是$X$中的单位球．因为从逐点收敛性可得出$\sup_n \|TL_n\| < \infty$，$K$是等度有界．为证明$K$的等度连续性，令$\delta>0$是给定的，且设$s, s' \in [-1, 1]$，满足$|s'-s| \leqslant \delta$．设$x \in B$．于是

$$\begin{aligned}
&|TL_n x(s) - TL_n x(s')| \\
&= \left|\int_{-1}^{1} [k(s,t) - k(s', t)](L_n x)(t) dt\right| \\
&\leqslant \left[\int_{-1}^{1} |k(s,t) - k(s',t)|^p \rho(t)^{1-p} dt\right]^{1/p} \|L_n x\|_{q,\rho} \\
&\leqslant \sup\left\{\left[\int_{-1}^{1} |k(\sigma,t) - k(\sigma',t)|^p dt\right]^{1/p};\ \sigma,\sigma' \in [-1, 1],\ |\sigma-\sigma'| \leqslant \delta\right\} \times \sup\{\|L_n x\|_{q,\rho};\ n \geqslant 1,\ x \in B\},
\end{aligned} \tag{4.30}$$

这里$\|\cdot\|_{q,\rho}$表示带权ρ的加权L^q范数．由（4.29）$s \mapsto k_s$是从$[-1, 1]$到$L^p[-1, 1]$内的连续函数．因而它是一致连续的：

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{|\sigma-\sigma'|<\delta} \|k_\sigma - k_{\sigma'}\|_p = 0.$$

这表明（4.30）的右边第一个因子趋于零．为证明第二个因子是有限的，我们写$\lim_n \|L_n x - x\|_{q,\rho} = 0$，由一致有界原理从而得出$\sup_n(\|L_n x\|_{q,\rho},\ x \in B) < \infty$．由Ascoli—Arzela定理

所以$\overline{K}$在X中是紧的。设z_n是$\mathbb{P}_{n-1}$中的任何多项式，则$\|T(L_n-1)x\|_\infty=\|T(L_n-1)(x-z_n)\|_\infty\leqslant(\|TL_n\|_\infty+\|T\|_\infty)\|x-z_n\|_\infty$。因为$z_n$在$\mathbb{P}_{n-1}$中是任意的，由命题4.6得出所要求的界。 □

什么时候满足条件（4.28）及（4.29）？首先容易证明对于每个连续核，对任何$p>1$，都满足它们。实际中出现的许多弱的奇异核对一些$p>1$也满足(4.28)及(4.29)(见Graham和Sloan，1979）。

习题

4.43 在Chebyshev点上的配置解的性态是什么？能否从命题4.9推导出它？

7.4 近似求积方法的收敛性

定理4.11 (Anselone) 若T是积分算子具有在$[a,b]\times[a,b]$上的连续核，则在$X=C(a,b)$中$T_n^N\xrightarrow{cc}T$。

证明　对于$[a,b]$内的s，由于数值积分方法的假设，当$n\to\infty$时$T_n^Nx(s)\to Tx(s)$。并且

$$|T_n^Nx(s)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|w_j|\ k(s,t_j)\|x(t_j)|$$

$$\leqslant\max_{a\leqslant s,\ t\leqslant b}|k(s,t)|\sum_{j=1}^{n}|w_j|\ \|x\|.$$

于是，对于$x\in B$，B是$C(a,b)$中的单位球，序列$\{T_n^Nx\}$是一致有界的。它是等度连续的，这是因为对于$a\leqslant s,s'\leqslant b$，

$$|T_n^Nx(s)-T_n^Nx(s')|\leqslant c\|x\|_\infty\max_{a\leqslant t\leqslant b}|k(s,t)-k(s',t)|,$$

当$|s-s'|\to 0$时，它与n无关地趋于零。因而$\{T_n^Nx\}$是一致

有界等度连续的函数序列，对于$[a, b]$中的每一个s这序列收敛于Tx；它在$[a, b]$上必一致收敛，即$T_n^N \xrightarrow{p} T$。由于T是紧的，这也就证明了$\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^N B$是相对紧并且$T_n^N \xrightarrow{cc} T$。 □

推论4.12 若$\pi_n \xrightarrow{p} 1$，则$T_n^F \xrightarrow{cc} T$。

证明 从$T_n^F = \pi_n T_n^N$且以$V_n := T_n^N$及$U_n := \pi_n$应用命题3.4得出。 □

习题

4.44 证明若核k是连续的，则$\|T_n^N - T\|_\infty \geqslant \|T\|_\infty$ (Anselone)。

$\|T_n^N - T\|$一般不趋于零。然而如果核是足够光滑的，在适当的Banach空间中，当利用近似求积的复合公式时可以证明一致收敛性。

定义 在$[0, 1]$上的复合求积公式是线性泛函

$$J_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{p} A_i f\left(\frac{j + t_i}{n}\right) \right] \quad 对于 0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1,$$

这里整数p及复数$\{A_i\}_1^p$是给定的。

矩形公式，梯形公式，Simposon公式及Gauss公式都是复合公式。

对于已给整数$m \geqslant 1$，我们考虑定义在$[0,1]$上，具有直至m阶连续导数的函数x的集合，赋予范数$|||x||| := \max_{i=0,\dots,m} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(i)}(t)|$，这个集合是Banach空间，记为$C_*^m$。

命题4.13 (Baker) 设积分算子T有核k，使得偏导数$\partial^{i+j} k(s,t)/\partial s^i \partial t^j$，$0 \leqslant i, j \leqslant m$，在$[0,1] \times [0,1]$上是连续的，则$T$是从$C_*^m$到$C_*^m$中的紧算子。若对满足$\Sigma_{i=1}^p A_i = 1$

的复合求积公式来应用Nystöm 法，则有$\|T_n^N - T\| \to 0$。

证明见Baker（1971），Baker和 Hodgson（1971）。

关于在C_*^1中T_n^N是T的一致逼近，只须函数k，$\partial k/\partial s$，$\partial k/\partial t$，及$\partial^2 k/\partial s\partial t$在$[0,1]\times[0,1]$上连续。若核是二阶微分方程的 Green 函数就不是这情形。

当I_n是插值求积公式，我们研究近似求积方法T_n^F，T_n^N及相应的投影方法T_n^P，T_n^S之间的关系。

定理4.14 若函数$\{e_i\}_1^n$满足条件

(i) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\ \sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\{|t-t_i|;\ e_i(t)\neq 0\}\to 0$，当$n\to\infty$；

$$(4.31)$$

(ii) $$\sup_n \sum_{i=1}^n \int_a^b |e_i(t)|\,dt<\infty \qquad (4.32)$$

且若核是连续的，则$\|T_n^S - T_n^N\|\to 0$。此外，若$\pi_n \xrightarrow{p} 1$则$\|T_n^G - T_n^F\|\to 0$。

证明

$$(T_n^N - T_n^S)x=\sum_{j=1}^n\left[w_j k(\cdot,t_j)-\int_a^b k(\cdot,t)e_j(t)dt\right]x(t_j).$$

令$D_j=\{t\in[a,b];\ e_j(t)\neq 0\}$。则

$$\|T_n^N - T_n^S\|\leqslant \sup_{a\leqslant s\leqslant b}\ \max_{1\leqslant j\leqslant n}\ \sup_{t\in D_j}|k(s,t_j)-k(s,t)|$$

$$\sum_{j=1}^n\int_a^b|e_j(t)|\,dt.$$

由（4.31）及（4.32）得出结果。现在

$$T_n^G - T_n^F = T_n^P\pi_n - T_n^F=\pi_n(T_n^S - T_n^N)\ \text{及}\ \|\pi_n\|\leqslant M$$

因为$\pi_n \xrightarrow{p} 1$。 □

大多数求积公式满足（4.31）及（4.32）。若函数e_i是正的，则（4.32）满足：

$$w_i = \int_a^b e_i(t)dt \quad 且 \quad \sup_n \sum_{i=1}^n w_i < \infty \quad （引理4.2）$$

习题

4.45 在定理4.14的假设下，且若$\pi_n \xrightarrow{p} 1$，证明$T_n^F = \mathscr{T}_n' \pi_n$满足第三章习题3.1给出的两个Kantorovitch条件。

4.46 用于$k(s,t)=r(s,t)\sigma(s,t)$的乘积积分定义算子

$$(T_n x)(s) = \sum_{i=1}^n r(s,t_i)x(t_i)w_i(s)$$

$$= \sum_{i=1}^n r(s,t_i)x(t_i)\int_a^b e_i(t)\sigma(s,t)dt.$$

在哪些条件下$T_n \xrightarrow{cc} T$成立？

4.47 设X是复Banach空间，B为单位球且T是紧的。设T^m，T_n，$T_n^m \in \mathscr{L}(X)$。假定$K := \bigcup_{n=1}^\infty T_n B$及$K^m := \bigcup_{n=1}^\infty T_n^m B$，$m \in \mathbb{N}$，都是相对紧的并且当$m \to \infty$时，$\|T_n^m - T_n\| \to 0$关于$n$一致成立。证明$\bigcup_{m,n=1}^\infty T_n^m B$是相对紧的。

如我们在第3节所见，投影方法时常产生一个逼近T^m，它包含不能在封闭形式内计算的积分。我们设$\|T^m - T\| \to 0$，$m \to \infty$。现在设n记T及T^m的数值积分指数，这定义了算子T_n及T_n^m如果求积规则是收敛的$T_n \xrightarrow{cc} T$及对每个m，$T_n^m \xrightarrow{cc} T^m$.

它导致逼近方式的基本变化：$T_n \xrightarrow{cc} T$（Anselone和Lee，1976.）

投影法的收敛性已被广泛地研究（Kantorovitch 和 Akilov，1964；Krasnoselskii 等，1972）。命题4.9应归于 Vainikko（1965），命题4.10应归于Sloan和Burn（1979）。Nyström法的收敛性已在Anselone（1971）中做了确定性的讨论，由于引入集体紧收敛概念。Vainikko（1969b）首先直接证明Fredholm法的收敛性，作为Galerkin法的摄动。乘积积分方法的收敛性在Atkinson（1976a）中研究。关于积分方程方法在Baker（1977）中给出很广泛讨论。近似求积在投影方法中的影响，例如在Anselone和Lee(1976)，Prenter(1975)，和Chandler（1979）中得到研究。

B 微分方程边值问题

8 微分方程的边值问题

我们将考虑常微分方程，椭圆型偏微分方程或可能是方程组边值问题。

8.1 常微分方程

考虑 p 阶微分方程（$p \geqslant 2$）

$$\mathfrak{L}u := u^{(p)} - \sum_{i=0}^{p-1} a_i(t) u^{(i)} = f(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{4.33}$$

具有齐次边界条件

$$l_k(u) := \sum_{i=0}^{p-1} [\alpha_{ik} u^{(i)}(a) + \beta_{ik} u^{(i)}(b)] = 0,$$

$$k = 1, \cdots, p. \tag{4.34}$$

系数$\{a_i\}_0^{p-1}$是连续实或复函数，常系数α_{ik}，β_{ik}是实的或复

的。使微分问题

$$(P)=[\mathfrak{L}u=f,\ \mathfrak{l}^{k}(u)=0,\ \ k=1,\cdots,p],$$

与如下确定的微分算子 T 相关连。设 $X=L\ (a,b)$。令$D:=\{u\in C^{p-1}(a,b);\ u^{(p)}\in L^{\infty}(a,b)$且$\mathfrak{l}_k(u)=0$,对$k=1,\cdots,p\}$于是对于 $u\in D$，$Tu=\mathfrak{L}u$，T是定义域为D的闭算子.

问题(P)的积分公式表述按下面方法可以得到。我们假设问题

$$(Q_0)=[u^{(p)}=0,\mathfrak{l}_k(u)=0,\ k=1,\cdots,p],$$

以 $u=0$ 作为唯一解。于是由定理2.17存在唯一 Green 函数 $g(t,s)$使得

$$(Q)=[u^{p}=x\ ,\ \mathfrak{l}_k(u)=0],$$

的解 u 由

$$u(t)=\int_a^b g(t,s)\,x(s)dS.$$

给出. 于是由 $x\mapsto u=Gx$定义了积分算子G

命题4.15 若在边界条件（4.34）下方程$u^{(p)}=0$有唯一解 $u=0$，则方程 $Tu=f$ 等价于 $x=Kx+f$，并且$u(t)=\int_a^b g(t,s)\,x(s)ds$，这里 $g(t,s)$ 是附加条件（4.34）的方程 $u^{(p)}=x$ 的Green 函数，及K是积分算子，核为

$$k(t,s)=\sum_{i=0}^{p-1}a_i(t)\frac{\partial^i g(t,s)}{\partial t^i}.$$

证明

$$u^{(p)}=x\quad 与\quad u^{(i)}=\int_a^b\frac{\partial^i g(t,s)}{\partial t^i}x(s)ds.$$

因此 x 是第二类 Fredholm 方程

$$x=Kx+f$$

的解，其中积分算子

$$Kx=\int_a^b k(\cdot,s)x(s)ds$$

这里

$$k(t,s)=\sum_{i=0}^{p-1}a_i(t)\frac{\partial^i g(t,s)}{\partial t^i}.$$

注意 k 在 $s=t$ 有第一类间断。由定理4.1，K 作为从 $L^r(a,b)$，$(2\leqslant r\leqslant\infty)$ 到 $C(a,b)$ 中的算子是紧的。实际上

（i）$sup_t\|k_t\|_2<\infty$

（ii）$\|k_{t'}-k_t\|_2\to 0$　当 $t'\to t$。　□

我们假设 $T^{-1}\in\mathscr{L}(X)$，即 $(1-K)^{-1}\in\mathscr{L}(X)$。

例4.16　若假设 $0\in\rho(T)$，本征值问题 $T\psi=\lambda\psi$ 同样地等价于广义本征值问题 $\psi=G\varphi$ 及 $(1-K)\varphi=\lambda G\varphi$。令

$$P=\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma(T-z)^{-1}dz$$

是与 λ 相应的 T 的谱投影。

$$Q=\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma(1-K-zG)^{-1}Gdz$$

是广义本征值问题的谱投影（参阅第二章例 2.28），$(T-z)^{-1}=G(1-K-zG)^{-1}$ 及 $P=GQG^{-1}$。Q 也是标准本征值问题

$$\varphi=\lambda(1-K)^{-1}G\varphi$$

相应于本征值 $1/\lambda$ 的谱投影。实际上，如果我们置 $U:=(1-K)^{-1}G$，有

$$\int_{\Gamma(\lambda)}(1-K-zG)^{-1}Gdz=\int_{\Gamma(\lambda)}(1-zU)^{-1}Udz$$

$$=\int_{\Gamma(\lambda)}\left[-\frac{dz}{z}+\left(\frac{1}{z}-U\right)^{-1}\frac{dz}{z^2}\right]$$

$$=\int_{\Gamma(1/\lambda)}(U-t)^{-1}dt,$$

因为 $\Gamma(\lambda)$ 不包围 0，其中用变量代换 $t=1/z$。注意 GUG^{-1}

$= T^{-1}$.

例4.17 设在$\rho(T)$中给出$-z\neq 0$. 方程$Tu=f$可以写为$(T+z)u-zu=f$，这里$T+z$有有界逆算子. 设$h(t,s)$是$(T+z)u=f$的Green函数，h有直至$P-2$阶连续导数. 如果A_z是具有核$h(t,s)$的积分算子，方程$Tu=f$等价于Fredholm方程$y=zA_zy+f$及$u=A_zy$.

习题

4.48 如果$0\in\rho(T)$及$A=T^{-1}$, $T\psi=\lambda\psi$等价于$\theta=\lambda A\theta$及$\psi=A\theta$. 与λ及$1/\lambda$相应的T及A的谱投影是恒等的.

4.49 给出问题（P）

$$u''-u'=f,\ u(0)-u'(0)=0,\ u(1)+u'(1)=0$$

的积分公式表述.

4.50 考虑由

$$\mathfrak{L}\psi=\lambda\mathfrak{M}\psi \quad 与 \quad (4.34)$$

给出的问题,这里$\mathfrak{L}$由(4.33)确定并且$\mathfrak{M}u:=\Sigma_{i<p}b_i(t)u^{(i)}$. 假设$0\in\rho(T)$，给出问题的积分公式表述. 如果函数$b_i$是连续的，所得到的核光滑程度如何?

8.2 椭圆型偏微分方程

设Ω是$\mathbb{R}^N$中的有界区域，有边界$\partial\Omega$，并假定它属于类C. $H^1(\Omega)$是Sobolev空间$W^{1,2}(\Omega)$具有范数$\|\cdot\|_1$，$H_0^1(\Omega)$是$H^1(\Omega)$的子空间由那些“在边界$\partial\Omega$上等于零”的函数组成. $H_0^1(\Omega)$是$\mathscr{D}(\Omega)$在$H^1(\Omega)$中的闭包，而$\mathscr{D}(\Omega)$是无限次可微在Ω内具有紧支集的函数集合.

我们首先考察下面Neumann问题

例4.18 齐次Neumann问题的经典表述如下. 对于$L^2(\Omega)$中给定的f，在$H^1(\Omega)$中求出u使得

$$-\Delta u+zu=f \quad 在\Omega内,\ z\in\mathbb{C}, \qquad (4.35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad 在\partial\Omega上,$$

这里

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial t_i^2} \quad 及 \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \frac{\partial u}{\partial t_i},$$

$\nu = (\nu_i)_1^N$是边界$\partial\Omega$的单位外法向.

假设（4.35）满足，且设$v \in H^1(\Omega)$. 乘以$\overline{v}$并在Ω上积分，由分部积分得

$$-\int_{\Omega} \Delta u \overline{v}\, dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t_i} \overline{\frac{\partial v}{\partial t_i}}\, dt - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \overline{v}\, d\gamma,$$

这里$dt = dt_1 \cdots\cdots dt_N$，$d\gamma$是$\partial\Omega$上的面积元素. 由边界条件，我们得到方程

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial t_i} \overline{\frac{\partial v}{\partial t_i}}\, dt + z\int_{\Omega} u \overline{v}\, dt = \int_{\Omega} f \overline{v}\, dt$$

$$对所有 v \in H^1(\Omega). \qquad (4.36)$$

令

$$a(u,v) := \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{N} \partial_i u \overline{\partial_i v} + z u \overline{v} \right) dt,$$

这里$\partial u/\partial t_i$缩写为$\partial_i u$，（4.36）可以写成

$$a(u,v) = (f,v) \qquad 对于所有 v \in H^1(\Omega). \qquad (4.37)$$

这是（4.35）的弱表述形式. 反之，若（4.37）成立，则（4.35）亦成立，这是由于对所有$v \in H^1(\Omega)$有$\int_{\partial\Omega}(\partial n/\partial\nu)\overline{v}\, d\gamma = 0$蕴涵在$\partial\Omega$上有$\partial u/\partial\nu = 0$. 所以Neumann问题的经典形式与弱形式是等价的.

我们现在定义椭圆型偏微分边值问题的弱形式的抽象框

架. 设V及H是两个复Hilbert空间，分别具有内积记为$(\cdot,\cdot)_V$及$(\cdot,\cdot)_H$.对应的范数是$\|u\|_V=[(u,u)_V]^{1/2}$及$\|u\|_H=[(u,u)_H]^{1/2}$. 我们设对于$u\in V$有$\|u\|_H\leqslant c\|u\|_V$，因此$V\subset H$且$V$到$H$内的嵌入是连续的。并且假设$V$在$H$内稠密.

令$(u,v)\mapsto a(u,v)$是定义在$V\times V$上的半双线性形式；假设$a(u,v)$是连续的，

$$|a(u,v)|\leqslant\beta\|u\|_V\|v\|_V \qquad 对于u, v\in V, \tag{4.38}$$

并且是强制的，对某个$\alpha>0$，

$$\mathscr{Re}\ a(u,u)\geqslant\alpha\|u\|_V^2 \qquad 对于u\in V. \tag{4.39}$$

给定$a(u,v)$及$f\in H$，我们考虑问题：

求$u\in V$，使得

$$a(u,v)=(f,v)_H, \qquad 对于所有v\in V, \tag{4.40}$$

求$\lambda\in\mathbb{C}$，$0\neq\psi\in V$使得

$$a(\psi,v)=\lambda(\psi,v)_H \qquad 对于所有v\in V \tag{4.41}$$

给定V,H和$a(u,v)$可以在H中定义无界算子T. 我们确定D作为V内u的集合，使得反线性形式$v\mapsto a(u,v)$是在V上关于范数$\|\cdot\|_H$连续的。设T是由$u\in D\mapsto Tu$定义的算子，使得

$$a(u,v)=(Tu,v)_H \qquad 对于所有v\in V.$$

当a在V上强制时，T称为在D中椭圆型.

命题4.16 T是从H到H内定义域为D的线性算子.

证明 设$u\in D$. 因为V在H中稠密，有界反线性形式$v\mapsto a(u,v)$可延拓为H上有界形式. H是Hilbert空间，那么由于Riesz定理存在唯一的$Tu\in H$使得

$$a(u,v)=(Tu,v)_H.$$

易见映射是线性的。 □

例4.19 $H=L^2(\Omega)$，$V=H_0^1(\Omega)$，且

$$a(u,v)=\int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}\partial_i u\overline{\partial_i v}+u\overline{v}\right)dt.$$

$v\mapsto a(u,v)$ 在$H_0^1(\Omega)$ 上关于 $L^2(\Omega)$ 的范数连续．所以

$$D=H_0^1(\Omega)$$

且算子T由

$$u\in H_0^1(\Omega)\mapsto Tu=-\Delta u+u\in L^2(\Omega)$$

定义．这是与齐次 Dirichlet 问题

$$-\Delta u+u=f \quad 在\Omega中，\quad f\in L^2(\Omega),$$
$$u=0 \quad 在\partial\Omega上$$

相应的微分算子．

借助于无界算子T，方程（4.40）和（4.41）可以在H中分别写为

$$Tu=f,\quad T\psi=\lambda\psi.$$

在V中这些问题的另一公式表述由Lax-Milgram定理给出．存在同构$S\in\mathscr{L}(V)$使得

$$a(Su,v)=(u,v)V \qquad 对于 u, v\in V.$$

形式$v\mapsto(f,v)_H$是在H上连续的，因而在V上连续；所以

$$(f,v)_H=(Jf,v)_V,$$

这便确定了$J\in\mathscr{L}(H,V)$．

因此（4.40）及（4.41）等价于V中方程

$$S^{-1}u=Jf,\quad S^{-1}\psi=\lambda J\psi.$$

我们令$A:=SJ$，$A\in\mathscr{L}(H,V)$，及 $u=Af$ 是（4.40）的解．由（4.41）确定的本征向量ψ是与本征值$1/\lambda$相应的A的本征向量．

习题

4.51 证明D在H中稠密．并且证明T是闭的．

4.52 考虑D上的范数：$\|u\|_D := (\|u\|_H^2 + \|Tu\|_H^2)^{1/2}$，$u \in D$，证明$D$赋以这种范数后是Hilbert空间$\hat{D}$，且$T \in \mathscr{L}(\hat{D}, H)$.

4.53 设T'是由

$$a^*(u,v) := \overline{a(v,u)} = (f,v)_H \Longleftrightarrow a(v,u)$$

$$= (v,f)_H \Longleftrightarrow T'u = f,$$

定义的算子．证明T'是H中T的伴随算子.

4.54 证明$T^{-1} = A \in \mathscr{L}(H)$其值域$D \subset V$.

4.55 设a，b是给定在$V \times V$上连续的半双线性形式，这里假设a在V上是强制的．用Lax-Milgram定理分析本征值问题

求$\lambda \in \mathbb{C}$，$\psi \in V$，$\psi \neq 0$使得$a(\psi, v) = \lambda b(\psi, v)$，对所有$v \in V$.

4.56 设$A = T^{-1}$，$\operatorname{Im} A \subset V$．对于$u \in V$由$Bu = Au$定义$B \in \mathscr{L}(V)$．证明$(A')_{\restriction V} = B^\times$，其中$B^\times$是$B$在$V$中的$a$—伴随（参阅第二章例2.14）.

4.57 如果a是Hermite的，证明在H中$A = A'$及在V中$B = B^\times$．此外，如果a是强制的证明A在H中是正定的.

4.58 设Ω是正方形$(0,1) \times (0,1)$．考虑微分方程

$$\mathfrak{M}u := \sum_{|\alpha| < p} (-1)^{|\alpha|}[D^\alpha p_\alpha(t) D^\alpha u],$$

$$\mathfrak{N}u := \sum_{|\alpha| < q} (-1)^{|\alpha|}[D^\alpha q_\alpha(t) D^\alpha u],$$

这里$0 \leqslant q < p$，p_α，q_α是$C^{|\alpha|}(\Omega)$中的实值函数，$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$，$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$．边界条件是$p$个无关的函数

$$\mathfrak{l}_i(u):=\sum_{|\alpha|\leqslant 2p-1} b_{i\alpha}D^\alpha x=0$$

对于 $t\in\partial\Omega$, $b_{i\alpha}\in\mathbb{C}$, $i=1,\cdots,p$.

设$\mathscr{D}$是$C^{2p}(\Omega)$中满足边界条件的函数空间。如果$(\cdot,\cdot)_2$是$L^2(\Omega)$的内积，我们假设$(\mathfrak{M}x,y)_2$及$(\mathfrak{N}x,y)_2$是关于x, $y\in\mathscr{D}$的Hermite正定的半双线性形式。证明对于x, $y\in\mathscr{D}$, $(x,y)_H=(\mathfrak{M}x,y)_2$及$(x,y)_V=(\mathfrak{N}x,y)_2$定义了$\mathscr{D}$中两个内积。如果$H$及$V$是$\mathscr{D}$的关于$\|\cdot\|_H$及$\|\cdot\|_V$的完备的Hilbert空间，证明$V$在$H$中稠密且本征值问题

$$\mathfrak{M}u=\lambda\mathfrak{N}u \qquad \text{在}\Omega\text{中},$$

$$\mathfrak{l}_i(u)=0 \qquad \text{在}\partial\Omega\text{上}, \quad i=1,\cdots,p,$$

对于所有$v\in V$可以写为$(u,v)_H=\lambda(u,v)_V$.

例4.20 偏微分形式

$$\mathfrak{L}u:=-\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial t_i}\left[a_{ij}(t)\frac{\partial u}{\partial t_j}\right]+a_0(t)u,$$

其中a_{ij}, a_0是$C(\Omega)$中的函数，相应于半双线性形式

$$a(u,v):=\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}\partial_i u\partial_j\overline{v}+a_0u\overline{v}\right]dt.$$

如果存在$\alpha>0$及$\alpha_0>0$使得

$$\mathscr{Re}\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}(t)\xi_i\overline{\xi}_j\geqslant\alpha\sum_{i=1}^{N}|\xi_i|^2,$$

$$\xi_i\in\mathbb{C}\text{，几乎处处在}\Omega\text{中},$$

$$\mathscr{Re}\ a_0(t)\geqslant\alpha_0 \qquad \text{几乎处处在}\Omega\text{中},$$

那么由Gärding不等式(Yosida, 1965, P 175),

$$\mathscr{Re}\ a(u,u)\geqslant\min(\alpha,\alpha_0)\|u\|_1^2 \qquad \text{对于}u\in H^1(\Omega).$$

在这些假设下，$a(u,v)$在$H^1(\Omega)$中是强制的。系数在Ω中

的有界性蕴涵$a(u,v)$ 在$H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 上是连续的.

命题4.17 如果嵌入 i : $V\to H$是紧的，并且对于某个$z_0 \in \mathbb{C}$及$\alpha>0$,

$$\mathscr{Re}(a(u,u)-z_0\|u\|_H^2)\geqslant\alpha\|u\|_V^2 \qquad 对于 u\in V, \tag{4.42}$$

那么算子T在H中有紧的预解式.

证明　若$T:D\to H$是相应于$a(u,v)$ 的算子，那么$T-z_0$: $D\to H$相应于$a(u,v)-z_0(u,v)_H$. 于是由Lax-Milgram定理方程 $(T-z_0)u=f$ 有唯一解 $u=(T-z_0)^{-1}f=R(z_0)f$，其中 $R(z_0)\in\mathscr{L}(H,V)$. 所以，$R(z_0)=\mathrm{i}\circ R(z_0)$ 在H中是紧的及 $R(z_0)_{\restriction V}=R(z_0)\circ\mathrm{i}$在$V$中是紧的. □

例4.21 嵌入$H_0^1(\Omega)\to L^2(\Omega)$ 及$H^1(\Omega)\to L^2(\Omega)$ 都是紧的. 于是与齐次的Dirichlet 问题及 Neumann 问题相应的微分算子有紧的预解式.

感兴趣的读者可参阅Coddington 和 Levinson (1955) 以了解常微分方程的更多内容，并且参阅Lions 和 Magenes (1968), Aubin (1972) 和 Ciarlet (1978) 进一步了解椭圆型偏微分方程.

现在我们转向介绍已经引入的微分边值问题的某些数值方法.

9. 关于常微分方程的投影法

我们再次考虑p阶微分方程

$$\mathcal{L}u:=u^{(p)}-\sum_{\mathrm{i}=0}^{p-1}a_{\mathrm{i}}(t)u^{(\mathrm{i})}=f(t),$$

$$a\leqslant t\leqslant b, \tag{4.33}$$

带有p个齐次边界条件

$$l_k(u) := \sum_{i=0}^{p-1} [\alpha_{ik} u^{(i)}(a) + \beta_{ik} u^{(i)}(b)] = 0,$$

$$k = 1, \cdots, p. \qquad (4.34)$$

设 T 是在 $X = L^2(a,b)$ 或 $L^2(a,b)$ 中的微分算子，对于 $u \in D$ 由 $Tu = \mathfrak{L}u$ 定义，这里

$$D = \{u \in C^{p-1}(a,b);\ u^{(p)} \in X \quad \text{并且} \quad l_k(u) = 0,\ k = 1, \cdots, p\}.$$

我们考虑方程

$$Tu = f \qquad (\text{或} T\psi = \lambda\psi).$$

投影方法的原理，比方说把 n 个线性条件强加于剩余 $Tu_n - f$（或 $T\psi_n - \lambda_n\psi_n$）上来计算 n 维子空间 X_n 中的逼近解 u_n（或本征向量 ψ_n）。例如设 Y_n 是 X 的子空间，有相同维数 n，且设 π_n 是从 X 到 Y_n 上的投影。投影方法要求

$$\pi_n[Tu_n - f] = 0, \quad u_n \in X_n,$$

$$(\text{或}\ \pi_n[T\psi_n - \lambda_n\psi_n] = 0, \quad \psi_n \in X_n).$$

在现在所述的方法中，X_n 是由多项式或逐段多项式组成.

9.1 矩法

我们在 $H = L^2(a,b)$ 内考虑问题.（4.33）及（4.34）的逼近解在形式

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{in} e_i(t)$$

中寻找，这里 $\{e_i\}_1^n$ 是满足（4.34）的 $p+i-1$ 次多项式，$i = 1, \cdots, n$。我们记 $\{e_1, \cdots, e_n\} = \mathbb{P}_{p+n-1} \cap (4.34)$.

除 $\mathfrak{L}u$ 之外，有另外一种微分形式

$$\mathfrak{M}u := u^{(p)} - \sum_{i=0}^{p-1} b_i(t) u^{(i)}, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

我们用D^p记算子$u \mapsto D^p u = u^{(p)}$。系数$\xi_{in}$由条件

$$\int_a^b (u_n - f)\overline{\mathfrak{M}e_i}dt = 0, \quad i = 1, \cdots, n \tag{4.43}$$

决定。它们是如下$n \times n$线性方程组的解：

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b \mathfrak{L}e_j \overline{\mathfrak{M}e_i} dt\right)\xi_{jn} = \int_a^b f\overline{\mathfrak{M}e_i}dt,$$

$$i = 1, \cdots, n.$$

在实际计算中通常作出$\mathfrak{M}$的两种选择：

(i) $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$：这得到最小二乘法。

(ii) $\mathfrak{M} = D^p$：可以假定$\mathfrak{M}e_i = t^{i-1}$，$i = 1, 2, \cdots, n$。

后一种方法常常称为“基本”最小二乘法。

我们定义$E_n = \{e_1, \cdots, e_n\}$及$F_n = \mathfrak{M}E_n = \{\mathfrak{M}e_1, \cdots, \mathfrak{M}e_n\}$作为$L^2(a, b)$的子空间。设$\pi_n$是$F_n$上正交投影；(4.43)可以改写为

$$\pi_n[Tu_n - f] = 0, \quad u_n \in E_n.$$

这意味着要求剩余$Tu_n - f$正交于F_n。

习题

4.59 利用第(ii)选择的矩量法研究$T\psi = \lambda\psi$的逼近。

4.60 证明对于最小二乘法有$F_n = \mathfrak{L}E_n = (1-K)\mathbb{P}_{n-1}$，而对于基本最小二乘法则有$F_n = D^p E_n = \mathbb{P}_{n-1}$.

以后，矩法特别是指选择(ii)；即$\mathfrak{M} = D^p$。

9.2 配置法

现在置问题于$L(a, b)$中。设$e_i(t) = \Sigma_{j=0}^{p-1} c_{ij}t^j + t^{p+i-1}$，$i = 1, 2, \cdots$，是次数为$p$，$p+1$，$p+2$，$\cdots$，多项式序列，它们满足(4.34)。逼近解$u_n$仍在形式

$$u_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\xi_{in}e_i(t)$$

中寻找．配置法是由剩余 Tu_n-f 必须在几个规定的配置点 $\{\tau_i\}_1^n$ 上等于零的条件来决定 ξ_{in}，其中，

$$a\leqslant\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n\leqslant b.$$

于是得到

$$u_n^{(p)}(\tau_i)-\sum_{k=0}^{p-1}a_k(\tau_i)u_n^{(k)}(\tau_i)=f(\tau_i),$$

$$i=1,\cdots,n. \qquad (4.44)$$

ξ_{in} 是 $n\times n$ 线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\left[e_j^{(p)}(\tau_i)-\sum_{k=0}^{p-1}a_k(\tau_i)e_j^{(k)}(\tau_i)\right]\xi_{jn}=f(\tau_i),$$

$$i=1,\cdots,n$$

的解．如果配置 $\{\tau_i\}_1^n$ 点使得 $\det(Te_j(\tau_i))\neq 0$，则方程组有唯一解．

我们现在定义 $X_n=\{e_1,\ \cdots,\ e_n\}$ 及 $Y_n=\mathbb{P}_{n-1}$ 作为 $L^\infty(a,b)$ 的子空间．设 L_n 是 Lagrange 插值映射，它将每个连续函数映射为其本身在点 $\{\tau_i\}_1^n$ 的 $(n-1)$ 次插值多项式．(4.44) 可以改写为

$$L_n(Tu_n-f)=0,\quad u_n\in X_n.$$

习题

4.61 用配置法研究 $T\psi=\lambda\psi$ 的逼近．

4.62 比较用配置法和用矩法解 $Tu=f$ 中出现的离散问题．

4.63 验证离散问题 (4.44) 仅取决于配置点及 X_n，于是选择 $y_n=\mathbb{P}_{n-1}$ 是任意的．可以作出什么样的其它选择？

9.3 逐段多项式的使用

当函数$e_i(t)$选为逐段多项式时，相同的方法仍可定义．设$\Delta=\{t_i\}_0^n$是$[a, b]$的严格分划，$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$．令$\Delta_i:=[t_{i-1}t_i)$，$i=1, \cdots, n$．设$\mathbb{P}_{p+r,\Delta}^{p-1}$是$C^{p-1}(a, b)$中的函数集即是在每个$\Delta_i$（$i=1, \cdots, n$）上次数小于$p+r+1$的多项式．我们定义$C_n$为$\mathbb{P}_{p+r,\Delta}^{p-1}$中满足（4.34）的函数集合：$C_n=\mathbb{P}_{p+r,\Delta}^{p-1}\cap$（4.34）．设$\{e_i\}_1^{n(r+1)}$是$C_n$的基；$u_n=\sum_{i=1}^{n(r+1)}\xi_{in}e_i$，这里$\xi_{in}$是这样决定的，使剩余$\mathfrak{L}u_n-f$

（1）在矩法中正交于子空间$F_n=\mathfrak{M}C_n=\{\mathfrak{M}e_i\}_1^{n(r+1)}$．

（2）在配置法中在每个Δ_i上选择的$r+1$个配置点$\{\tau^i_j\}_{j=1}^{r+1}$，$i=1, \cdots, n$上等于零．

习题

4.64 关于矩法我们选择$\mathfrak{M}=D^p$．证明$D^pC_n=\mathbb{P}_{r,\Delta}$．用习题4.4定义的投影$\pi_n$来改写条件$\mathfrak{L}u_n-f\perp F_n$．

4.65 证明条件$(\mathfrak{L}u_n-f)(\tau^i_j)=0$可用习题4.6定义的投影$L_n$来改写．

9.4 积分公式表述的说明：Galerkin法

由命题4.15方程组（4.33）及（4.34）等价于

$$u=Gx, \quad x=Kx+f. \tag{4.45}$$

我们指明微分方程的投影法可以解释为关于它的积分公式表述的Galerkin 法．我们考虑矩法（其中$\mathfrak{M}=D^p$）及配置法．于是，在多项式的情形子空间X_n及Y_n定义为

$$X_n=\mathbb{P}_{p+n-1}\cap(4.34) \text{ 及 } Y_n=\mathbb{P}_{n-1}$$

或在逐段多项式情形

$X_n=\mathbb{P}_{p+r,\Delta}^{p-1}\cap$（4.34）及$Y_n=\mathrm{P}_{r,\Delta}$，并且$\pi_n$是$Y_n$上的投影．

命题4.18 X_n，Y_n，π_n由上述定义，T的投影法等价于

由Y_n定义的关于$1-K$的Galerkin 法。

证明　这容易从$D^p X_n = Y_n$得出。方程

$$\pi_n(Tu_n - f) = 0 \quad u_n \in X_n$$

所以等价于

$$u_n = Gx_n, \ x_n = \pi_n K x_n + \pi_n f, \ x_n \in Y_n. \square \tag{4.46}$$

命题4.18可用来检验配置法中Y_n的选择的正确性。

推论4.19　如果$\pi_n \xrightarrow{p} 1$，那么当$n \to \infty$时$u_n \to u$。

证明　$u - u_n = G(x - x_n)$，这里G是有界的。因为$\pi_n \xrightarrow{p} 1$并且K是紧的，所以$x_n \to x$。□

我们定义（4.46）的（Galerkin）迭代解$\tilde{x}_n = Kx_n + f$。

命题4.20　下面等式成立：

$$u - u_n = T^{-1}(1 - \pi_n)\tilde{x}_n. \tag{4.47}$$

证明

$$\begin{aligned} x - x_n &= (1-K)^{-1} f - (1 - \pi_n K)^{-1} \pi_n f \\ &= (1-K)^{-1}(1-\pi_n)K(1-\pi_n K)^{-1}\pi_n f \\ &\quad + (1-K)^{-1}(1-\pi_n) f \\ &= (1-K)^{-1}(1-\pi_n)(Kx_n + f) \\ &= (1-K)^{-1}(1-\pi_n)\tilde{x}_n. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} u - u_n &= G(1-K)^{-1}(1-\pi_n)\tilde{x}_n \\ &= T^{-1}(1-\pi_n)\tilde{x}_n. \qquad \square \end{aligned}$$

在第七章第6节中，就逐段多项式分析$u - u_n$的超收敛性时将用到等式（4.47）。

例4.22　在$C(-1, 1)$中用 Chbyshev点$\{\tau_i\}_1^n$的配置法来逼近方程$Tu = f$。作变量代换$u^{(p)} = x$，重新得到第7.3节定

义的关于 $1-K$ 的配置方法。由命题4.9

$$\|u^{(p)}-u_n^{(p)}\|_{2,\rho}\leqslant c\ \mathrm{dist}_\infty(u^{(p)},\ \mathbb{P}_{n-1}),$$

及由积分

$$\|u^{(i)}-u_n^{(i)}\|\leqslant c\ \mathrm{dist}(u^{(p)},\ \mathbb{P}_{n-1}),$$

$$0\leqslant i\leqslant p-1.$$

这证明在一致范数内 $u_n\to u$。注意命题 4.10表明在 $C(-1,\ 1)$ 中 $\tilde{x}_n\to x$。

例4.23 考虑方程 $(T-z)u=f$ 及其投影逼近解 u_n。我们可以[至少在形式上(参阅第七章)]考虑由 $T\tilde{u}_n=zu_n+f$ 所定义的迭代解。$\tilde{u}_n$与如下的积分公式表述有关：

$$(T-z)u=f\Leftrightarrow\begin{cases}u=Gx\\(1-K-zG)x=f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=Gx\\x=(1-K)^{-1}[zGx+f]\end{cases}$$

于是 $\tilde{u}_n=Gx_n'$ 这里 $x_n'=(1-K)^{-1}[zGx_n+f]$. 注意 x_n' 是一种迭代解，它不同于（4.47）中当 $z=0$ 时所考虑过的迭代解，$\tilde{x}_n=(K+zG)x_n+f$，$z\neq 0$.相应于那种迭代解法.

习题

4.66 说明关于$Tu=f$ 的最小二乘法作为关于 $1-K$具有右子空间Y_n及左子空间 $\mathcal{L}X_n$ 的⊥－Petrov法。

4.67 证明关于$T\psi=\lambda\psi$ 的投影法等价于

$$\psi_n=G\varphi_n,\ (1-\pi_nK)\varphi_n=\lambda_n\pi_nG\varphi_n,\ \varphi_n\in Y_n.$$

4.68 证明当 $\pi_n\xrightarrow{p}1$ 时对于足够大的n及 $z\in\rho(T)$预解式的差满足

$$\|(1-\pi_nK-z\pi_nG)^{-1}\pi_nG-(1-K-zG)^{-1}G\|\to 0 \text{ 当}$$

$n\to\infty$.

4.69 证明恒等式

$$(1-P)\psi_n=(T-\lambda_n)^{-1}(1-P)(1-K-\lambda_nG)\varphi_n$$

$$= S(\lambda_n)(\varphi_n - \widetilde{\varphi}_n) \ (\text{其中}\ \widetilde{\varphi}_n = K\varphi_n + \lambda_n G\varphi_n)$$
$$= S(\lambda_n)(\pi_n - 1)\widetilde{\varphi}_n.$$

关于$Tu = f$的投影法作为关于（4.45）的 Galerkin 法有非常简单说明，而对于本征值问题就不容易，这是因为积分公式表述得到广义本征值问题（参阅例4.16及习题4.67）。我们现在借助于 Petrov 法而不是 Galerkin 法来给出另一个可能的说明。

9.5　另一种说明：Petrov 方法

设给定$0 \neq -z \in \rho(T)$并且令$A_z := (T+z)^{-1}$。我们考虑例4.17确定的等价性

$$Tu = f \Longleftrightarrow \begin{cases} u = A_z y \\ y = zA_z y + f \end{cases}$$

其中X_n，Y_n，π_n如第9.4节确定，令$X_n' := TX_n = (1-K)Y_n$。

命题4.21　关于T的投影法等价于由右子空间X_n'及左子空间Y_n所定义的关于$1 - zA_z$的Petrov法。

证明　$\pi_n[Tu_n - f] = 0$，$u_n \in X_n$等价于

$$u_n = A_z y_n, \quad \pi_n[(1 - zA_z)y_n] = \pi_n f, \quad y_n \in X_n'. \qquad \square \tag{4.48}$$

在上述框架中由推论4.19给出的收敛性可按如下的方法：

$$u - u_n = A_z(y - y_n)$$

得到证明，并且从下一个引理得出$y_n \to y$。

引理4.22　若$\pi_n \xrightarrow{P} 1$，上述确定的 Petrov 法是收敛的。

证明　我们利用命题4.8，其中X_n'，Y_n使得$X_n' = (1-K)Y_n$这里K是紧的。$\square$

我们现在确定关于(4.48)(Petrov)迭代解$\widetilde{y}_n = zA_z y_n + f$.

命题4.23　下面恒等式成立

$$u - u_n = (1/z)(y - \widetilde{y}_n). \qquad (4.49)$$

证明

$$u - u_n = A_z(y - y_n) = \frac{1}{z}(y - f) - \frac{1}{z}(\widetilde{y}_n - f)$$

$$= \frac{1}{z}(y - \widetilde{y}_n). \ \square$$

习题

4.70 如果$0 \in \rho(T)$且$A = T^{-1}$，关于$T\psi = \lambda\psi$的投影法等价于

$$\psi_n = A\theta_n, \quad \pi_n[\theta_n - \lambda_n A\theta_n] = 0, \quad \theta_n \in X'_n.$$

4.71 证明恒等式，如果$\lambda_n \neq 0$，

$$(1 - P)\psi_n = \frac{1}{\lambda_n}(1 - P)\widetilde{\theta}_n \text{ 其中} \widetilde{\theta}_n = \lambda_n A\theta_n.$$

9.6 文献注释

关于无界算子T的投影法在 Krasnoselskii 等（1972）中对应用于矩法及配置法加以研究．关于用多项式的配置法可参阅 Karpilovskaia（1963）和 Vainikko（1966），关于用逐段多项式的配置法可参阅Russel和Shampine（1972）．

10．偏微分方程的投影法

这里仍使用8.2节的那些记号．我们回忆H与V是复Hilbert空间，$V \subset H$并且V在H中稠密，V到H的单射是连续的。考虑方程 $Tu = f$ 及其弱形式

$$a(u, v) = (f, v)_H \text{对于所有 } v \in V. \qquad (4.40)$$

设给出V的有限维子空间族 $\{V_n\}_N$. V_n上的投影法归结为用$u_n \in V_n$来逼近u，u_n是在V_n中方程

$$a(u_n, v_n) = (f, v_n)_H \text{对于所有 } v_n \in V_n \qquad (4.50)$$

的解。如果我们假设$a(\cdot,\ \cdot)$在V上是强制的，投影$\pi_n^a: V\to V_n$由于

$$a((1-\pi_n^a)u,\ v)=0 \quad 对于所有 v\in V_n 所有 u\in V$$

而明确定义（参阅例2.18）.

习题

4.72　证明（4.50）有唯一解u_n。

4.73　写出与V_n的基的选择相应的矩阵问题。

定理4.24　若$a(\cdot,\ \cdot)$在V上是强制的，则（4.50）的解u_n是（4.40）的精确解的投影$\pi_n^a u$。

证明　（4.40）定义有界算子$A: H\to V$使得$a(Af,\ v)=(f,\ v)_H$对于H中的所有f，v在V中，且$u=Af$。于是

$$a((1-\pi_a^n)Af,\ v_n)=0 \quad 对于H中的所有f, V_n$$

中的所有v_n

这证明有界算子$A_n: H\to V$由

$$a(A_n f,\ v_n)=(f,\ v_n)_H \quad 对于所有的v_n\in V_n$$

所确定，使得$A_n=\pi_n^a A$。所以

$$u_n=A_n f=\pi_n^a Af=\pi_n^a u。\ \square$$

当投影法用于弱形式

$$T_n=f \Longleftrightarrow u=Af$$

时，值域在V内的算子A可由$\pi_n^a A$来逼近.这是在有界算子A上借助于投影π_n^a而规定的（如在A部分中）一种Galerkin法。当子空间V_n由连续的分段多项式组成时，这种方法以协调有限元法（f、e、m、）著称.

例4.24　在其最简单的形式中，有限元法是一个构造V的子空间V_n的特殊过程. 例如，读者可以在Ciarlet(1978)中找到实际例子.

A与A_n可以定义为

$$a(Af,v)=(f,v)_H, \qquad \forall v\in V,$$
$$a(A_n f,v_n)=(f,v_n)_H, \quad \forall v_n\in V_n.$$

类似地，H—伴随算子A'和A'_n：$H\to V$可以定义为

$$a(v,A'f)=(v,f)_H, \qquad \forall v\in V,$$
$$a(v_n,A'_n f)=(v_n,f)_H, \quad \forall v_n\in V_n,$$

（习题4.53）．我们知道 $(A')_{\restriction V}=(A_{\restriction V})^{\times}$,（$A_{\restriction V}$ 是V中的 a—伴随），且有

$$(A'_n)_{\restriction V}=(A_{n\restriction V})^{\times}=(\pi_n^a A_{\restriction V})^{\times}$$

（习题4.56）．

习题 4.74 试用问题

求$\lambda_n\in\mathbb{C}$，$\psi_n\neq 0$：$a(\psi_n,v_n)=\lambda_n(\psi_n,v_n)_H, \forall v_n\in V_n$来逼近问题（4.41）．注意一般说 $\psi_n\neq\pi_n^a\psi$。

10.1 方法的收敛性

在V中考虑问题．由于$u-u_n=(1-\pi_n^a)u$，问题在于以$\delta_n(u)=\mathrm{dist}_V(u,V_n)$界定$\|(1-\pi_n^a)u\|_V$．

引理4.25 若$a(\cdot,\ \cdot)$在V上是强制的，则对所有的$u\in V$，有

$\max(\|(1-\pi_n^a)u\|_V,\|(1-\pi_n^{a\times})u\|_V)\leqslant(\beta/\alpha)\delta_n(u)$ 其中 β 及 α 分别是（4.38）和（4.39）中的常数。

证明 这已在第二章例2.18中证明了。□ 所得到的界$\|u-u_n\|_V\leq(\beta/\alpha)\delta_n(u)$应归功于Céa（见Ciarlet 1978，在那里没有用到投影π_n^a）。由引理4.25，$\|u-u_n\|_V$的估计问题化为一个逼近论的问题，即是，估计在V的范数下，解u到V的子空间V_n的距离．在第六章中我们将回到这个问题，并论述误差界．因为对V中的任何u有$\|u\|_H\leq c\|u\|_V$，由引理4.25可以得出估计式$\|u-u_n\|_H\leq c\delta_n(u)$，这里$c$是一个普通的常数．在适当的假设下，估计式可以得到改进，这由下面的引理可得．

引理4.26 (Aubin—Nitsche) 设$V\subset H$且$\overline{V}=H$，则有

$$\|u-u_n\|_H\le c\|u-u_n\|_V\delta_V(A'H,V_n).$$

证明 如同已看到的$A':H\to V$，满足关系

$$a(v,A'g)=(v,g)_H \qquad \forall v\in V, g\in H.$$

现在 $u-u_n=(1-\pi_n^a)u$且

$$((1-\pi_n^a)u,g)_H=a((1-\pi_n^a)u,A'g)=$$
$$=a((1-\pi_a^a)u,(1-\pi_n^{a\times})A'g).$$

于是

$$\|(1-\pi_n^a)u\|_H=\sup_{0\neq g\in H}\frac{|((1-\pi_n^a)u,g)_H|}{\|g\|_H}$$
$$\le c\|(1-\pi_n^a)u\|_V\sup_{0\neq g\in H}\frac{\|(1-\pi_n^{a\times})A'g\|_V}{\|g\|_H}.$$

今有

$$\|(1-\pi_n^{a\times})A'g\|_V\le c\,\mathrm{dist}_V(A'g,V_n),$$
$$\delta_V(A'H,V_n)=\sup_{g\in H}(\mathrm{dist}_V(A'g,V_n);\ \|A'g\|_V=1),$$

且由于$A'\in\mathscr{L}(H,V)$，又有

$$\|A'g\|_V<c\|g\|_H.$$

所以

$$\sup_{0\neq g\in H}\frac{\|(1-\pi_n^{a\times})A'g\|_V}{\|g\|_H}\le c\sup_{0\neq g\in H}\left(\frac{1}{\|A'g\|_V}\mathrm{dist}_V(A'g.V_n)\right)$$
$$\le c\delta_V(A'H,V_n).$$

若V_n很好地逼近$A'H$，则这给出一个改进。例如，若A是紧的，则A'也是，且$\delta_V(A'H,V_n)\to 0$ □

类似于界定数积的技巧下面将用于得出改进的结果，特别用来改进第六章中的误差$\lambda-\hat{\lambda}_n$。

因为方程（4.40）和（4.41）是在V中考虑的，我们定义

B为A在V上的限制：$B = A_{\restriction V} \in \mathscr{L}(V)$。类似地，有$(\pi_n^a A)_{\restriction V} = \pi_n^a B$。

定理 4.27 设

（i）$a(\cdot,\ \cdot)$ 在V上是强制的，

（ii）对于V中的任何一个u，有$\mathrm{dist}_V(u, V_n) \to 0$，

（iii）B在V内是紧的，

则有$\|(1 - \pi_n^a)B\|_V \to 0$。

证明是显然的。当V到H的嵌入不紧时，A，因而B，两者都不是紧的。我们定义

$$\mathscr{B}_n := \pi_n^a B_{\restriction V_n} = \pi_n^a A_{\restriction V_n} : V_n \to V_n,$$

$$B_n := \mathscr{B}_n \pi_n^a.$$

B_n是B的属于类$\mathfrak{D}$的一个逼近。

定理4.28 (Descloux，Nassif，及 Rappaz) 在定理4.27的假设（i）和（ii）之下，以下的命题是等价的：

（a）$B_n \xrightarrow{d-c} B$，

（b）$\sup_{v \in V_n}(\|(B - B_n)v\|_V;\ \|v\|_V = 1) \to 0$。

证明 由习题3.2知$B_n \xrightarrow{p} B$及（b）$\Longrightarrow$(a)。我们证明其逆。假定(a)$\not\Rightarrow$(b)。于是存在V中的一个有界序列$\{u_n\}_{\mathbb{N}}$，使得$\|(B - B_n)u_n\|_V \geq \delta > 0$对于$n \in \in N_1 \subset \mathbb{N}$成立，且有

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in N_1}} (B - B_n)u_n = v$$

使得$\|v\|_V \geq \delta$。定义v_n是v在V_n上的V—正交投影：当$n \to \infty$时$v_n \to v$。于是

$$\begin{aligned} \alpha\|v\|_V^2 \leq \mathscr{R}e\, a(u,v) &\leq \lim_{n \in N_1} |a((B - B_n)u_n, v)| \\ &= \lim_{n \in N_1} |a((B - B_n)u_n, v - v_n)| \\ &\leq \beta \lim_{n \in N_1} (\|(B - B_n)u_n\|_V \|v - v_n\|_V) = 0. \end{aligned}$$

这与$\|v\|_V \geq \delta > 0$矛盾。□

由命题 3.20及习题 3.13 可知，对 $\rho(B)$ 的任何 z，

$B_n \xrightarrow{d-c} B$ 蕴涵了在V中$B_n - z\pi_n^a \xrightarrow{d-s} B - z$。

习题

4.75 证明$\rho(A) = \rho(B)$ 及 $Q\sigma(A) = Q\sigma(B)$ (Descloux—Nassif—Rappaz) 。

4.76 对于$\rho(B_n)$中的 z 及所有的 n，证明

$$\sup_{u \in V_n} (\|(B_n - z)^{-1}u\|_V;\ \|u\|_V = 1) < c, \quad \forall n,$$

$$\Longleftrightarrow \sup_{u \in V_n} (\|A_n - z)^{-1}u\|_H;\ \|u\|_H = 1) < c, \quad \forall n,$$

其中 c 是一个普通的常 数 (Descloux—Nassif—Rappaz—Tartar)。

4.77 证明在定理 4.27 的假设下有

$$\|(1 - \pi_n^a)A\|_H \to 0.$$

10.2 当$a(\cdot, \cdot)$是 Hermite 半双线性形式时的 Rayleigh—Ritz法

在本段中设$a(\cdot, \cdot)$是 Hermite 半双线性形式：

$$a(u,v) = \overline{a(v,u)}$$ 对于$u,v \in V$. 当半双线性形式$a(u,v)$在V上是强制的时，它在V上定义了一个内积及其相应的范数：

$$(u,v)_a := a(u,v), \quad \|u\|_a := \sqrt{a(u,v)}, \quad u,v \in V.$$

投影 π_n^a 关于这个内积是正交的（习题2.18），且(4.50)的解u_n是 u 在范数$\|\cdot\|_a$下的最佳逼近：

$$\|u - u_n\|_a = \min_{v \in V_n} \|u - v\|_a.$$

关于 $u = Af$ 的 Galerkin 法归结为对Rayleigh—Ritz 逼近$u_n = \pi_n^a u$ 的计算。

习题

4.78　设T是如命题4.16所定义的．证明T在H内是自伴正定算子，且对于$u\in D$及$v\in V$，$(u,v)_a=(Tu,v)_H$。对于A解决同样的问题。

4.79　设S如同定理2.9中所定义．证明$S=S^*=S^\times$在V内是自伴正定算子，且$(u,v)_a=(S^{-1}u,v)$．

4.80　B是a－自伴的，试导出$\pi_n^a B\pi_n^a$在V内是a—自伴的。验证离散问题（4.50）的矩阵是Hermite正定阵。

当a是Hermite形式时，（4.40）的解u是极小化问题：

求$u\in V$使得 $J(u)=\min\limits_{v\in V}J(v)$，　　　　(4.51)

的解其中$J:V\to\mathbb{C}$，是由式

$$J: v\in V\mapsto J(v):=\frac{1}{2}a(v,v)-(f,v)_H$$

定义的泛函．u_n是（4.51)在V_n中的解：$J(u_n)=\min_{v\in V_n}J(v)$．在弹性理论中，$u$表示一个力学系统的位移，而$J$表示能量。范数$\|\cdot\|_a$常称为“能量”范数；在$V$上它等价于$\|\cdot\|_V$.（4.40)称为(4.51)的变分形式.这个名称来自微分学的观点：设$J'(u)$是J在$u\in V$处的Fréchet导数。(4.51)表示

$J'(u)v=a(u,v)-(f,v)_H=0$，$\forall v\in V$，这就是J的一次变分（即其Taylor展式的一阶项），当$J(u)$是J的一个极小值时，对于所有的v都等于0．当J是凸泛函时，正如在这里的情形，这一条件也是充分的，当a不是Hermite形式时，不再存在相应于（4.40）的极小化说明。现在来论述，当$a(\cdot,\cdot)$是Hermite形式且在V上强制时，Rayleigh—Ritz法应用于本征值问题（4.41）的一种重要性质。所考虑的逼近是

求出$\lambda_n\in\mathbb{C}$，$0\neq\psi_n\in V_n$

使得　$a(\psi_n,v_n)=\lambda_n(\psi_n,v_n)_H$对任一$v_n\in V_n$.设谱的下半部分

中包含有限个具有有限重数的孤立本征值：依照它们的代数重数的增加值被编号为μ_i（对应地，$\mu_i^{(n)}$），$i=1,\cdots,k$。

命题4.29 设a是Hermite形式且在V上强制，则在谱的下半部分中，重本征值满足

$$\mu_i^{(n)}\geqslant\mu_i,\quad i=1,\cdots,k.$$

证明 本征值的极小—极大表示的一种形式为

$$\mu_i=\max_{\substack{F\subset V\\ \operatorname{codim}F=i-1}}\ \min_{u\in F}\frac{a(u,u)}{(u,u)_H},\quad i=1,\cdots,k,$$

其中$\operatorname{codim}F=\dim F^{\perp}$（Kato，1976，P.60）。设$F_0$是$V$的一个子空间，使得

$$\mu_i=\min_{u\in F_0}\frac{a(u,u)}{(u,u)_H}$$

其中$\operatorname{codim}F_0=i-1$。因而

$$\mu_i\leqslant\min_{u\in F_0\cap V_n}\frac{a(u,u)}{(u,u)_H}$$

且因为$\operatorname{codim}F_0=i-1$，$F_0\cap V_n$关于$V_n$的余维数不大于$i-1$。于是

$$\mu_i\leqslant\min_{u\in F_0\cap V_n}\frac{a(u,u)}{(u,u)_H}\leqslant\mu_i^{(n)},\quad i=1,\cdots,k.\qquad\square$$

10.3 有限元法的其他例子

我们举出一些有限元法的抽象框架，这些方法和在本节开始介绍的基本有限元法（4.40）及（4.41）有所不同。

例4.25（椭圆型本征值问题一般弱形式的协调有限元法）设V是复Hilbert空间，a，$b:V\times V\to\mathbb{C}$是连续的半双线性形式，且设a在V上是强制的。由V中的Lax—Milgram定理知

$$a(u,v)=(S_a^{-1}u,v)_V=(u,S_a^{-1*}v)_V,$$

$$b(u,v) = (S_b^{-1}u, v)_V = (u, S_b^{-1*}v)_V,$$

其中 S_a^{-1}，S_b^{-1}及 S_a在V上是有界的。

广义本征值问题：

求$\lambda \in \mathbb{C}$，$0 \neq u \in V$；$a(u,v) = \lambda b(u,v)$对所有的 $v \in V$ 等价于

$$Bu = (1/\lambda)u \quad 且 \quad B = S_a S_b^{-1} \in \mathscr{L}(V).$$

$a(S_a S_b^{-1}u, v) = (S_b^{-1}u, v)_V = b(u,v) = a(u, S_a^* S_b^{-1*}v)$证明了

B的a-伴随算子是$B^\times = S_a^* S_b^{-1*}$。

设$\{V_n\}_\mathbb{N}$是V的一个子空间族。把原来的问题的弱形式限制在$V_n \times V_n$上：

求$\lambda_n \in \mathbb{C}$，$0 \neq u_n \in V_n$；$a(u_n, v_n) = \lambda_n b(u_n, v_n)$，对所有的$v_n \in V_n$。

这等价于$B_n u_n = (1/\lambda_n)u_n$，其中$B_n = \pi_n^a B$，这里$\pi_n^a$是$V_n$上的椭圆型投影。

注记 问题（4.41）是上述问题对于$b(u,v) = (u,v)_H$的一种特殊情形。上面的分析证实了这样一件事实，V是提出问题的自然空间。而H则是第二位的。

例4.26 （对于非椭圆型方程的混合与杂交有限元法）当a是非强制的Hermite形式时，u是泛函$J(v)$的一个驻定点，在“混合”与“杂交”方法中，形式$\mathscr{R}e\ a(v,v)$能够取不同的符号，且v可以含有两种不同类型的未知量—位移和应力。问题能够纳入下面的抽象框架之中。

设H_1及H_2是两个复Hilbert空间，其范数分别是$\|\cdot\|_1$及$\|\cdot\|_2$，设给出了从$H \times H$到$\mathbb{C}$内两个连续的半双线性形式a与b。

加在a上的强制性条件现在由下面较弱的条件代替

$$\inf_{\substack{u \in H_1 \\ \|u\|_1 = 1}} \sup_{\substack{v \in H_2 \\ \|v\|_2 = 1}} |a(u,v)| \geqslant \alpha > 0, \tag{4.52}$$

$$\sup_{\substack{u\in H_1\\ \|u\|_1=1}} |a(u,v)|>0\text{，对}H_2\text{中所有的 }v\neq 0\text{。}$$

Riesz表现定理表明，存在从H_1到H_2内的有界算子A与B，使得对所有的$v\in H_2$，有$a(u,v)=(Au,v)_2$和$b(u,v)=(Bu,v)_2$。伴随算子A^*与B^*是从H_2到H_1内的，且对所有的$u\in H_1$满足条件$a(u,v)=(u,A^*v)_1$和$b(u,v)=(u,B^*v)_1$。假设（4.52）蕴涵A是从H_2到H_1内的一个同构。

设$T=A^{-1}B$及$T^\times=A^{*-1}B^*$，T是H_1上的一个有界算子，对于所有的$v\in H_2$，它满足条件$a(Tu,v)=b(u,v)$。同样地，$T^\times$是H_2上的一个有界算子，对于所有的$u\in H_1$，它满足条件$a(u,T^\times v)=b(u,v)$。我们注意到，对于H_1中所有的u及H_2中所有的v，有$a(Tu,v)=a(u,T^\times v)$：$T^\times$是T在H_1内的a一伴随算子。

为了构造T的一个逼近，引入两族有限维子空间$H_{1n}\subset H_1$及$H_{2n}\subset H_2$。我们设下面的假定成立：

$$\inf_{\substack{u_n\in H_{1n}\\ \|u_n\|_1=1}}\ \sup_{\substack{v_n\in H_{2n}\\ \|v_n\|_2=1}} |a(u_n,v_n)|=\alpha\geqslant 0,$$

$$\sup_{\substack{u_n\in H_{1n}\\ \|u_n\|_1=1}} |a(u_n,v_n)|>0\text{，对}H_{2n}\text{中所有的}v_n\neq 0\text{，及所有的 }n$$

和

$$\delta_{1n}(u)=\mathrm{dist}_1(u,H_{1n})\to 0\quad\text{对每个 }u\in H_1\text{。}$$

设$W_{1n}:=\{u\in H_1: a(u,v)=0\ \ \forall v\in H_{2n}\}$。$H_1=H_{1n}\oplus W_{1n}$及由$H_1$沿$W_{1n}$到$H_{1n}$上的投影$\pi_{1n}^a$已经定义且满足条件

$$a((1-\pi_{1n}^a)u,v_n)=0\quad\text{对 }H_{2n}\text{中所有的}v_n\text{。}$$

$$\|(1-\pi_{1n}^a)u\|_1\leqslant c\delta_{1n}(u),\quad u\in H_1\text{。}$$

类似地，从H_2到H_{2n}上的投影π_{2n}^a可以定义为

$a(u_n,(1-\pi_{2n}^a)v)=0$　对H_{1n}中所有的u_n且$\pi_{1n}^{a\times}=\pi_{2n}^a$。
设f在H_1中。对H_2中所有的v，方程$a(u,v)=b(u,v)$的解u可由方程

$$a(u_n,v_n)=b(f,v_n)，对所有的v_n\in H_{2n}$$

在H_{1n}中的解来逼近。显然$u=Tf$及$u_n=T_nf=\pi_{1n}^aTf$，注意到$(\pi_{1n}^aT)^\times=T^\times\pi_{2n}^a$。由假设知在$H_1$中$\pi_{1n}^a\xrightarrow{p}1$（习题4.81），

且若T在H_1中紧，则有$\|(1-\pi_{1n}^aT)\|_1\to 0$。

习题

4.81　证明π_{1n}^a已明确定义，且满足对$u\in H_1$有$\|(1-\pi_{1n}^a)u\|\leqslant C\delta_{1n}(u)$。对于$\pi_{2n}^a$能证明什么结论？

例4.27　（非协调有限元法）我们介绍一种情况，在其中，有限元空间V_n不是所考虑的空间V的子空间。设$G\subset H$是两个复Hilbert空间，分别带有范数$\|\cdot\|_G$及$\|\cdot\|_H$。G到H内的单射是连续的，但不必是紧的。设V是G的一个闭子空间，且设a与b是分别在$G\times G$和$H\times H$上的有界半双线性形式。

我们考虑$f\in H$时的方程。

$$a(u,v)=b(f,v)，对V中所有的v。\tag{4.53}$$

为了构造它的逼近，我们作出G的有限维子空间族$\{V_n\}$：方程

$$a(u_n,v_n)=b(f,v_n)\quad 对V_n中所有的v_n\tag{4.54}$$

当$V_n\not\subset V$时是一个非协调逼近。关于形式a，我们进一步假设

$$\mathscr{Re}\ a(u,u)\geqslant\alpha\|u\|_G^2,\ u\in V,\ \alpha>0,$$

$$\mathscr{Re}\ a(u_n,v_n)>0,\quad 对于V_n中所有的u_n\neq 0及一切的n。$$

（4.53）定义了$A:H\to V$，对于V中所有的v，它满足关系

$a(Af, v)=b(f, v)$且$u=Af$。类似地，（4.54）定义了A_n: $H\to V_n$，$u_n=A_nf$。

由于形式a在V_n上是强制的，所以从G到V_n上的投影π_n^a有定义。但是，由于缺乏在V_n上的一致强制性，不能证明它们是一致有界的。收敛性$A_n\to A$（如果这是对的）必须用其他证明而不用投影π_n^a。注意，若a在G上是强制的，则用π_n^a进行讨论是没有问题的。

10.4 参考文献与注释

当V到H内的单射是紧的时候，用一致收敛$\|T_n-T\|\to 0$研究协调有限元法首次出现在Bramble和Osborn（1973）中。有界但非紧的单射情形在Rappaz(1977)，Descloux等(1977, 1978a, b）及Mills（1979a,b）中借助于离散紧收敛讨论过。

当半双线性形式$a(\cdot, \cdot)$不是强制的时候，条件（4.52）是由Babuška（1973）和Brezzi（1974）提出的。在例4.26中引入的抽象框架由Kolata（1978，1979）和Mercier等(1981）在T的紧性假设下用过。在Mills（1979c）中它被推广到自反Banach空间。

离散紧的性质对于混合有限元法已经证明（Kikuchi 1980 a，b），也对非协调和杂交有限元法给出了证明（Stummel 1980）。

在我们已给出的说明中，重点在于椭圆型投影和算子收敛上。在以下几章中，这一框架将用来研究谱收敛和建立本征元收敛的最优阶。通常解的收敛性分析是由直接估计$\|u-u_n\|_V$作出的（例如参见Strang及Fix，1973；Ciarlet，1978）。

从计算的观点，MODULEF丛书（Begis和Perronnet，1982）提供了用有限元法解二维和三维热传导、弹性理论和流体力学问题的FORTRAN模型。关于数值积分的效果，读者可参看Ciarlet（1978，第四章），在那里提到“多数古典的有限

差分格式恰好能解释为选用特殊有限元空间和特殊求积格式的有限元法”．其结果，一致收敛性（如果可能）成为集体紧性（见第11节）．其他投影法，如同关于偏微分方程的最小二乘法和配置法在Prenter（1975）中作了简短介绍。

11. 有限差分法

给出有限差分法的综合论述超出了本书的范围。我们仅选出这些方法的少数几个有意义的特性，不加证明，但给出适当的参考文献。

11.1 数值微分

对于实变量 t 的光滑实函数 x，例如 $x \in C^p$，考虑数值微分公式

$$x^{(k)}(t) \approx (D_h^{(k)} x)(t) := h^{-k} \sum_{i=-r_k}^{s_k} a_{ik} x(t+ih)$$

这里$a_{ik} \in \mathbb{R}$，$r_k + s_k \geqslant k$．利用由

$$(S_h^i x)(t) = x(t+ih)$$

定义的位移算子 S_h^i，我们得到$D_h^{(k)} = h^{-k} \sum_{i=-r_k}^{s_k} a_{ik} S_h^i$.这个数值微分公式收敛，当且仅当对于 $x \in C^p$，在每点 t 上，当 $h \to 0$ 时，$D_h^{(k)} x(t) \to x^{(k)}(t)$．下面给出一个简单例子

$$\partial_h := h^{-1}(S_h^1 - I) \text{ 和 } \bar{\partial}_h := h^{-1}(I - S_h^{-1}).$$

函数$z \mapsto \chi(z) = \Sigma_{i=1-r_k}^{s_k} a_{ik} z^i$可以写为

$$\chi(z) = z^{-r_k}(z-1)^k p(z),$$

其中 $p(z)$ 是使得 $p(1) = 1$ 的多项式．$p(z)$ 的零点称为均差 $D_h^{(k)}$ 的特征值．

有限差分法在于用收敛的数值微分公式来代替导数。于是微分算子 T 由矩阵$A_h: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 来逼近，n 为网格点的数目．

11.2 常微分方程

我们考虑与满足（4.34）的常微分方程（4.33）相应的算子．在 Vainikko（1969b）和 Kreiss（1972）中指出一些差分格式给出预解式的离散紧收敛．有限差分法的有趣特性是它与 Fredholm 法用于积分公式表述上的联系（Vainikko，1969c）．

例4.28 我们考虑方程

$$u'' = f(t,u), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{4.55}$$

满足边界条件

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{4.56}$$

的解．问题（4.55），（4.56）等价于积分方程

$$u(t) = \int_0^1 g(t,s) f(s,u(s)) ds, \tag{4.57}$$

这里

$$g(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & 若 t \leqslant s \\ s(t-1), & 若 t \geqslant s \end{cases}$$

是微分问题

$$u'', \quad u(0) = u(1) = 0$$

的Green函数．[0,1]划分为 n 个区间，分点为 $t_i = i/n$，$i = 0, \cdots, n$，$h := \frac{1}{n}, u(t_i) := u_i$．边值问题代之以有限差分问题

$$\frac{u_{i-1,n} - 2u_{in} + u_{i+1,n}}{h^2} = f(t_i, u_{in}), \quad i = 1, \cdots, n-1, \tag{4.58}$$

$$u_{0n} = u_{nn} = 0,$$

这里 u_{in} 是逼近解 u_n 在点 $\{t_i\}_0^n$ 的值．

习题

4.82 线性方程组

$$\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}=y_i,\quad i=1,\cdots,n-1,$$

$$u_0=u_n=0$$

对于任何右端项$\{y_i\}_1^{n-1}$，有唯一解.

$$u_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}g(t_i,t_j)y_j,\quad i=0,\cdots,n.$$

所以，方程组（4.58）等价于（习题4.82）

$$u_{in}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}g(t_i,t_j)f(t_j,u_{jn}),\quad i=0,\cdots,n,\qquad (4.59)$$

并且（4.59）可以解释为用[0，1]上的矩形求积公式

$$I_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}x\left(\frac{j}{n}\right)$$

对（4.57）使用 Fredholm 离散化的结果. 这说明了为什么有限差分法的收敛可以对应于预解式的离散紧收敛. □

我们回到方程（4.33）—（4.34），用收敛的数值微分方法来逼近. Vainikko（1975，1976a,b）已经证明如果$D_h^{(p)}$的特征值的模数不等于1，那得到的逼近是离散正则收敛的.

例4.29 （Anselone和 Ansorge）设$X:=\overset{\circ}{C}{}^2[0,1]=\{u\in C^2(0,1),\ u(0)=u(1)=0,\ u''$是等度单调（或等调）$\}$而且

$$\|u\|_X:=\|u\|_\infty+\|u'\|_\infty+\|u''\|_\infty,$$

$$Y:=C(0,1),\quad \|v\|_Y:=\|v\|_\infty.$$

因此，在X中$u_n\to u\Longleftrightarrow$在$Y$中$u_n\to u$, $u_n'\to u'$, $u_n''\to u''$.

定义$A:X\to Y$，用$(Au)(t):=u''(t)+a(t)u'(t)+b(t)u(t)$，其中$a,b\in Y$. 为了离散$A$，将[0，1]划分为

n个区间，分点为$t_i = i/n$，$i = 0, \cdots, n$. $h = \frac{1}{n}$.

$A_n: X \to Y$定义为

$$(A_n u)(t) = (\bar{\partial}\partial u)(t) + a(t)\frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h} + b(t)u(t),$$

$$h \leqslant t \leqslant 1-h,$$

其中 $(\bar{\partial}\partial u)(t) := \frac{u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)}{h^2}$

$$(A_n u)(t) = (A_n u)(h), \quad 0 \leqslant t \leqslant h,$$

$$(A_n u)(t) = (A_n u)(1-h), \quad 1-h \leqslant t \leqslant 1.$$

我们想要证明$A_n \xrightarrow{r} A$. 首先注意到当$n \to \infty$时，$A_n \xrightarrow{p} A$. 设$\{u_n\}_{\mathbb{N}}$是X中有界序列使得在Y中$A_n u_n \to v$. 于是$\{u_n\}_{\mathbb{N}}$, $\{u_n'\}_{\mathbb{N}}$, 及$\{u_n''\}_{\mathbb{N}}$在Y中有界. 这推出$\{u_n\}$及$\{u_n'\}$是等度连续的，所以由 Ascoli-Arzela 定理在Y中是相对紧的. 因为在Y中$A_n u_n \to v$,

$\{\bar{\partial}\partial u_n\} = \{A_n u_n - a u_n' - b u_n + \varepsilon(n)\}$ 其中$\varepsilon(n) \underset{n \to \infty}{\to} 0$

是在Y中相对紧的. 因此存在$N_1 \subset \mathbb{N}$及$u, x, y \in Y$使得在Y中对于$n \in N_1$, $u_n \to u$, $u_n' \to x$, $\bar{\partial}\partial u_n \to y$. 因为微分算子是闭算子，$x = u'$及$y = x' = u''$. 从而对$n \in N_1$

在Y中$u_n \to u$, $\{u_n\} \subset X \Rightarrow u(0) = u(1) = 0$.

由于$\bar{\partial}\partial u_n$是连续的及$u_n''$是单调的，于是存在$\delta_n(t) \in [-1/n, 1/n]$, 使得$(\bar{\partial}\partial u_n)(t + \delta_n) = u_n''(t)$, $n \in N_1$. 现在$\{\partial - \partial u_n\}$等度连续及$y = u''$一致连续蕴涵了在$Y$中$u_n'' \to u''$. 由$\{u_n''\}$的等度单调性得出$u''$的相同单调性. 所以

$$\left.\begin{array}{l} \text{在}Y\text{中 } u_n \to u,\ u_n' \to u',\ u_n'' \to u'' \\ u''\text{单调},\ u(0) = u(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{在}X\text{中 } u_n \to u.$$

连同 $Au=v$，这就证明了$A_n \xrightarrow{r} A$.

在 Vainikko (1976b, PP.101—104) 中给出的上例的分析与前面提出的离散化相类似。

在这个意义上（离散）正则收敛的概念是一种十分有用的工具因为它允许在微分算子上直接工作。反之，（离散）紧收敛需要在反面工作。

11.3 椭圆型偏微分方程

偏微分方程各种格式的有限差分法的收敛性已在 Grigorieff 和 Jeggle (1973)，Vainikko 和 Tamme(1976) 及在 Vainikko (1976a,b, 1978a,b) 中又用离散正则收敛概念进行了研究。

12. 用邻近算子逼近微分算子

相应于常微分方程 (4.33)—(4.34) 的微分算子 T，用有限秩算子逼近，不能保持本征值的渐近分布。我们介绍一种方法来结束这一章，它可以逼近这个渐近分布：T 的逼近不是用有限秩算子，而是用下面定义的邻近微分算子。

定义 设 T 是相应于在[0,1]上，

$$\mathfrak{L}u := u^{(p)} - \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\cdot)u^{(i)},$$

具有 p 个齐次边界条件的微分算子. T_n 是邻近微分算子，当且仅当它是相应于在[0,1]上，

$$\mathfrak{L}_n u := u^{(p)} - \sum_{i=0}^{p-1} a_i^{(n)}(\cdot)u^{(i)},$$

满足相同边界条件，并且使得

$$\|a_i - a_i^{(n)}\|_\infty := \max_{t\in[0,1]} |a_i(t) - a_i^{(n)}(t)| \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

$i = 0, \cdots, p-1$.

在Canosa和Gomes de Oliveira (1970)与在 Day(1974)中，用阶梯函数来逼近系数函数a_i，而在 Pruess (1973a,b)与Smooke (1978, 1980a,b) 中，是用逐段多项式函数来逼近。

例4.30 考虑在[0,1]上的二阶微分方程：

$$X = C(0,1),\quad D = \{u \in X;\ u'' \in X \text{且} u(0) = u(1) = 0\},$$

$$T: u \in D \mapsto u'' - a_1 u' - a_0 u,$$

$$T_n: u \in D \mapsto u'' - a_1^{(n)} u' - a_0^{(n)} u,$$

这里a_i，$a_i^{(n)} \in X$； $i = 0, 1$.

我们证明条件$\|a_i - a_i^{(n)}\|_\infty \to 0$，$i = 0, 1$，蕴涵在$X$中，对于在$\rho(T)$中的任何$z$，$\|(T - T_n)R(z)\|_\infty \to 0$. 首先可以证明 (Kato, 1976, PP.192—194) $T - T_n$是T一有界的：

$$\|(T - T_n)u\|_\infty \leqslant \alpha_n \|u\|_\infty + \beta_n \|Tu\|_\infty,\quad u \in D.$$

现在从$\|a_i - a_i^{(n)}\|_\infty \to 0$得出

$$\alpha_n \to 0,\quad \beta_n \to 0,\quad (n \to \infty).$$

对于$z \in \rho(T)$及$v \in X$

$$\|(T - T_n)R(z)v\|_\infty \leqslant \alpha_n \|R(z)v\|_\infty + \beta_n \|(1 + zR(z)v\|_\infty$$
$$\leqslant [(\alpha_n + |z|\beta_n)\|R(z)\|_\infty + \beta_n]\|v\|_\infty.$$

所以$\|(T - T_n)R(z)\|_\infty \to 0$. 收敛性$T_n - T$是一致径向收敛的特殊情形，它满足对$z \in \rho(T)$，$\|R_n(z) - R(z)\|_\infty \to 0$.

第五章　闭线性算子的谱逼近

引　　言

设X是复数域$\mathbb{C}$上的Banach空间，T是X上的闭线性算子，其定义域为$D=\mathrm{Dom}T$。设λ是T的孤立本征值，并有有限代数重数$m<\infty$。于是存在一条闭Jordan曲线Γ包围λ并使之孤立开来，即由Γ包围的域Δ除λ外不包含谱$\sigma(T)$的其它点。记$P:=(-1/2i\pi)\int_\Gamma R(z)dz$是与$\lambda$相应的谱投影；$M:=PX$是不变子空间；$m:=\dim PX$。

设T_n，$n=1,2,\cdots$，是闭算子序列，其定义域为$\mathrm{Dom}(T_n)=D$。如果Γ位于$\rho(T_n)$内，对T_n可以定义预解式$R_n(z):=(T_n-z)^{-1}$，$(z\in\Gamma)$，及谱投影$P_n:=(-1/2i\pi)\int_\Gamma R_n(z)dz$。$\Delta$内$T_n$的谱为$\sigma(T_n)\cap\Delta$。$M_n:=P_nX$是$T_n$相应于$\sigma(T_n)\cap\Delta$的不变子空间。

定义　序列$\{T_n\}_N$称为T的逼近，当且仅当对所有的$x\in D$，$T_nx\to Tx$，即当$n\to\infty$时，$T_n\xrightarrow{p}T$。　　　　(5.1)

关于T_n的本征元趋于T的本征元的收敛性分析，我们利用下述收敛性来研究：$\sigma(T_n)\cap\Delta$收敛于本征值$\{\lambda\}$，M_n收敛于不变子空间M。

关键性的概念是对$z\in\Delta-\{\lambda\}$稳定收敛（即蕴涵$T_n-z\xrightarrow{s}T-z$，对$\Delta-\{\lambda\}$的任何紧集中的z是一致的），以及本征值代数重数的保持。这就引出了在$Q\sigma(T)$中的λ某邻域内强

稳定收敛的概念，在空间$\mathscr{L}$（$\hat{D}$，X）中，可以用正则收敛 $T_n - z \xrightarrow{r} T - z$，$z \in \Delta$，来表征。

1. 谱$\sigma(T_n) \cap \Delta$的收敛

1.1 定义

我们回忆一下在Kuratowski（1961）或Hahn（1948）意义下，复数域$\mathbb{C}$上点集的序列的下极限、上极限和极限。设E，$E_n \subset \mathbb{C}$，$n \in \mathbb{N}$。

（a）$E := \overline{\lim} E_n$，当且仅当对任何的$x \in E$，存在无限子集$N_1 \subset \mathbb{C}$，使得对任意$n \in N_1$及$x_n \in E_n$，有$x_n \to x$。

（b）$E := \underline{\lim} E_n$，当且仅当对任何$x \in E$，存在$x_n \in E_n$使得$x_n \to x$，$n \in \mathbb{N}$。

（c）$E := \lim E_n$，当且仅当$\overline{\lim}\, E_n = \underline{\lim}\, E_n = \lim E_n$。

设λ是T的本征值，被Γ孤立。Δ是Γ包围的域，以及$\sigma(T) \cap \Delta = \{\lambda\}$，参见图5.1。

定义 Δ中T_n的谱收敛于λ，当且仅当

$$\lim_n [\sigma(T_n) \cap \Delta] = \{\lambda\} \tag{5.2}$$

此定义可直接推广到Δ包含有限个孤立本征值的一般情形。条件（5.2）表示当T受到摄动$T - T_n$：$T_n = T - (T - T_n)$

图 5.1

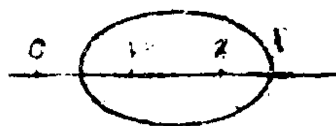


图 5.2

时，$\sigma(T)$ 在 λ 的 Δ 邻域中的连续性。这里的连续性是指并集的下半连续性：

$$\{\lambda\}\subset\underline{\lim}[\sigma(T_n)\cap\Delta]$$

以及上半连续性：

$$\{\lambda\}\supset\overline{\lim}[\sigma(T_n)\cap\Delta].$$

下半连续性的意义是指对任何 λ 的邻域,及充分大的 n,存在一点属于 $\sigma(T_n)$,特别地,$\sigma(T_n)\cap\Delta$ 非空.上半连续性是指 $\sigma(T_n)\cap\Delta$ 中的点列的任何子列，如果有极限则只能是 λ.

正如下面将看到的例子，关于 $T-T_n$ 的条件（5.1）一般说来不足推出连续性（5.2）.

$\sigma(T)$ 间断的例子

例5.1（上半间断性） T_n 的本征值序列收敛于 $\rho(T)$ 中的点。设 $X=l^2$ 其典范基为 $\{e_i\}_{\mathbb{N}}$. T: $x=\Sigma_i x_i e_i\mapsto Tx=x_1e_1$ 是 $\{e_1\}$ 上的投影. $\sigma(T)=\{0,1\}$，其中 1 是单本征值，由任何不包含 0 的曲线所孤立，参见图5.2。我们定义：

$$T_n:\qquad x=\sum_{i=1}^{\infty}x_i e_i\mapsto x_1e_1+2x_ne_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

$\sigma(T_n)=\{0,1,2\}$。当 $x\in X$ 时，$T_nx\to Tx$，并且 2 是 $\rho(T)$ 中的点.

例5.2（下半间断性）存在着 T 的本征值使得 T_n 的本征值的任何子列都不以它为极限。设 $X=C(0,1)$，$D=\{x\in X;\ x'\in X$ 且 $x(1)=x(0)\}$，T：$x\in D\mapsto x'+x$。那么 $\sigma(T)=\{1+2ik\pi,\ k\in\mathbb{Z}, i^2=-1\}$ 由单本征值组成。T 被如下差分格式所逼近：将$[0,1]$划分为 n 个相等的子区间，分点为 $t_i=i/n$，$x(t_i):=x_i$，$i=0,1,\cdots n$。一阶导数用 t_0，t_2，$\cdots t_{n-1}$ 处的右均差及 t_1 处的左均差来逼近。则离散本征值问题为：

$$x_0=x_n$$

$$n(x_1 - x_0) + x_0 = \lambda x_0$$

$$-n(x_0 - x_1) + x_1 = \lambda x_1 = n(x_1 - x_0) + x_1,$$

$$n(x_{i+1} - x_i) + x_i = \lambda x_i, \quad i = 2, 3, \cdots, n-1.$$

这是一个 $n \times n$ 矩阵的本征值问题：$A_n \xi = \lambda \xi$，其中：

$$\xi = (x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n-1})^T$$

及

$$A_n = \begin{pmatrix} 1-n & n & 0 & & & \\ -n & n+1 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1-n & & n & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \ddots \\ 0 & \vdots & 0 & & 1-n & n \\ n & & & & & 1-n \end{pmatrix}$$

如果利用分段线性插值，我们可得到相应于 A_n 的线性算子 T_n，其定义域为 $\mathrm{Dom}(T_n) = D$，并且对 $x \in D$，$T_n x \to Tx$。T_n 和 A_n 的非零本征值为 $\{1, 1-n\}$，其中 1 是 2 重的，$1-n$ 是 $n-2$ 重的。除 1 以外，T 的本征值不能用 T_n 的本征值来逼近。

现在我们给出（5.2）收敛的充分条件。

1.2. $\sigma(T_n) \cap \Delta$ 收敛的充分条件

设 $z \in \rho(T)$ 固定。我们设 $T_n - z \xrightarrow{S} T - z$。这意味着满足（5.1），以及

$$\exists\ N(z):\ n > N(z), \quad z \in \rho(T_n),$$

$$\|R_n(z)\| \leqslant M(z) \qquad (5.3)$$

则称在点 $z \in \rho(T)$ 处逼近 $\{T_n\}_N$ 是稳定的。由引理 3.16 可得逐点收敛性 $R_n(z) \xrightarrow{P} R(z)$。

命题5.1 在条件（5.3）下，函数 $z \mapsto R_n(z)$ 当 n 充分大时，对 $z \in \rho(T)$ 是连续的，并且对 n 是一致的。

证明　设$z_0 \in \rho(T)$，

$$T_n - z = T_n - z_0 + z_0 - z = (T_n - z_0)[1-(z-z_0)R_n(z_0)].$$

可以形式地表为：　　　$R_n(z) = (\Sigma_{k=0}^{\infty}[(z-z_0)R_n(z_0)]^k)$ $R_n(z_0)$。当$|z-z_0| < \|R_n(z_0)\|^{-1}$时，这个级数绝对收敛。由（5.3），当$n > N(z_0)$ 时，$\|R_n(z_0)\| < M(z_0)$．则对任何ε，$0 < \varepsilon < 1$，存在$N(z_0)$ 使得当$n > N(z_0)$ 时，由$|z-z_0| < \varepsilon / M(z_0)$得到

$$\|R_n(z) - R_n(z_0)\| \leqslant \|R_n(z_0)\| \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \leqslant M(z_0) \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad \square$$

推论 5.2　设K是$\rho(T)$ 的紧子集．若对所有的$z \in K$满足（5.3），则

$$\sup_{z \in K,\, n > N(K)} \|R_n(z)\| \leqslant M(K).$$

证明　对任何$\varepsilon > 0$，紧集K有一个由直径小于ε的集合组成的有限覆盖．因此对K中的每点z，存在z_ε使得$|z - z_\varepsilon| < \varepsilon$．并且存在有限数（如$z_\varepsilon$）使：

$$\|R_n(z)\| \leqslant \|R_n(z) - R_n(z_\varepsilon)\| + \|R_n(z_\varepsilon)\|.$$

应用命题 5.1 的证明即得结论。□

注意若Γ是包围λ的Jordan曲线，且在Γ上满足（5.3），则当$n > N(\Gamma)$时，Γ位于$\rho(T_n)$ 内。对所有的$n > N(\Gamma)$ 相应于$\sigma(T_n) \cap \Delta$的谱投影P_n是明确定义的．

1.2.1 谱投影 P_n 的逐点收敛性

设包围λ的闭Jordan曲线Γ，是$\rho(T)$ 的紧子集，且假设对Γ中的所有z，$T_n - z \xrightarrow{s} T - z$．

命题 5.3 若对所有Γ上的z，$T_n - z \xrightarrow{s} T - z$，则$P_n \xrightarrow{p} P$．

证明　显然由推论5.2,在Γ上积分 $R_n(z) - R(z) = R_n(z)(T - T_n)R(z)$．$(T-T_n)R(z) \in \mathscr{L}(X)$ 且对固定的x，函数

$z \mapsto (T-T_n)R(z)x$ 对 $z \in \rho(T)$ 是连续的. 从而对所有的 $x \in X$ 及 $n > N(\Gamma)$,

$$\|(P-P_n)x\| \leqslant \frac{\text{meas}\,\Gamma}{2\pi} M(\Gamma) \max_{z\in\Gamma} \|(T - T_n)R(z)x\|. \quad \square$$

推论5.4 若对所有的Γ上的z, $T_n - z \xrightarrow{s} T - z$, 则当$n$充分大时, $\dim P_n X \geqslant \dim PX$.

证明 由于$\dim PX = m < \infty$, 显然由命题3.10可得. $\square$

这个推论意味着若对$\forall z \in \Gamma$, $\{T_n\}$是稳定的, 则对$n > N(\Gamma)$, $\sigma(T_n) \cap \Delta$非空.

1.2.2 $\sigma(T_n) \cap \Delta$的收敛性

设$\{T_n\}_N$在$\Delta - \{\lambda\}$中是稳定的, 在这个较强的假设下, 我们来证明$\sigma(T_n) \cap \Delta$的收敛性.

定理5.5 若对$\Delta - \{\lambda\}$中一切z, $T_n - z \xrightarrow{s} T - z$, 则
$$\lim_n [\sigma(T_n) \cap \Delta] = \{\lambda\}.$$

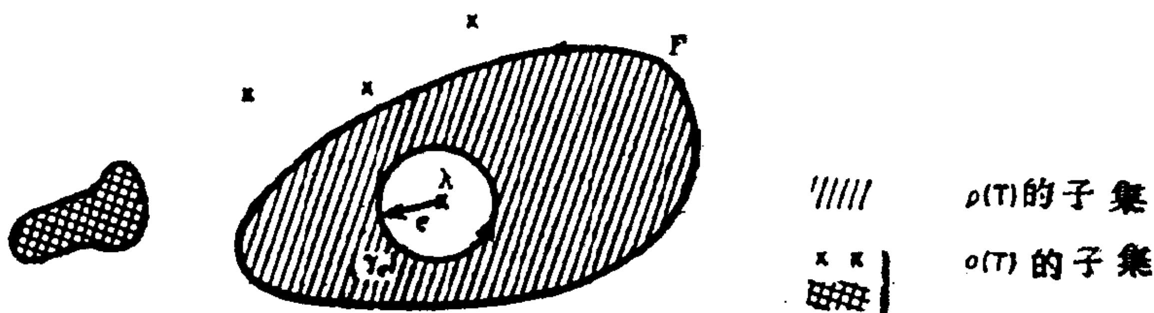


图 5.3

证明 设$\varepsilon > 0$给定. $\Delta_\varepsilon := \Delta - \{z;\ |z-\lambda| < \varepsilon\}$及圆周$\gamma_\varepsilon := \{z;\ |z-\lambda| = \varepsilon\}$, (它将$\lambda$孤立开来, 参见图5.3), 都是$\rho(T)$的紧子集. 由假设, 对任何$\varepsilon > 0$, 存在$N(\varepsilon)$使得

$$\sup_{z\in\Delta_\varepsilon,\ n>N(\varepsilon)} \|R_n(z)\| \leqslant M(\varepsilon)$$

定义

$$P_\varepsilon := \frac{-1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_\varepsilon} R(z)dz$$

并由此定义 $P_{n\varepsilon}$. 注意到 $P_\varepsilon = P$, 由推论5 4, 对所有的 $n > N(\varepsilon)$, $\dim P_{n\varepsilon}X \geqslant \dim P_\varepsilon X = m$. 这就证明了 $\sigma(T)$ 的下半连续性。又 T_n 在 Δ_ε 中的稳定性表明当 $n > N(\varepsilon)$ 时, $\Delta_\varepsilon \subset \rho(T_n)$. 于是得到 $\sigma(T)$ 的上半连续性。 □

注记 为了简便起见,假设 λ 重数有限,是因为我们的主要兴趣在于 $Q\sigma(T)$ 中点的数值逼近。但是应该注意到对 $V-D$ 中的 z, V 是 D 的邻域又是 $\sigma(T)$ 任意一个非空紧子集, $T_n - z \xrightarrow{s} T - z$ 蕴涵着 $\lim_n \mathrm{dist}(\sigma(T_n), D) = 0$ [参见Mills (1979a)中关于 D 预解式稳定性条件].

逼近 $\{T_n\}$ 的稳定性对于 $\sigma(T_n) \cap \Delta$ 的收敛仅是充分条件,这可由如下的例子说明,其中逼近 $\{T_n\}$ 在 $\rho(T)$ 中的点 -1 处不稳定,但 T_n 的谱仍然收敛.

例5.3 设 $X = l^2$, 及典范基 $\{e_i\}_{\mathbb{N}}$. T 为到 e_1 上的正交投影: $x = \Sigma_{i=1}^{\infty} x_i e_i \mapsto Tx = x_1 e_1$.

用 $T_n: x \mapsto T_n x = x_1 e_1 + \Sigma_{i=n}^{2n-1} x_{i+1} e_i$ 来逼近 T. $\sigma(T_n) = \sigma(T) = \{0,1\}$, 且 1 为 T 及 T_n 的单本征值,

$$\|(T - T_n)x\| \leqslant \|\sum_{i \geqslant n} x_{i+1} e_i\| \to 0, \text{ 当 } n \to \infty.$$

在基 $\{e_i\}_1^{2n}$ 下, 相应于 T_n 的矩阵 A_n 定义为: $a_{ij} = 0$, $i, j = 1, \cdots\cdots, 2n$, 除去 $a_{11} = 1$, $a_{i-1,i} = 1$, $i = n+2, \cdots, 2n$. 容易验证 $\|(T_n + 1)^{-1}\| \geqslant (n/2)^{1/2}$. 所以 $\{T_n\}$ 在 $\rho(T)$ 中的点 -1 处不是稳定的.

例5.4 设 T 为例 5.3中的投影,现在由 $T_n: x = \Sigma_{i=1}^{\infty} x_i e_i \mapsto x_1 e_1 + x_n e_n$ 来逼近。1 是 T_n 的二重本征值,其本征向量为 e_1 和 e_n. 对所有的 n, $2 = \dim P_n X > \dim PX = 1$. 当 $n \to \infty$

时，第二个本征向量 e_n 弱收敛于0。T_n 和 T 的谱是相同的，但1的重数不同，这导致本征向量不收敛。

例5.4表明仅考虑复本征值的收敛是不够的．为了得到本征向量的收敛，要求保持代数重数的本征值收敛．

2. 保持重数的本征值的收敛

对代数重数 $m<\infty$ 的本征值 λ，用以下条件来定义在 Δ 中的强稳定收敛 $T_n-z\overset{ss}{\to}T-z$：

(i) $T_n-z\overset{s}{\to}T-z$，$z\in\Delta-\{\lambda\}$

(ii) $\dim P_nX=m$，对充分大的 n。

这里 P_n 是 T_n 相应于 $\sigma(T_n)\cap\Delta$ 的谱投影．类似地，如果（i）和（ii）成立，但（i）只对 Γ 上的 z 成立，则在 Γ 上 $T_n-z\overset{ss}{\to}T-z$. 如果在 Δ 内（或在 Γ 上）$T_n-z\overset{ss}{\to}T-z$ 则称 $\{T_n\}_N$ 在 Δ 上（或 Γ 上）是 T 的强稳定逼近．正如我们所看到的，强稳定性蕴涵着保持重数的本征值收敛．

命题5.6 若 $T_n-z\overset{ss}{\to}T-z$ 对 Δ 内的 z 成立，则对充分大的 n，$\sigma(T_n)\cap\Delta$ 恰由 m 个本征值组成（包括它们的重数）。

证明　在 $\Delta-\{\lambda\}$ 中，T_n 的稳定性蕴涵着，对 $n>N(\Gamma)$，$\sigma(T_n)\cap\Delta$ 被 Γ 孤立．因此，根据第二章第7.6节的定义 $\sigma(T_n)$ 是分离的，并由定理2.27，$\sigma(T_n)\cap\Delta$ 是 $P_nT_nP_{n\restriction M_n}$ 的谱，对充分大的 n，T_n 在 $M_n=P_nX$ 内的部分，秩为 $m=\dim P_nX$。它的谱由 m 个本征值组成（包括它们的重数）．□

在 Δ 内，$\{T_n\}_N$ 的强稳定性是保持代数重数的本征值收敛的充分条件（参见例5.3）．

3. 本征向量和不变子空间的收敛

设 $\lambda\in Q\sigma(T)$ 的代数重数为 m．在本节中，假设在 Γ 上

$T_n - z \xrightarrow{ss} T - z$，有一条 Jordan 曲线孤立 λ：对充分大的 n，在 Γ 内存在重数恰为 m 的本征值．K_n 是 Γ 内部 T_n 的不同本征值 λ_{in} 的数目．

3.1 X 的子空间序列的收敛性

设 G_n，$n=1,2,\cdots$，为 X 的子空间序列，它在某种意义下收敛于子空间 G．假设 $\dim G<\infty$．

定义 G_n（或 G）的单位球：

$B_{G_n}:=\{x\in G_n;\ \|x\|\leqslant 1\}$（或 $B_G:=\{x\in G;\ \|x\|\leqslant 1\}$）．

我们关心如下两个条件：

（1）$\forall x\in B_G$，$\exists\, x_n\in B_{G_n}$，使得 $x_n\to x$．　　(5.4)

（2）对任何序列 $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$，$x_n\in B_{G_n}$，有收敛子序列，即 $\exists x\in B_G$ 使得当 $n\in N_1\subset\mathbb{N}$ 时，$x_n\to x$．　　(5.5)

引理5.7　在 $\dim G<\infty$ 的假设下，条件（5.4）蕴涵 $\dim G_n\geqslant\dim G$，而条件（5.5）蕴涵 $\dim G_n\leqslant\dim G$．

证明　因为 G 是有限维的，它有补子空间 G' 使得：$X=G\oplus G'$．令 $G^*:=G'^{\perp}\subset X^*$，及 $a:=\dim G$．设 $\{x_i\}_1^a$ 是 G 的规范化基，且设 $\{x_i^*\}_1^a$ 是 G^* 的伴随基，$\langle x_i^*, x_j\rangle=\delta_{ij}$，$i,j=1,\cdots,a$．由（5.4），存在 $x_{in}\in B_{G_n}$ 使得 $x_{in}\to x_i$，$i=1,\cdots,a$．因此 $\langle x_j^*, x_{in}\rangle\to\delta_{ij}$．当 n 充分大时，这 a 个向量 $\{x_{in}\}_1^a$ 在 G_n 中是无关的．将引理3.12应用于 G 和 G_n，第二个蕴涵关系是显然的．□

3.2 不变子空间的间隙收敛

我们考虑不变子空间 $M:=PX$（或 $M_n:=P_nX=\oplus_{i=1}^{K_n}M_{in}$）它相应于 T 的本征值 λ（或 Γ 内 T_n 的所有不同本征值）．ψ（或 ψ_n）表示 M（或 M_n）中的任意向量．ψ_n 一般是不变向量（相应于 Γ 内 T_n 的不同本征值）的线性组合．

定理5.8　若 $\{T_n\}$ 是 T 的逼近，且在 Γ 上强稳定，则 P_n

$\xrightarrow{cc} P$ 且 $\Theta(M_n, M) \to 0$。

证明：这是命题5.3、3.13和3.14的简单推论。 □

我们应注意M和M_n之间的间隙当$n\to\infty$时趋于0。同时，目前我们对本征值的了解只限于T_n那些在Γ内重数为m的本征值。

习题

5.1 若在Γ上$T_n - z \xrightarrow{ss} T - z$，证明$M$和$M_n$的不变子空间满足条件（5.4）和（5.5）。

5.2 由$\|(P-P_n)P_n\|\to 0$推导出M和M_n满足（5.5）。

5.3 在习题5.1的假设下，证明对$\psi\in M$及$\psi_n\in M_n$，且$\|\psi\|=1$，则当$n\to\infty$时，$\mathrm{dist}(\psi, M_n)$和$\mathrm{dist}(\psi_n, M)$趋于0，其中$\mathrm{dist}(x, M)$由$\inf_{y\in M}\|x-y\|$来定义。

可以得到习题5.1的逆。

定理5.9 设$\{T_n\}$是T的逼近，且在Γ上稳定。假设M和M_n的不变子空间满足条件（5.5），则$\{T_n\}$在Γ上强稳定。

证明留给读者。

习题

5.4 假设$\overline{D}=X$。若$\{T_n\}$为Γ上的T的强稳定逼近，且使$T_n^* \xrightarrow{p} T^*$，则$\{T_n^*\}$在包围$\overline{\lambda}$的$\overline{\Gamma}$上也是强稳定的，且$\|P_n - P\|\to 0$。

3.3 本征向量的收敛

我们仍然假设在Δ内$T_n - z \xrightarrow{s.s} T - z$.并设$\{\lambda_n\}_N$是$T_n$的收敛于$\lambda$的本征值序列。与$\lambda_n$相应的本征向量为$\varphi_n$，$\|\varphi_n\|=1$，$\varphi_n\in E_n := \mathrm{Ker}(T_n-\lambda_n)$。$E := \mathrm{Ker}(T-\lambda)$内的任何向量

φ是相应于λ的本征向量．我们令$g:=\dim E$及$g_n:=\dim E_n$．注意M_n和E_n之间的区别：M_n是相应于Δ内所有不同本征值的不变子空间，而E_n是相应于某个个别本征值λ_n的本征空间．

定理5.10 设$\{T_n\}_{\mathbb{N}}$是T的逼近，且在Δ内强稳定．则对任何收敛于λ的本征值序列λ_n及对任何相应的规范化本征向量$\{\varphi_n\}_N$的序列，存在一个收敛到相应于某个λ的本征向量φ的子序列．此外，

$$\dim\mathrm{Ker}(T_n-\lambda_n)\leqslant\dim\mathrm{Ker}(T-\lambda)$$

证明 设$\varphi_n\in E_n$，$\|\varphi_n\|=1$．因为$P_n\xrightarrow{c\cdot c}P$，$E_n\subset M_n$内的有界序列$\{\varphi_n\}_{\mathbb{N}}$有收敛于$M$内的$\varphi(\|\varphi\|=1)$的子序列$\{\varphi_n\}_{N_1\subset\mathbb{N}}$．由等式

$$R(z)\varphi-\frac{1}{\lambda-z}\varphi=(R(z)-R_n(z))\varphi+R_n(z)(\varphi-\varphi_n)$$

$$\lambda+\left(\frac{1}{\lambda_n-z}-\frac{1}{\lambda-z}\right)\varphi_n+\frac{1}{\lambda-z}(\varphi_n-\varphi)$$

$z\in\Gamma$，$n\in N_1$，可得$R(z)\varphi=(\lambda-z)^{-1}\varphi$且$\varphi$是含于$E$的本征向量．由引理5.7可得$g_n\leqslant g$．□

例5.5 设$X=\mathbb{R}^2$，$\varepsilon\in\mathbb{R}$．

$$A_\varepsilon=\begin{pmatrix}1&0\\\varepsilon&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

A_ε的本征向量为：$e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，它也是$A$的本征向量；但任何$\mathbb{R}^2$中的其它向量，若是$A$的本征向量就不会是$A_\varepsilon$的任何本征向量序列的极限．

例5.6 当$m>1$时，我们仅能得到本征向量序列的一个收敛子序列．设$X=\mathbb{R}^2$，$\varepsilon\in\mathbb{R}$，

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos 2/\varepsilon & -\varepsilon\sin 2/\varepsilon \\ -\varepsilon\sin 2/\varepsilon & 1-\varepsilon\cos 2/\varepsilon \end{pmatrix} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A_ε 的本征值为 $1\pm\varepsilon$，本征向量为 $(\sin 1/\varepsilon, \cos 1/\varepsilon)^T$ 和 $(\cos 1/\varepsilon, -\sin 1/\varepsilon)^T$. 当 $\varepsilon\to 0$ 时，这两个向量的极限不存在。由 $\varepsilon_k := 1/2k\pi$ 定义的子序列当 $k\to\infty$ 时收敛于 e_1 和 e_2.

习题

5.5 假设 λ 是单的且在 Γ 上 $T_n - z \xrightarrow{ss} T - z$.

证明：(i) 对任何本征向量 φ，存在本征向量 φ_n 满足 $\varphi_n \to \varphi$；

(ii) 对任何本征向量 φ_n，存在本征方向 $\{\varphi\}$（不依赖于 n）使得当 $n\to\infty$ 时，$\mathrm{dist}(\varphi_n, \{\varphi\}) \to 0$.

在保持代数重数的假设下，对于几何重数，一般只能得到 $g_n \leqslant g$. 其结果，(5.4) 可能不被 E 中的全部本征向量所满足（参见例5.5和5.6）. 若所有 E 中的本征向量满足(5.4) 则对充分大的 n，$g_n = g$. 即保持几何重数。

事实上，一个重本征值通常被 m 个单本征值的集合所充分逼近，因此当精确本征值的本征向量多于一个时，$g_n = 1$ 小于 g .

例5.7 我们考察在例1.6中定义的 $N\times N$ 矩阵 $A(\varepsilon)$ 的序列. $A(\varepsilon)$ 有 N 个单本征值 $\lambda_k(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^{1/N} e^{2ik\pi/N}$, $k = 0, 1, \cdots, N-1$，收敛于代数重数为 N 的重本征值 $\lambda = 1$. λ 和每个 $\lambda_k(\varepsilon)$ 有相同的几何重数 1 . 因此每个相应于 $\lambda_k(\varepsilon)$ 的本征向量 $\varphi_k(\varepsilon)$ 收敛于 e_1，e_1 是相应于 λ 唯一的本征向量. 事实上，如果我们令 $a_k(\varepsilon) := 1 - \lambda_k(\varepsilon)$ 则

$$\varphi_k^T(\varepsilon) = (1, a_k(\varepsilon), a_k^2(\varepsilon), \cdots, a_k^{N-1}(\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} e_1^T.$$

总之，逼近 $\{T_n\}$ 在 Δ 内的强稳定性确保了：

（a）在Δ内保持代数重数的本征值收敛；

（b）不变子空间的间隙收敛；

（c）对任何本征值序列$\lambda_n \to \lambda$，其相应于规范化本征向量的子序列收敛，且$\dim\mathrm{Ker}(T_n - \lambda_n) \leqslant \dim\mathrm{Ker}(T - \lambda)$.

当没有引进数值不稳定性时，保持代数重数的假设不能削弱．例如，对本征向量在定理 5.9 中定义的收敛性不再有保证（参见例5.4）。

3.4　T_n属于类$\mathfrak{D}$的情形

我们考虑情形：在X中的方程

$$T\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi \neq 0 \tag{5.6}$$

由 X_n 中的离散方程

$$\mathscr{T}_n\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \quad \varphi_n \neq 0 \tag{5.7}$$

来逼近．相应于$\mathscr{T}_n$，我们在第四章，第 5 节中定义了由X_n到其自身的算子：$\mathscr{R}_n(z) := (\mathscr{T}_n - z)^{-1}$及

$$\mathscr{P}_n := \frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma \mathscr{R}_n(z)dz, \quad \Gamma \subset \rho(\mathscr{T}_n).$$

$\mu_n := \mathscr{P}_n X_n$ 为相应于Γ内$\mathscr{T}_n$的本征值集合的不变子空间．

现在我们考虑$T_n = \mathscr{T}_n\pi_n$和X中相应的方程：

$$T_n\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \quad \varphi_n \neq 0 \tag{5.8}$$

若$\lambda_n \neq 0$，(5.7) 和 (5.8) 是等价的．若 $\lambda = 0$，任何 $(1-\pi_n)X$中的向量对T_n来说都是本征向量，但对$\mathscr{T}_n$来说则不是．我们已经看到，对$z \neq 0$，

$$R_n(z) = (T_n - z)^{-1} = \mathscr{R}_n(z)\pi_n - (1/z)(1 - \pi_n).$$

因此，若Γ不包含 0，

$$P_n := \frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma R_n(z)dz = \mathscr{P}_n\pi_n,$$

$$M_n := P_nX = \mathscr{U}_n, \quad 及\dim M_n = \dim\mathscr{M}_n$$

这些考虑保证了由下述条件定义的在Δ内的离散强稳定性是合理的：

(i) $T_n - z\pi_n \xrightarrow{d-s} T - z$, $z \in \Delta - \{\lambda\}$;

(ii) $\dim \mathscr{P}_n X_n = m$, n 充分大.

我们记之为在Δ中$T_n - z\pi_n \xrightarrow{d-ss} T - z$.

引理 3.11 的如下推广成立. 设 $0 \neq \lambda \in Q\sigma(T)$. 则 λ 可被不含 0 的 Jordan 曲线所孤立.

引理5.11 若 T_n 属于类 $\mathfrak{D}$, 则对 $\lambda \neq 0$ 及Δ内的 z, 下述两条等价:

(i) $T_n - z\pi_n \xrightarrow{d-ss} T - z$;

(ii) $T_n - z \xrightarrow{ss} T - z$.

证明留给读者.

如果 λ 是$Q\sigma(T)$的非零本征值, 前面的定理可用来证明谱收敛.

习题

5.6 假设 $0 \in Q\sigma(T)$. 0 由曲线Γ孤立, Γ定义于域Δ. 并设 T_n 属于类 $\mathfrak{D}$使得 $T_n - z\pi_n \xrightarrow{d-ss} T - z$ 在Δ中成立. 证明$[\sigma(\mathscr{T}_n) \cap \Delta] \to 0$ 且保持代数重数, 并有$\Theta(\mathscr{M}_n, M) \to 0$, 其中$\mathscr{M}_n$ (或M) 是$\mathscr{T}_n$ (或T) 的相应于$\sigma(\mathscr{T}_n) \cap \Delta$ (或 0)的不变子空间.

4. 在Hilbert 空间H中, T和T_n是自伴的情形

设H是$\mathbb{C}$上的 Hilbert 空间, T和T_n是稠定自伴算子. 则前面的定理可简化, 这由第二章第 8 节所述的自伴算子的性质所致.

4.1 特有的结论

当T是自伴的，$\sigma(T)$是实轴的一部分。

定理5.12 设T和T_n是自伴的．若T_n是T的逼近，则$\sigma(T)$在其任何点的邻域内是下半连续的．

证明 设λ在$\sigma(T)$中给定．对给定的$\varepsilon>0$，我们令$z:=\lambda+i\varepsilon$。z在$\rho(T)$内。

$$\|R(z)\|=[\operatorname{dist}(z,\ \sigma(T))]^{-1}=1/\varepsilon,$$

$$\|R_n(z)\|=[\operatorname{dist}(z,\ \sigma(T_n))]^{-1}\leqslant 1/\varepsilon.$$

T_n在z是稳定的；因此

$$R_n(z)\xrightarrow{p}R(z)\quad 且\quad \|R(z)x\|=\lim_n\|R_n(z)x\|.$$

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\|R(z)x\|}{\|x\|}=1/\varepsilon$$

设x固定，且$\|x\|=1$，$\|R(z)x\|\geqslant 1/2\varepsilon$。对充分大的$n$，

$$\|R_n(z)\|\geqslant\|R_n(z)x\|\geqslant 1/3\varepsilon.$$

在$\sigma(T_n)$中存在λ_n使得$|\lambda_n-z|\leqslant 3\varepsilon$，即$|\lambda_n-\lambda|\leqslant 4\varepsilon$。□

例5.8 设$H=L^2(0,1)$，且有标准正交基$e_i(t)=\sqrt{2}\sin i\pi t$，$i\in\mathbb{N}$．$T$由$x(t)\longmapsto(\cos\pi t)x(t)$定义，$\sigma(T)=[-1,1]$．设$E_n$由$e_1,e_2,\cdots\cdots,e_n$张成．$T_n$为$T$的在$E_n$中的Galerkin逼近．相伴矩阵$\widetilde{A}_n$的元素为：

$$a_{ij}=((\cos\pi t)e_j(t),\ \ e_i(t))=0$$

除去 .

$$a_{i,i+1}=a_{i+1,i}=\frac{1}{2},\qquad i=1,\cdots,n-1,$$

$$\sigma(T_n)=\sigma(\widetilde{A}_n)\cup\{0\}=\left\{\cos\pi\frac{i}{n+1},\ i=1,\ \cdots,n\right\}\cup\{0\}$$

当$n\to\infty$时，$[-1,\ 1]$的每个点都是$\widetilde{A}_n$的本征值序列的极限．

习题

5.7 设T_n是自伴的。若$T_n \xrightarrow{p} T$，则对$\mathbb{C}$内的任何z，$T_n - z \xrightarrow{s} T - z$，使$\mathscr{I}_m z \neq 0$。

设λ含于$Q_\sigma(T)$重数为m且由Γ孤立.我们仍采用上节的记号.

定理5.13 设T，T_n是自伴的且$T_n \xrightarrow{p} T$。存在$N(\Gamma)$使当$n > N(\Gamma)$时，$\Gamma \subset \rho(T_n)$，$P_n \xrightarrow{p} P$。

证明 这个证明基于T和T_n的谱表示，这在第二章第8节中已经给出了定义。Kato（1976，P.432）证明了对任何不是T的本征值的实数μ有$E_n(\mu) \xrightarrow{p} E(\mu)$。设$\mu_1 < \mu_2$是$\Gamma$与实轴的交点；$P = E(\mu_2) - E(\mu_1)$，参见图5.4。对$n > \max(N(\mu_1), N(\mu_2))$，$P_n$有定义且$P_n \xrightarrow{p} P$。在$[\mu_1, \mu_2]$中存在$T_n$的重数至少是$m$的本征值。□

我们已看到在$\Delta - \{\lambda\}$内$\{T_n\}$的稳定性蕴涵着$\sigma(T_n) \cap \Delta$的收敛，如果假设T_n是正规的，我们可证明其逆也是正确的.

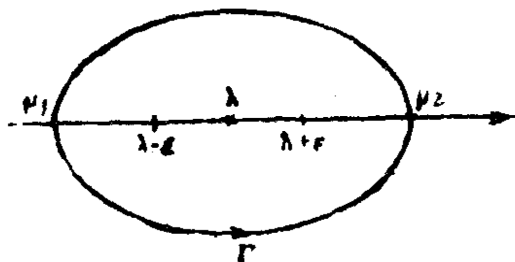


图 5.4

引理5.14 若T_n是正规的，$\lim_n[\sigma(T_n) \cap \Delta] = \{\lambda\}$蕴涵对$\Delta - \{\lambda\}$中的任何$z$，条件（5.3）成立。

证明 由$\|R_n(z)\| = 1/\text{dist}(z, \sigma(T_n))$显然可得。□

引理5.15 设T，T_n是自伴的，且$T_n \xrightarrow{p} T$。若对充分大的n有$\dim P_n X = m$，则$\sigma(T)$在λ的邻域内是上半连续的，且$\|P_n - P\| \to 0$。

证明 由假设，对$n > N$，在$[\mu_1, \mu_2]$内存在T_n的m重本

征值．现对任意$\varepsilon>0$，存在$N(\varepsilon)$使得当$n>N(\varepsilon)$时，在$(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)$内有至少$m$重的本征值，参见图 5.4．因此当$n>\max(N, N(\varepsilon))$时，在$(\mu_1, \lambda-\varepsilon]$或$[\lambda+\varepsilon, \mu_2)$内不存在$\sigma(T_n)$的点．这就证明了在$[\mu_1, \mu_2]$内的上半连续性．由于$P$和$P_n$是自伴的，$P_n \xrightarrow{cc} P$蕴涵$\|P-P_n\| \to 0$．□

命题5.16 设T和T_n是自伴的．下述两条等价：

(i) $T_n - z \xrightarrow{ss} T - z$，$z \in \Delta$，

(ii) $T_n \xrightarrow{p} T$且$\dim P_n X = m$，n充分大．

证明 直接的蕴涵关系是显然的．我们证明其逆．由定理5.12和引理5.15直接可得$\sigma(T)$在$\Delta-\{\lambda\}$内的连续性．由引理5.14这又等价于稳定性．□

因此在自伴算子情形下，只需证明保持重数．

习题

5.8 设λ_n的重数为g_n，收敛于λ（其重数为g），T和T_n是自伴的．证明若$T_n - z \xrightarrow{ss} T - z$在$\Delta$中成立且$g_n=g$，则$\lambda_n$逼近$\lambda$的本征值.这在实际上难得满足,除非$g=1$（参见5.6)）

4.2 强稳定的充分条件

自伴算子T称为是下有界的，如果它的值域$\{(Tx, x);\ x \in D\}$是实轴上的下有界子集：

$$(Tx, x) \geqslant \gamma \|x\|^2, \quad \forall x \in D, \quad \gamma \text{为某实数}.$$

于是谱是下有界的，即$\sigma(T) \subset [\gamma, +\infty)$，参见Kato（1976, P278）．我们假设$T$（或$T_n$）是下有界的自伴算子，其谱的下部记为：$\sigma_{inf}(T)$（或$\sigma_{inf}(T_n)$），它包含有限个重数有限的孤立本征值．设其按重数的递增排成μ_i（或μ_{in}），$i=1, \cdots, k$．

命题5.17 设T和T_n是自伴的．若逼近$\{T_n\}$的本征值满足$\mu_{in} \geqslant \mu_i$，$i=1, \cdots, k$，则$\{T_n\}$在$\sigma_{inf}(T)$的某邻域内是

强稳定的。

证明　只需证明保持重数。我们假设μ_1是单本征值。因为$\mu_{2n}<\mu_2$是不可能的，所以$[\mu_1, \mu_2)$内仅有一个本征值μ_{1n}。□

习题

5.9 证明当T和T_n是上有界的，且谱上部仅含重数有限的孤立本征值时有类似性质。

例5.9 设$a(u,v)$是Hilbert空间V上的强制Hermit半双线性形式。设$\{V_n\}$是V的有限维子空间序列。且设谱的下部σ_{inf}由重数有限的孤立本征值组成。我们用相应于$\{V_n\}$的Rayleigh—Ritz 方法来逼近这些本征值。则$\mu_{in}\geqslant\mu_i$（见第四章）。Rayleigh—Ritz方法在σ_{inf}邻域内强稳定。

例5.10 设T是有界自伴算子。可以认为T是上有界又是下有界的。我们假设下部σ_{inf}（或上部σ_{sup}）由有限重数的本征值组成。设$\{E_n\}$是H的有限维子空间序列。又设π_n是E_n上的正交投影。用$\pi_n T\pi_n$来逼近本征值。利用本征值的最小—最大性质，可得$v_{in}\leqslant v_i$（或$\mu_{in}\geqslant\mu_i$），因为在σ_{sup}中最大本征值v_i按降值排列（或在σ_{inf}中最小本征值μ_i按增值排列）。这表明由σ_{inf}和σ_{sup}的邻域内的正交投影定义的Galerkin方法是强稳定的。

习题

5.10 若T是紧自伴的且π_n是正交投影，证明在$\mathbb{C}-\{0\}$内 Galerkin 方法的强稳定性。

5. 闭算子的逼近的强稳定性

直至目前，利用在λ的某邻域内T_n的强稳定性，我们已给出了保持重数的本征值收敛的充分条件。主要的不足是其含有关于未知本征值的信息。在本节中我们对此将有所改进。

首先，我们利用 λ 某邻域内的正规收敛来描述在 $\mathscr{L}(\widehat{D}, X)$ 内的强稳定收敛特征。然后证明在第三章中定义的各种收敛性，给出了保证 $\{T_n\}$ 强稳性的充分条件（尽管用 T 和 T_n 来表示），该强稳性是在 T 的任何重数有限的孤立本征值的某邻域内考虑。

为了上述目的，我们引进在 $\rho(T)\cup Q\sigma(T)$ 内强稳定收敛的概念。设 $\{T_n\}_{\mathbb{N}}$ 为 $\mathscr{C}(X)$ 中收敛于 $T\in\mathscr{C}(X)$ 的算子序列。

定义 $T_n - z \xrightarrow{ss} T - z$ 在 $\rho(T)\cup Q\sigma(T)$ 内成立，当且仅当：

（i） $T_n - z \xrightarrow{s} T - z$，对所有的 $z\in\rho(T)$；

（ii）对 T 的任意有有限重数 m 的本征值（由曲线 Γ 孤立），当 $n > N(\Gamma)$ 时，$\dim P_n X = m$。

若在 $\rho(T)\cup Q\sigma(T)$ 内 $T_n - z \xrightarrow{ss} T - z$，则 $\{T_n\}$ 称为在 $\rho(T)\cup Q\sigma(T)$ 内 T 的强稳定逼近。

5.1 正规收敛

我们在第三章命题3.17中已经证明了，对所有 $\rho(T)$ 中的 z，$T_n - z \xrightarrow{s} T - z \Longleftrightarrow T_n - z \xrightarrow{r} T - z$。在给出两个预备引理之后，我们将证明在 $\mathscr{L}(\widehat{D}, X)$ 内的更显著特性. 我们知道，当赋予域 D 图象范数时，得到Banach 空间 $\widehat{D}$（参见第二章第6.2节）。

引理5.18 在 $\mathscr{C}(X)$ 中，若 T_n 和 T 满足 $\dim(\operatorname{Ker} T)<\infty$，且 $T_n \xrightarrow{r} T$，则 $\dim(\operatorname{Ker} T_n)\leqslant\dim(\operatorname{Ker} T)$。

证明 令 $K := \operatorname{Ker} T$，$K_n := \operatorname{Ker} T_n$。设 $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$ 是 K_n 中的有界序列。由正则性 $T_n x_n = 0$ 蕴涵了当 $n\in N_1\subset\mathbb{N}$ 时，$x_n\to x$ 而 $Tx = 0$。因此 $x\in K$，将引理5.7用于 K 和 K_n，则对充分大的 n，$\dim K_n\leqslant\dim K$。 □

引理5.19 在$\mathscr{C}(X)$中若T_n和T使得在Γ上$T_n - z \xrightarrow{s} T - z$，则$(T_n - \lambda)(1 - P_n)$在$(1 - P_n)X$内可逆，且逆是一致有界的。

证明 由假设，$P_n \xrightarrow{p} P$。对$z \in \Delta$，令

$$S_n(z) := R_n(z)(1 - P_n).$$

相应于Γ内的本征值，$S_n(z)$是T_n的约化预解式，对Γ内的z它是解析的。利用$T_n P_n x = P_n T_n x$，$x \in D$，我们得到：

$$S_n(\lambda)(T_n - \lambda)(1 - P_n) = 1 - P_n = (T_n - \lambda)(1 - P_n)S_n(\lambda).$$

文就证明了在$(1 - P_n)X$内$(T_n - \lambda)(1 - P_n)$是可逆的，其逆为$S_n(\lambda)$。由于$S_n(z)$的模在Γ内的z处解析，由最大模原理得到：

$$\|S_n(\lambda)\| < \max_{z \in \Gamma} \|R_n(z)(1 - P_n)\| \leqslant (\max_{z \in} \|R_n(z)\|)\|1 - P_n\|. \square$$

习题

5.11 设T，$T_n \in \mathscr{C}(X)$。证明在Γ上，$T_n - z \xrightarrow{s} T - z$蕴涵$S_n(\lambda) \xrightarrow{p} S(\lambda) = S$，即相应于$\lambda$的$T$的约化预解式。

定理5.20 (Vainikko) 在$\mathscr{L}(\widehat{D}, X)$内对$\rho(T) \cup Q\sigma(T)$中所有$z$，如下两条等价：

(i) $T_n - z \xrightarrow{r} T - z$，

(ii) $T_n - z \xrightarrow{ss} T - z$。

证明 设$\lambda \in Q\sigma(T)$，重数为m且为Γ所孤立。我们必须证明在$\mathscr{L}(\widehat{D}, X)$中有等价性：

在Δ内，$T_n - z \xrightarrow{r} T - z \Longleftrightarrow T_n - z \xrightarrow{ss} z$。

在证明了命题3.17之后只需证明：

$$T_n - \lambda \xrightarrow{r} T - \lambda \Longleftrightarrow \dim P_n X = m.$$

（1）首先，假设T和$T_n \in \mathscr{L}(X)$．若（i）成立，对充分大的n，$\dim P_n X \geqslant m$．不妨设$\dim P_n X \geqslant m+1$，$n \in N_1 \subset \mathbb{N}$．至少存在$T_n$的$m+1$个（计算重数）本征值收敛于$\lambda$：$\mu_{in} \to \lambda$，$i=1,\cdots,m+1$．显然$T_n - \mu_{in} \xrightarrow{r} T-\lambda$且$\prod_{i=1}^{m+1}(T_n - \mu_{in}) \xrightarrow{r} (T-\lambda)^{m+1}$（参见习题3.9和第三章3.10）．则$\dim(\mathrm{Ker}\prod_{i=1}^{m+1}(T_n - \mu_{in})) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(\prod_{i=1}^{m+1}(T-\lambda))$，我们得到矛盾$m+1 \leqslant m$．反之，若（ii）成立，假设有界序列$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$使得当$n \in N_1 \subset \mathbb{N}_1$时，$(T_n - \lambda)x_n \to y$．记$x_n = P_n x_n + (1-P_n)x_n$．当$n \in N_2 \subset N_1$时，$P_n \xrightarrow{cc} P$且$P_n x_n \to u = Pu$．对任意$x \in X$，$(T_n P_n - TP)x = P_n(T_n - T)x + (P_n - P)Tx \to 0$，$T_n P_n \xrightarrow{p} TP$且$T_n P_n$是一致有界的．于是：

$$(T_n - \lambda)P_n x_n - (T-\lambda)u = (T_n - \lambda)P_n(P_n x_n - u)$$
$$+ (T_n P_n - TP)u - \lambda(P_n - P)u \to 0$$

且$(T_n - \lambda)P_n x \to Py = (T-\lambda)u$．若令$z_n := (T_n - \lambda)(1-P_n)x_n$，$z_n \to y - (T-\lambda)u$，由引理5.19和习题5.11，$(1-P_n)x_n = S_n(\lambda)z_n$收敛于$v = S(\lambda)y$．则对$n \in N_2$，$x_n \to u+v$且使

$$(T-\lambda)(u+v) = Py + (1-P)y = y.$$

（2）当T和T_n在$\mathscr{C}(X)$内时，我们在$\mathscr{L}(\hat{D}, X)$内考虑问题，由（1）知结论成立．

（3）在$\mathscr{C}(X)$内我们仅需要利用习题3.11来证（ii）⇒（i）．□

命题5.21 若单射$i: \hat{D} \to X$是紧的，则在$\mathscr{L}(\hat{D}, X)$内，$T_n \xrightarrow{r} T$蕴涵着在$\rho(T) \cup Q\sigma(T)$内$T_n - z \xrightarrow{ss} T - z$．

证明 显然由命题3.19证明了当$z \in \mathbb{C}$时，$T_n - z \xrightarrow{r} T - z$．

注意到$P(T)\cup Q\sigma(T)=\mathbb{C}$即得。 □

5.2 径向收敛

现在我们来研究由一致径向收敛所给出的强稳定收敛的特殊情形。

设$0\in\rho(T)$。首先定义径向收敛：$T_n\xrightarrow{\sigma}T$，当且仅当：

(i) $T_n\xrightarrow{s}T$；

(ii) 下述条件满足：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$，$r_\sigma[(T-T_n)T^{-1}]<\varepsilon$

注意到$(T-T_n)T^{-1}=1-T_nT^{-1}$在定域X上有界。因此它的谱半径是明确定义的。

现在我们用两个条件对$z\in\rho(\tau)$来定义一致径向收敛$T_n-z\xrightarrow{u\sigma}T-z$：

(i) 对任何$z\in\rho(T)$，$T_n-z\xrightarrow{\sigma}T-z$；

(ii) $\forall\varepsilon>0$，$\forall\rho(T)$的紧集K，$\exists N(K)$，对$n>N(K)$，

$$\sup_{z\in K}r_\sigma[(T-T_n)R(z)]<\varepsilon\text{。}$$

习题

5.12 证明：$\|T-T_n\|\to 0$或$T_n\xrightarrow{cc}T$蕴涵着在$\rho(T)$中$T_n-z\xrightarrow{u\sigma}T-z$。（提示：参见例3.8和3.9）。

定理5.22 对$\rho(T)$中的z，一致径向收敛$T_n-z\xrightarrow{u\sigma}T-z$蕴涵着在$\rho(T)\cup Q\sigma(T)$内强稳定收敛$T_n-z\xrightarrow{ss}T-z$。

证明　设$\lambda\in Q\sigma(T)$的重数为m，被Γ所孤立。由假设，存在$N(\Gamma)$使得

$$\sup_{n<N(\Gamma),\,z\in\Gamma}r_\sigma[(T-T_n)R(z)]<1$$

由命题2.20，对$z\in\rho(T)$，有界算子$(T-T_n)R(z)$的谱半径

是上半连续的。于是当$n>N(\Gamma)$时，

$$\max_{z\in\Gamma} r_\sigma[(T-T_n)R(z)]<1.$$

只需证明保持代数重数：$\dim P_n X=m$。为此，我们考虑，对$n>N(\Gamma)$，算子族$T(t):=T-t(T-T_n)$依赖于复参数t。$T(0)=T$，$T(1)=T_n$。谱投影

$$P(t)=\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma (T(t)-z)^{-1}dz$$

在圆盘$\{t\in\mathbb{C};\ |t|<1/r\}$内的$t$处解析，且

$$r=\sup_{n>N(\Gamma)}\max_{z\in\Gamma} r_\sigma[(T-T_n)R(z)].$$

条件$r<1$保证了$t=1$属于上述圆盘。因此$\dim P(1)X=m$，即当$n>N(\Gamma)$时，$\dim P_n X=m$。

命题5.23 若$T_n\xrightarrow{p}T$且存在整数p使对所有$z\in\rho(T)$，$\|[(T-T_n)R(z)]^p\|\to 0$，则在$\rho(T)$内$T_n-z\xrightarrow{\sigma}T-z$，且对$\rho(T)$的任何紧集上的$z$是一致收敛的。

证明 设K是$\rho(T)$的紧子集。我们必须证明$T_n-z\xrightarrow{\sigma}T-z$对$z\in K$一致成立。由

$$r_\sigma[(T-T_n)R(z)]\leqslant\|[(T-T_n)R(z)]^p\|^{1/p}$$

显然可得结论。 □

例5.11 设$T\in\mathscr{C}(X)$。使得$\|(T-T_n)R(z)\|\to 0$的邻逼近T_n在$\rho(T)$内是一致径向收敛的。见第四章的例4.30。

例5.12 收敛$\|T-T_n\|\to 0$和$T_n\xrightarrow{cc}T$在$\rho(T)$内都是一致径向收敛。（参见习题5.12）．当T是紧的时，如果$\pi_n\xrightarrow{p}1$，这样的例子可由投影法或由T的Sloan变形给出。另一个例子是在连续函数空间，将Nyström法用于带有光滑核的积分算子。

一般说来，一致径向收敛是强稳定的充分条件。它在解析摄动论中具有理论上的重要性，这将在第6节中完全显示出来。还有一种重要情形，如果T在$\mathscr{L}(X)$内是紧的，那么一致径向收敛是强稳定的必要条件。

下面我们假设T是紧的。$\sigma(T)$的非零点属于$Q\sigma(T)$，则$\rho(T)\cup Q\sigma(T)=\mathbb{C}-\{0\}$。

引理5.24 若T是紧的，在$\mathbb{C}-\{0\}$内，$T_n-z\xrightarrow{ss}T-z$蕴涵$r_\sigma(T-T_n)\to 0$。

证明 假设当$n\to\infty$时，$r_\sigma(T-T_n)\not\to 0$。则存在序列$\{\nu_n\}_{\mathbb{N}}$，$\nu_n\in\sigma(T-T_n)$，使得$r_\sigma(T-T_n)=|\nu_n|$，且$|\nu_n|\geqslant c>0$。由命题2.24，存在$\{x_p\}$，使得$\forall p\in\mathbb{N}$，$\|x_p\|=1$且$\lim_{p\to\infty}\|(T-T_n)x_p-\nu_n x_p\|=0$。$T_n\xrightarrow{p}T$，$T_n-T$是一致有界的；因此$|\nu_n|<M$。我们可以假设$\nu_n\to\nu\neq 0$。因此

$$(T-T_n)x_n-\nu x_n\to 0,\quad \|x_n\|=1.$$

T是紧的，当$n\in N_1\subset\mathbb{N}$，$Tx_n\to y$。于是有：

$$T_n x_n+\nu x_n\to y,\quad n\in N_1.$$

（1）我们设$-\nu\neq 0$属于$Q\sigma(T)$，$-\nu$被曲线Γ所孤立。利用引理5.19的记号，$S_n(-\nu)\xrightarrow{p}S(-\nu)=:S$。于是对$n\in N_1$，

$$S_n(-\nu)(T_n x_n+\nu x_n)\to Sy,$$

由于当$n\in N_2\subset N_1$，且$x_n\to t+Sy$时，$P_n\xrightarrow{cc}P$，$P_n x_n\to t$，即得：

$$(1-P_n)x_n\to Sy.$$

利用$T_n\xrightarrow{p}T$，我们最后得到当$n\in N_2$，且对$\nu\neq 0$，$\|x_n\|=1$，有$\nu x_n\to 0$，这是矛盾的.

（2）现假设$-\nu\in\rho(T)$。类似地有

$$R_n(-\nu)\xrightarrow{p}R(-\nu)$$

和

$$R_n(-\nu)(T_n x_n+\nu x_n)\to R(-\nu)y,\quad n\in N_1,$$

即

$$x_n\to R(-\nu)y \quad 及 \quad \nu x_n\to 0. \quad \square$$

推论5.25 若T和T_n在Hilbert空间中是自伴的，T是紧的，则在$\mathbb{C}-\{0\}$内$T_n-z\xrightarrow{ss}T-z$蕴涵$\|T-T_n\|\to 0$.

证明 由$r_\sigma(T-T_n)=\|T-T_n\|$显然可得. □

定理5.26 (Lemordant) 若T是紧的，下述两条等价：

(i) $T_n-z\xrightarrow{ss}T-z$，在$\mathbb{C}-\{0\}$内；

(ii) $T_n-z\xrightarrow{u\sigma}T-z$，在$\rho(T)$内.

证明 由定理5.22可知，相反的蕴涵是显然的. 现设(i)成立. 设K是$\rho(T)$的紧子集；我们必须证明：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(K)$；当$n>N(K)$时，$\forall z\in K$，$r_\sigma[(T-T_n)R(z)]<\varepsilon$.

我们假设它不成立；因此

$\exists\varepsilon>0$，$\forall N$，$\exists n>N(K)$；$r_\sigma[(T-T_n)R(z)]\geqslant\varepsilon$，$z_n\in K$.

设$\nu_n\in\sigma[(T-T_n)R(z_n)]$，使得$r_\sigma[(T-T_n)R(z_n)]=|\nu_n|$，且$|\nu_n|\geqslant\varepsilon$. 存在序列$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$，$\|x_n\|=1$，使得

$$(T-T_n)R(z_n)x_n-\nu_n x_n\to 0,\quad n\in N_1\subset\mathbb{N}.$$

ν_n是有界的且$\nu_n\to\nu\neq 0$，$n\in N_2\subset N_1$. K是紧的，于是当$n\in N_3\subset N_2$时，$z_n\to z\neq 0$，且$\|R(z_n)-R(z)\|\to 0$. 因此$(T-T_n)R(z)x_n-\nu x_n\to 0$. 对所有的$\rho(T)$内的$z$，$TR(z)=1+zR(z)$；因此$z\neq 0$且

$$R(z)=-1/z+(1/z)TR(z),$$

其中 $TR(z)$ 是紧的。于是，

$$(T-T_n)R(z)x_n = TR(z)x_n - T_n((1/z)TR(z)-1/z)x_n.$$

$\{TR(z)x_n\}$含有收敛的子序列；则

$$T_nx_n + z\nu x_n \to y, \quad n\in N_4\subset N_3.$$

应用引理5.24的证明，导出矛盾． □

习题

5.13 设 $T\in\mathscr{C}(X)$，使得对某个 $\rho(T)$ 内的z_0，$R(z_0)$ 是紧的。证明在 $\mathbb{C}$ 内 $T_n - z \xrightarrow{ss} T-z$ 蕴涵 $\forall z\in\mathbb{C}$，$r_\sigma[R_n(z)-R(z)]\to 0$。

5.14 由定理5.26和习题5.13推出：当闭算子 T 有紧预解式时，它的逼近算子 T_n强稳定的充分必要条件.

5.3 T和T^{-1}之间的联系

证明在$\mathscr{C}(X)$中，T 的逼近是强稳定的重要方法是证明在$\mathscr{L}(X)$内相应于T^{-1}（如果存在）的逼近的强稳定性。设 $\lambda\in Q\sigma(T)$，$\lambda\neq 0$。

命题5.27 设T，$T_n\in\mathscr{C}(X)$是可逆的，在$\mathscr{L}(X)$内，记$A:=T^{-1}$，$A_n:=T_n^{-1}$。我们假设 $T_n\xrightarrow{p}T$且在$\mathscr{L}(X)$中$1/\lambda$的某邻域内 $A_n - z\xrightarrow{ss}A-z$。则在$\mathscr{C}(X)$中 λ 的某邻域内$T_n - z\xrightarrow{ss}T-z$。

证明 这是下述性质当 $z_0=0\in\rho(T)$ 时的特殊情形。对 $z_0\in\rho(T)$，令 $t:=1/(z-z_0)$，$\nu:=1/(\lambda-z_0)$．$T_n\xrightarrow{p}T$且在 ν 的某邻域内

$$R_n(z_0)-t\xrightarrow{ss}R(z_0)-t.$$

这蕴涵着在λ的某邻域内，$T_n - z \xrightarrow{ss} T - z$（见习题3.11和命题2.28）. □

例5.13 若投影法对T^{-1}是强稳定的，则协调有限元法对T是强稳定的. 这里的投影即为由基函数集定义的椭性投影.

这引导我们去研究$\mathscr{L}(X)$内的强稳定性.

5.4 有界算子

命题3.18可以推广为下述形式.

命题5.28 如果下述三个性质之一成立：

（i）$\|T_n - T\| \to 0$；

（ii）$T_n \xrightarrow{cc} T$；

（iii）$T_n \xrightarrow{c} T$

则当$z \in \rho(T) \cup Q\sigma(T)$时，$T_n - z \xrightarrow{r} T - z$.

证明 因为（i）或（ii）蕴涵（iii），所以只需证明$T_n \xrightarrow{c} T$蕴涵$\forall \lambda \in Q\sigma(T)$，$T_n - \lambda \xrightarrow{r} T - \lambda$. 设$B$为单位球，$x_n \in B$使得$(T_n - \lambda)x_n \to y$. 当$n \in N_1 \subset \mathbb{N}$时，$(T - T_n)x_n \to u$. 于是$(T - \lambda)x_n \to y + u$，$n \in N_1$. 我们记$x_n = Px_n + (1 - P)x_n$，当$n \in N_2 \subset N_1$时，$Px_n \to v$，且$(T - \lambda)(1 - P)x_n \to y + u - (T - \lambda)v$；在$(1 - P)X$内$(T - \lambda)(1 - P)$是可逆的；于是$\{(1 - P)x_n\}_{N_3}$收敛于$w$，$\{x_n\}_{N_3}$收敛于$v + w$，因为$u = 0$，所以有$(T - \lambda)(v + w) = Py + (1 - P)y + u = y$（见习题3.4）. □

习题

5.15 若$T_n \xrightarrow{c} T$，利用第3节中的概念，证明$\mathbf{g}_n = \mathbf{g}$蕴涵$E$和$E_n$满足（5.4）（Goldberg）.

例5.14 设T是紧的。$\{\pi_n\}_{\mathbb{N}}$是满足$\pi_n \xrightarrow{p} 1$的投影序列.投影法（或Sloan变形）相应的逼近$\pi_n T$（或$T\pi_n$）在$\mathbb{C}-\{0\}$内强稳定：$\|(1-\pi_n)T\| \to 0$（或$T(1-\pi_n) \xrightarrow{cc} 0$）。

例5.15 设T是有光滑核的积分算子。在连续函数空间中，用Nyström法得到的T的逼近在$\mathbb{C}-\{0\}$内强稳定。

习题

5.16 在T是紧的且$(\pi_n{\restriction}X_n)^{-1}$一致有界的条件下，证明第四章第3节定义的Petrov法的强稳定性。

5.5 T_n属于类$\mathfrak{D}$的情形

命题3.20的下述推广成立。

定理5.29 若T_n属于类$\mathfrak{D}$，在$\mathscr{L}(\widehat{D},X)$内，对$z\in\rho(T)\cup Q\sigma(T)$，下述两条等价：

（i）$T_n - z\pi_n \xrightarrow{d-ss} T-z$；

（ii）$T_n - z\pi_n \xrightarrow{d-r} T-z$.

证明留给读者。

我们将类似于命题5.27和5.28的离散情形留作习题。

习题

5.17 设$\mathscr{T}_n$是可逆的且$\mathscr{A}_n := \mathscr{T}_n^{-1}\in\mathscr{L}(X_n)$。令$A_n := \mathscr{A}_n\pi_n$。证明若$T_n \xrightarrow{p} T$且在$1/\lambda$（$\lambda\neq 0$）的某邻域内，$A_n - z\pi_n \xrightarrow{d-ss} A-z$，则在$\lambda$的某邻域内

$$T_n - z\pi_n \xrightarrow{d-ss} T-z.$$

5.18 证明$T_n \xrightarrow{d-c} T$蕴涵对$z\in\rho(T)\cup Q\sigma(T)$，$T_n - z\pi_n \xrightarrow{d-r} T-z$.

5.19 设 T_n属于类 $\mathfrak{D}$。考虑 d－c 收敛的特殊情形 $\|(T-T_n)_{|X_n}\|\to 0$。证明，$\|(P-P_n)_{|X_n}\|\to 0$，且对非零孤立本征值$\Theta(M,M_n)\to 0$。

5.20 T在定义域D上是闭的。设 T_n 属于类 $\mathfrak{D}$。若 $0\in\rho(T)$，证明$\Theta(T_n,T)\to 0$当且仅当$\|(T^{-1}-\mathscr{T}_n^{-1})_{|X_n}\|\to 0$。由此得$T_n$是$T$在$\rho(T)\cup Q\sigma(T)$ 内的强稳定逼近。

例5.16 如果关于 T^{-1}的 Fredholm 法是强稳定的，则关于T的有限差分法是强稳定的。

例5.17 设$a(u,v)$ 是Hilbert 空间上的强制连续形式，并且使得相伴算子A是有界的但不是紧的。在Descloux等（1978a）中给出协调有限元法满足 $\pi_nA\pi_n\xrightarrow{d-c}A$ 的例子。Mills（1979b）中给出另外一例。

例5.18 Descloux （1979）和 Descloux 等（1981）中利用离散间隙收敛，分析了某些有限元法应用于微分算子的情形。

5.6 小结

在表5.1和 5.2 中总结了各种收敛间的关系（参见表 3.2 和 3.3）；在方框内所标出的条件中 z 不出现.

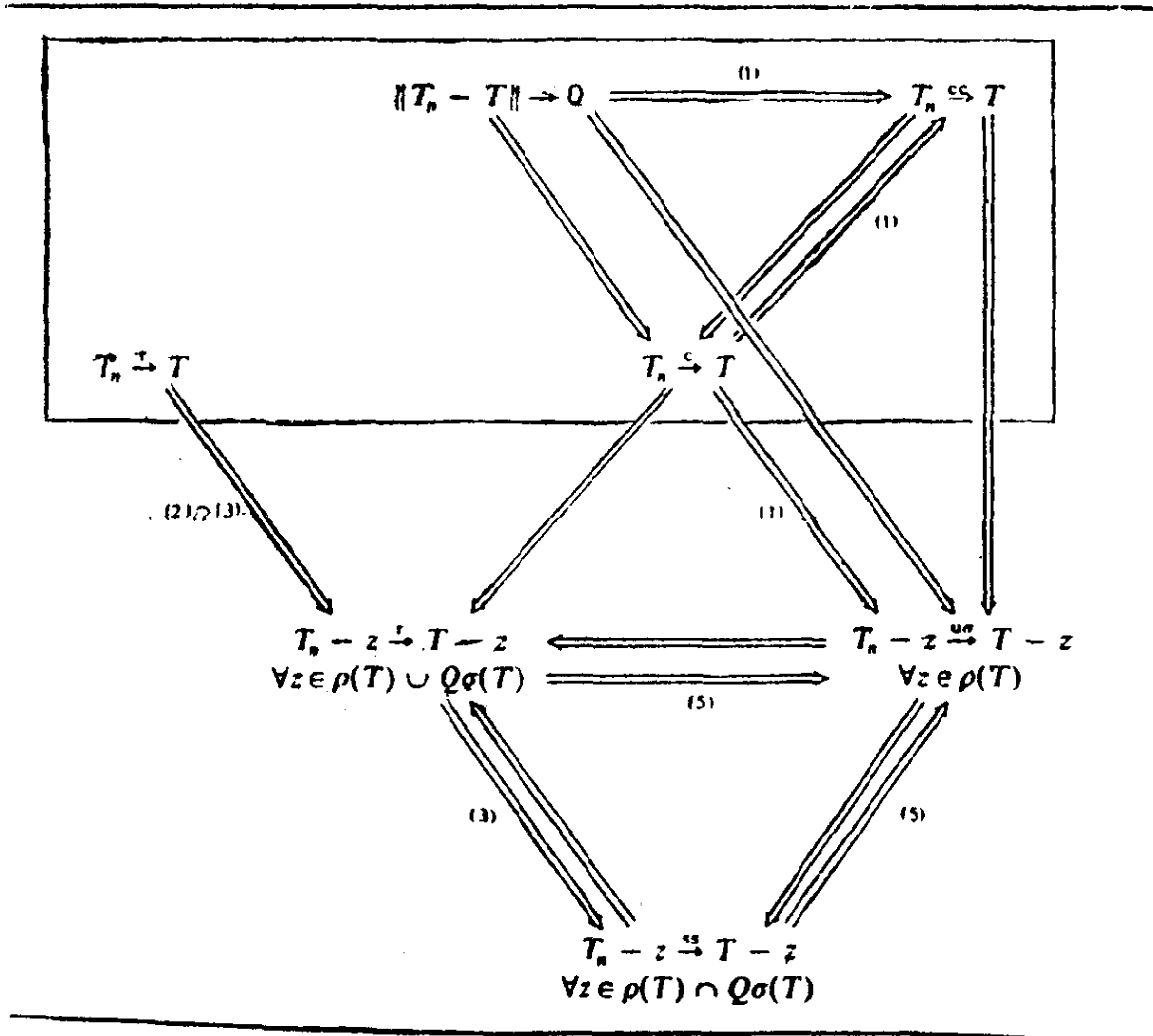
5.7 文献注释

Chatelin （1970a）中首次研究了保持代数重数在本征值的数值逼近中的作用。当在Δ内 $T_n-z\xrightarrow{s\,s}T-z$ 时，λ在摄动$T-T_n$下是 Kato（1976，P437）意义的稳定。

Vainikko（1976a）讨论了由Δ内的离散正则性，得到离散强稳定性在$\mathscr{L}(\widehat{D},X)$ 中的特性。他在证明中用到算子非紧

表 5.1

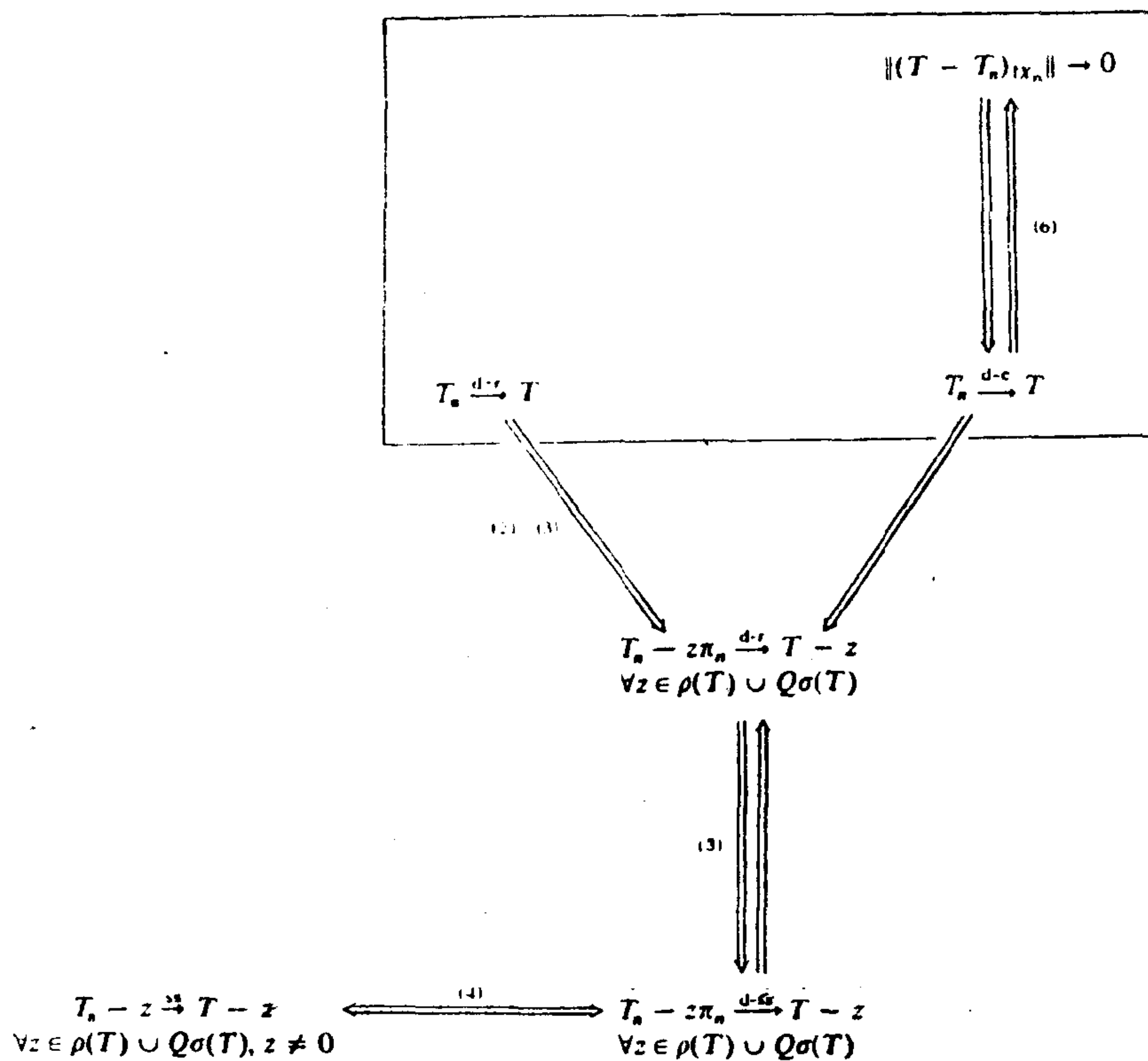
$\rho(T) \cup Q\sigma(T)$[a] 中的强稳定性



a （1）当T和T_n紧时为真；（2）当T反紧时为真；（3）在$\mathscr{L}(\hat{D}, X)$内为真；（5）当T紧时为真。

表 5.2

$\rho(T)\cup Q\sigma(T)$[a]中的离散强稳定性



a (2) 当T和T_n紧时为真；(3) 在$\mathscr{L}(\widehat{D}, X)$内为真；(4) 当z非零时为真；(6) 当$T_n=\pi_n^a T$时为真，其中$\pi_n^a$是椭性投影。

测度的概念；更简单的证明由 Redont (1979b) 给出.

在 Grigorieff (1970a,b, 1972, 1973, 1975a, b), Grigorieff 和 Jeggle (1973), Vainikko (1975, 1976a, b, 1977a,b, 1978a,b) 以及Vainikko和 Karma (1974, a, b) 中应用离散正则收敛对离散化方法做了讨论.

在 Chatelin 和 Lemordant (1978) 中，由 Lemordant 在稍加限制的形式下引入径向收敛(称为强收敛). 当 T 是紧的，由一致径向收敛得到强稳定收敛的特性可在 Lemordant (1980) 中找到.

Vanikko (1969a) 引入了离散紧致收敛并再一次利用非紧测度证明了它的强稳定性. 在Descloux等 (1978b), 和Mills (1979b) 中，利用离散紧致收敛来分析有限元法用于有非紧预解式的椭圆型偏微分算子方面的问题. (参见Descloux, 1981).

6. 在$\rho(T)$中，当$T_n - z \xrightarrow{u\sigma} T - z$时的迭代加细法

现在我们来研究一致径向收敛与解析摄动论有关的特殊性质. 对固定的 n，可用两种方法来表达 T 和 T_n 的关系，即：

$$T_n = T - (T - T_n) \quad 或 \quad T = T_n - (T_n - T).$$

第一种表达法得到依赖于复参数 t 的算子族 $T(t) = T - t(T - T_n)$，由假设

$$r_\sigma((T - T_n)R(z)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

在 $\rho(T)$ 的任何紧子集上一致成立，由此容易得到：对充分大的 n，$t = 1$ 属于预解式、谱投影和迹的解析域（参见习题 5.21和5.22）.

第二种表达法得到算子族 $T_n(t)=T_n-t(T_n-T)$，这从计算的观点看更有意义．因此我们选择它来做进一步讨论．在一致径向收敛的相同假设下也蕴涵了当 n 充分大时，$t=1$ 属于相应的函数的解析域．它使我们能够对数值逼近方法中的一大类来应用解析摄动论这一有力工具．$x=R(z)f$，λ 和 φ 是数值过程的极限，只需我们研究数值逼近 T_n．

习题

5.21 $T(t)=T-t(T-T_n)$．λ 为 T 的重数是 m 的本征值，被曲线 Γ 孤立．对 Γ 上的 z 定义，

$$R(t,z)=(T(t)-z)^{-1},\quad P(t)=\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma R(t,z)dz,$$

和

$$\hat{\lambda}(t)=\frac{1}{m}\mathrm{tr}\ T(t)P(t).$$

对固定的 n，求出 $R(t,z)$，$P(t)$ 和 $\hat{\lambda}(t)$ 的解析域．

5.22 设在 $\rho(T)$ 内 $T_n-z\xrightarrow{u\sigma}T-z$．证明存在 $N(\Gamma)$ 使得当 $n>N(\Gamma)$，$t=1$ 属于习题5.21中定义的解析域．对 Γ 上的 z 展开 $R(z)=(T_n-z)^{-1}$ 为级数，

$$P_n=\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma R_n(z)dz,\ \hat{\lambda}_n=\frac{1}{m}\mathrm{tr}\ T_nP_n.$$

6.1 解析摄动论

设 λ_n 是 T_n 被 Γ 孤立的本征值．假设 λ_n 是单的且定义

$$R_n(z)=(T_n-z)^{-1},\quad z\in\Gamma$$

$$P_n=\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma R_n(z)dz$$

引理5.30 若在 $\rho(T)$ 内 $T_n-z\xrightarrow{u\sigma}T-z$，则当 n 充分大，对 $\rho(T)$ 上的 z，$r_\sigma[(T_n-T)R_n(z)]$ 有定义．当 n 趋于无穷

时，它趋于零，并且在$\rho(T)$的任何紧子集内对z一致成立。

证明　对任何$\varepsilon>0$，及$\rho(T)$内的任何紧集K，存在$N(K)$，使得：

$$\sup_{n>N(K)} r_\sigma[(T-T_n)R(z)]<\varepsilon.$$

对$n>N(K)$，$R_n(z)=R(z)\Sigma_{k=0}^{\infty}[(T-T_n)R(z)]^k$，且$z\in\rho(T_n)$。因此

$$(T-T_n)R_n(z)=\sum_{k=1}^{\infty}[(T-T_n)R(z)]^k$$

$$=[(T-T_n)R(z)][1-(T-T_n)R(z)]^{-1},$$

这里的两个因子可交换。于是对$z\in K$，

$r_\sigma[(T-T_n)R_n(z)]\leqslant r_\sigma[(T-T_n)R(z)]r_\sigma([1-(T-T_n)\cdot R(z)]^{-1})\leqslant\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$（习题2.7）．由此易得所求结论。□

对$T_n(t)=T_n-t(T_n-T)$，我们定义

$$R_n(t,z)=(T_n(t)-z)^{-1},$$

$$P_n(t)=\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma R_n(t,z)dz,$$

$$\lambda_n(t)=\mathrm{tr}T_n(t)P_n(t)。$$

引理5.30证明了当n大于$N(z)$、$N(\Gamma)$时，$t=1$属于$R_n(t,z)$、$P_n(t)$和$\lambda_n(t)$的解析域，其中

（a）$N(z)$由$\sup_{n>N(z)}r_\sigma[(T_n-T)R_n(z)]<1$对$R_n(t,z)$来定义；

（b）$N(\Gamma)$由$\sup_{n>N(\Gamma)}\max_{z\in\Gamma}r_\sigma[(T_n-T)R_n(z)]<1$对$P_n(t)$和$\lambda_n(t)$来定义。

由此可得到$x=R(z)f$的级数展开，以及当逼近T_n一致径

向收敛于T时，T的本征元λ，φ的级数展开。

6.2 解的迭代加细

对$\rho(T)$内固定的z，考虑方程

$$(T-z)x=f. \tag{5.9}$$

假设$T_n-z\xrightarrow{\sigma}T-z$，且在$X$内，由

$$(T_n-z)x_n=f, \tag{5.10}$$

来逼近（5.9）。解$x=R(z)f$由$x_n=R_n(z)f$来逼近。且设$n>N(z)$固定。

命题5.31 若$T_n-z\xrightarrow{o}T-z$，则对任何固定的$n>N(z)$，当$k\to\infty$时，下述序列收敛于x：

$$x^0:=x_n,\quad x^{k+1}:=x^k+R_n(z)(f-(T-z)x^k),$$
$$k\geqslant 0 \tag{5.11}$$

证明　在命题3.29中以T_n代替T'得

$$x^{k+1}=x_n+R_n(z)(T_n-T)x^k$$
$$=R_n(z)f+R_n(z)(T_n-z-(T-z))x^k,$$

即得（5.11）。□

习题

5.23　证明当$k\to\infty$时，$x^k\to x$与一个公比任意接近$r_\sigma[(T_n-T)R_n(z)]$的几何级数至少有相同的收敛速率。

5.24　设用逼近T_M作为Tx^{n-1}（$M\gg n$）的值，证明如果$\|T_n-T\|\to 0$或$T_n\xrightarrow{cc}T$，则当$k\to\infty$时，$x^k\to x_M:=(T_M-z)^{-1}f$。

式（5.11）可化为交错形式（5.12）。

命题5.32 如果$z\neq 0$，可以将递推公式（5.11）写成，

$$x^0 := x_n,$$

$$x^{k+1} := \frac{1}{z}(Tx^k - f) + \frac{1}{z}R_n(z)T_n(f - (T - z)x^k),$$

$$k \geqslant 0. \tag{5.12}$$

证明　利用（5.11）和等式$R_n(z) = (1/z)$（$R_n(z)T_n - 1$）. □

x^{k+1}是用r^k修正迭代解$\widetilde{x^k} = (1/z)(Tx^k - f)$ 的 结 果，r^k是方程

$$(T_n - z)r^k = T_n(x^k - \widetilde{x^k})$$

的解，这是因为剩余$f - (T - z)x^k$等于$z(x^k - \widetilde{x^k})$ ．当$T_n = \pi_n T$时，r^k是在$X_n = \pi_n X$内方程

$$(\pi_n T - z)r^k = \pi_n T(x^k - \widetilde{x^k})$$

的解.

习题

5.25　施行迭代（5.11）一步，$T_n = \pi_n T \pi_n$，由$x_n = (\pi_n T \pi_n - z)^{-1} f$ 起步．定义：

$$x_n^G = (\pi_n T - z)^{-1}\pi_n f, \quad \widetilde{x}_n^G = (1/z)(Tx_n^G - f) = x_n^s.$$

证明第一次迭代x^1满足

$$x^1 = \widetilde{x}_n^G + (1/z)R_n^G(z)T(1 - \pi_n)f.$$

5.26　重复习题 5.25，由x_n^G起步．证明第一次迭代为

$$x^{1G} = \widetilde{x}_n^G + (1/z)(1 - \pi_n)f.$$

5.27　若T是紧的且$\pi_n \xrightarrow{p} 1$，证明对$T_n = \pi_n T$，(5.12) 的收敛比率由

$$\|x - x^k\| \leqslant c(\|(1 - \pi_n)T\|\|(\pi_n T - z)^{-1}\|)^{k+1}, \quad k \geqslant 0$$

给出.

例5.19 在Lin Qun (1982a) 中，迭代 (5.12) 是考虑当$T_n=\pi_n T$时，且以$x^0:=x_n^G=(\pi_n T-z)^{-1}\pi_n f$作为初始值的．注意在这时$\widetilde{x^0}$是 Sloan 解$\widetilde{x_n}$．

例5.20 第七章第8节中，在利用投影或数值求积来逼近积分算子时，我们将看到这个方法的实际应用．

例5.21 迭代加细法是离散化算子T_n迭代亏损较正的特殊情形．在我们的讨论中，亏损或剩余，$f-(T-z)x^k$由赋值Tx^k较正．增加精度的各种逼近T_M可以用来估计Tx^k．这种方法类似于在 Stetter (1978) 中称为“迭代较正亏损修正”法的变形．

例5.22 形如 (5.11) 的迭代加细，在 Atkinson (1973, 1976a，第四章) 中曾对用投影法或Nystöm法逼近紧积分算子的情况加以考虑．对后一种方法，Brakhage (1960) 进一步应用迭代向量$\widetilde{x^k}=(1/z)(Tx^k-f)$，$z\neq 0$，来解释剩余$f-(T-z)x^k=(T_n-T)y_n^k$的振荡现象．由等式

$$x=\frac{1}{z}(Tx-f)$$

起步，

$$(T_n-z)x=f+(T_n-T)x=f+\frac{1}{z}(T_n-T)(Tx-f),$$

并由 Nyström 解 x_n^N，Brakhage提出迭代

$$x'_0=x_n^N,\ \widetilde{x'^k}=\frac{1}{z}(Tx'^k-f),$$

$$x'^{k+1}=R_n(z)[f+(T_n-T)\widetilde{x'^k}],k\geqslant 0,\quad (5.13)$$

这种方法一般优于 (5.11)．在 Atkinson (1973, 1976a, 第四章) 中做了数值试算．Tx的赋值利用了逼近T_Mx，$M\gg n$，

其中 x 是已知函数.

例5.23 改善修正的剩余光滑原理是各种多重网格技术的本质（Brandt, 1977; Hackbusch, 1979; McCormick, 1980; Hemker和Schippers, 1981）.

关于剩余光滑的数值重要性，我们将在第6.6节中就迭代亏损较正法做更充分的讨论.

习题

5.28 将Nyström法应用于有连续核的积分算子 T，得到 T_n，证明 $\|R_n(z)(T_n-T)\|$ 可以不趋于0，但是

$$C_n(z):=\|[R_n(z)(Tn-T)]^2\|\to 0,\quad n\to\infty.$$

由此得

$$\|x-x^{k+2}\|\leqslant C_n(z)\|x-x^k\|,\quad k\geqslant 0,$$ 其中 x^k 满足（5.11）.

5.29 证明由（5.13）定义的序列几何收敛于 x，其公比为 $(1/|z|)\|R_n(z)(T_n-T)T\|$. 当 T 是紧的且 $T_n-z\xrightarrow{s}T-z$ 时，这个比率当 $n\to\infty$ 时趋于0.

5.30 证明（5.13）等于

$$x'^{k+1}=x'^k+(1/z)[-1+R_n(z)T][f-(T-z)x'^k].$$

检验 $(1/z)[-1+R_n(z)T]$ 是 $R(z)$ 的逼近.

5.31 证明（5.13）等于求方程

$$(T-z)(x-x'^k)=d^k:=f-(T-z)x'^k$$

的Kantorovitch正则形式逼近.

6.3 本征值的迭代加细

考虑本征值问题

$$T\varphi=\lambda\varphi,\quad \varphi\neq 0 \tag{5.6}$$

这里我们设 λ 是单的且被曲线 Γ 孤立. 在 X 中用

$$T_n\varphi_n=\lambda_n\varphi_n,\quad \|\varphi_n\|=1 \tag{5.14}$$

来逼近（5.6）．设 $n>N(\Gamma)$ 固定，令 $r_\Gamma(n):=\max_{z\in\Gamma}r_\sigma[(T-T_n)R_n(z)]$．圆盘 $\delta_\Gamma(n)=\{t\in\mathbb{C};\ |t|<r_\Gamma^{-1}(n)\}$ 是 $\lambda_n(t)$ 和 $P_n(t)$ 的解析域．由于 $t=1$ 属于 $\delta_\Gamma(n)$，所以 $1=\dim PX=\dim P_nX$。在 Γ 内部仅有 T_n 的一个单本征值 λ_n。

设 D 在 X 中稠密，于是伴随算子 T_n^* 是唯一确定的．设 φ_n^* 是 T_n^* 相应于 $\overline{\lambda}_n$ 的本征向量，且由 $\langle\varphi_n^*,\ \varphi_n\rangle=1$ 规范化．则 $P_n=\langle\cdot,\ \varphi_n^*\rangle\varphi_n$．定义

$$S_n:=\lim_{z\to\lambda_n}R_n(z)(1-P_n),$$

即 T_n 在 λ_n 的约化预解式．

设满足类似于（3.17）的下述条件：

当 $|t|\leqslant 1$，$\langle P_n(t)\varphi_n,\ \varphi_n^*\rangle$ 非零 (5.15)

于是 $P_n(t)\varphi_n\neq 0$ 是 $T_n(t)$ 的本征向量，满足 $P_nP_n(t)\varphi_n\neq 0$．设 $\phi_n(t)$ 是由 $P_n\phi(t)=\varphi_n$ 规范化的本征向量．令 $\phi:=\phi_n(1)$，即由 $P_n\phi=\phi_n$ 规范化的 T 的本征向量．注意 $\phi=\widetilde{P}_n^{-1}\varphi_n$（见第六章引理6.1）．

下面给出（5.15）成立的充分条件．

引理5.33 设 $T_n\xrightarrow{P}T$ 且存在整数 p 使得，$\forall z\in\Gamma$，$\|[(T-T_n)R(z)]^p\|\to 0$．给定 $r>1$，则对充分大的 n，$\lambda_n(t)$ 和 $\phi_n(t)$ 当 $|t|<r$ 时是解析的．

证明 按上述假设在 Γ 上 $T_n-z\xrightarrow{\nu\sigma}T-z$ 成立．令 $K_n(z):=(T-T_n)R_n(z)$；则当 $n>N$（依赖于 Γ）时，

$$K_n^p(z)=[(T-T_n)R(z)]^p[1-(T-T_n)R(z)]^{-p},$$
$$z\in\Gamma,$$

且当 $n\to\infty$，$\|K_n^p(z)\|\to 0$，同时 $K_n^j(z)\xrightarrow{p}0$，$j=1,\ \cdots,$

$p-1$。对 $\xi \in X$，$P_n(P_n(t)-P_n)P_n\xi=\langle\xi,\varphi_n^*\rangle\langle(P_n(t)-P_n)\varphi_n,\varphi_n^*\rangle\varphi_n$；因此 $r_\sigma[(P_n(t)-P_n)P_n]=r_\sigma(P_n(P_n(t)-P_n)P_n)=|\langle P_n(t)\varphi_n,\varphi_n^*\rangle-1|<1$，于是有 $0<\langle P_n(t)\varphi_n,\varphi_n^*\rangle<2$。形式上有

$$P_n(P_n(t)-P_n)P_n\xi$$

$$=\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma P_nR_n(z)\sum_{k=1}^{\infty}t^kK_n^k(z)P_n\xi$$

$$=\frac{-1}{2i\pi}\langle\xi,\varphi_n^*\rangle\int_\Gamma\frac{1}{\lambda_n-z}\left\langle\sum_{k=1}^{\infty}t^kK_n^k(z)\varphi_n,\varphi_n^*\right\rangle\varphi_n dz.$$

我们得到

$$r_\sigma[(P_n(t)-P_n)P_n]\leqslant\frac{\text{meas}\,\Gamma}{2\pi}\max_{z\in\Gamma}\frac{1}{|\lambda_n-z|}$$

$$\left|\left\langle\sum_{k=1}t^kK_n^k(z)\varphi_n,\varphi_n^*\right\rangle\right|.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}t^kK_n^k(z)\varphi_n=\left(\sum_{k=1}^{\infty}[t^pK_n^P(z)]^k\right)\left(\sum_{j=0}^{P-1}t^jK_n^j(z)\varphi_n\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{p-1}t_jK_n^j(z)\varphi_n.$$

$j=1,\cdots,p-1$，$K_n^j(z)\xrightarrow{p}0$ 且 $P_n\xrightarrow{cc}P$；于是

$$\|K_n^j(z)\varphi_n\|\leqslant\|K_n^j(z)P_n\|\to 0.$$

设 $r>1$ 及 ε $(0<\varepsilon<1)$ 给定。存在 N 使得，对 $n>N$，

（i） $\max(r^P\|K_n^P(z)\|,r^j\|K_n^j(z)\varphi_n\|；z\in\Gamma,j=1,\cdots,P-1)<\varepsilon$，

(ii) $|\lambda-\lambda_n|<\varepsilon$.

则当 $|t|<r$, $r_\sigma[(P_n(t)-P_n)P_n]\leqslant a(\varepsilon/(1-\varepsilon))+\beta\varepsilon$, 我们可以在 (0,1) 中选择 ε 使后一个常数小于 1. 因此当 $|t|<r$ 时，满足 (5.15). 注意到 (i) 蕴涵着

$$r_\cdot(n)\leqslant\|K_n^P(z)\|^{1/p}<\varepsilon^{1/p}/r<1/r<1. \quad \square$$

引理 5.34 在引理 5.33 的假设下，对任何固定的充分大的 n，下述展开式当 $|t|\leqslant 1$时收敛：

$$\lambda_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^k\nu^k \quad 和 \quad \phi_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^k\eta^k,$$

其中 ν^k 和 η^k 是迭代格式

$$\nu^0=\lambda_n,\ \nu^k=\langle(T-T_n)\eta^{k-1},\ \varphi_n{}^*\rangle,\ k\geqslant 1,$$

$$\eta^0=\varphi_n,\ \eta^k=S_n\left[(T_n-T)\eta^{k-1}+\sum_{i=1}^{k}\nu^i\eta^{k-i}\right],\ k\geqslant 1$$

的解.

证明 由引理 3.30 和 5.33 显然可得. $\square$

我们定义序列 $\lambda^k:=\Sigma_{i=0}^k\nu^i$和 $\varphi^k:=\Sigma_{i=0}^k\eta^i$.

定理5.35 在引理5.33的假设下，对任何固定的充分大的 n, $\lambda=\lim_k\lambda^k$, $\phi=\lim_k\varphi^k$, 其中 λ^k 和 φ^k 是

$$\lambda^0=\lambda_n,\ \lambda^k=\langle T\varphi^{k-1},\ \varphi_n^*\rangle,\ \varphi^0=\eta^0=\varphi_n$$

$$(T_n-\lambda_n)(\varphi^k-\varphi_n)=(1-P_n)[(T_n-T)\varphi^{k-1}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}\nu^j\eta^{i-j}] \quad (5.16)$$

的解，并且 $\lambda^k-\lambda^{k-1}=\nu^k$, $\varphi^k-\varphi^{k-1}=\eta^k$, $k\geqslant 1$.

证明 由命题 3.31 和引理 5.34 显然可得. $\square$

推论5.36 在引理 5.33 的假设下，当 n 充分大时，序列λ^k和φ^k 的收敛速率可以用下式控制，

$$|\lambda-\lambda^k|\leqslant C\frac{q^{k+1}}{1-q},\quad \|\phi-\phi^k\|\leqslant C'\frac{q'^{k+1}}{1-q'},$$

其中 q 和q'满足

$$\max_{z\in\Gamma} r_\sigma[(T_n-T)R_n(z)]<q<q'<1.$$

证明 对 $n>N(\Gamma)$，$\lambda_n(t)$在$\delta(n)$内解析，对$T_n(t)$ 应用命题3.32，得到收敛速率 q 满足 $r(n)<q<1$. 在引理5.33中已证明了当$|t|<r$时$\phi_n(t)$解析，并对充分大的 n，$r(n)<1/r$。对任何$q'>1/r$利用 Cauchy 不等式. 显然可选择q使得$q<q'$。□

习题

5.32 设T_n是 Galerkin 逼近 $\pi_n T\pi_n$。证明 $\lambda^1=\lambda_n^G$，$\varphi^1=\tilde{\varphi}_n^G=\varphi_n^S$。

直至目前我们考虑了 λ 是单的情形。代数重数为m的单个本征值或一组m个相近本征值的情形可以由修改第三章第8.3节的有关内容来处理。设$\{\varphi_{in}\}_1^m$是M_n的基，给定$r>1$，对充分大的 n，$P_n(t)\varphi_{in}\neq 0$，$i=1,\cdots,m$，因为在引理5.33的假设下$|t|<r$。所以可以得到类似于定理3.41的定理。

6.4 计算中的实际情况

6.41 初始投影的选择

建立公式（5.16)，我们用到T_n的谱投影P_n，即需要φ_n和φ_n^*的信息，因为$P_n=\langle\cdot,\varphi_n^*\rangle\varphi_n$。这不是必要的，而且如果$P_n$是病态的，即当$\|\varphi_n^*\|$很大时，这样做可能是不利的.

设$y\in X^*$满足$\langle y,\varphi_n\rangle\neq 0$，为了简便，我们设$\langle y,\varphi_n\rangle=1$，并考虑在本征方向$\{\varphi_n\}$上沿$K:=\mathrm{Ker}Q=\{y\}^\perp\cap X$的投影$Q:=\langle\cdot,y\rangle\varphi_n$（见习题2.3)。显然$\|Q\|=\|y\|=1/\mathrm{dist}(\varphi_n,K)$(见定理2.4和习题6.32)。在$K=(1-Q)X$上，算子$T_{n,\lambda_n}=[(1-$

$Q)(T_n-\lambda_n)]_{\restriction K}$是可逆的（见第三章第8.3节），且记$\Sigma_n$是有界算子$(1-Q)T_{n,\lambda_n}^{-1}(1-Q)$。考虑$Q(P_n(t)-P_n)Q$，可以证明（习题5.35）在引理5.33的假设下，对充分大的n，当$|t|\leqslant 1$时，满足$\langle P_n(t)\varphi_n,y\rangle$非零这一条件．因此$QP\varphi_n\neq 0$，记$\hat{\phi}$是由$Q\hat{\phi}=\varphi_n$规范化的$T$的本征向量.现在我们证明$\hat{\phi}$是满足$Q\hat{\varphi}^k=\varphi_n$的序列$\hat{\varphi}^k$的极限.

定理5.37 在引理5.33的假设下，对充分大且固定的n，λ和$\hat{\phi}$是如下定义的序列λ^k，$\hat{\phi}^k$的极限，

$$\lambda^0=\lambda^n,\quad \lambda^k=\langle T\hat{\varphi}^{k-1}+T_n\hat{\eta}^k,\ y\rangle,$$

$$\hat{\varphi}^0=\hat{\eta}^0=\varphi_n,\ \hat{\varphi}^k=\varphi_n+\Sigma_n[(T_n-T)\hat{\varphi}^{k-1}$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}v^j\hat{\eta}^{i-j}],\tag{5.17}$$

其中$\lambda^k-\lambda^{k-1}=\nu^k$，$\hat{\varphi}^k-\hat{\varphi}^{k-1}=\hat{\eta}^k$，$k\geqslant 1$。

证明　设$\lambda_n(t)$，$\hat{\varphi}_n(t)$是$T_n(t)$的本征元，并且$\hat{\phi}_n(t)$是由$Q\phi_n(t)=\varphi_n$规范化的．$\hat{\phi}_n(t)=\hat{\gamma}(t)P_n(t)\varphi_n$，而$\hat{\gamma}(t)=1/\langle P_n(t)\varphi_n,y\rangle$。由此容易从习题5.35得到，当$|t|\leqslant 1$时，$\lambda_n(t)$和$\hat{\phi}_n(t)$是$t$的解析函数．公式(5.17)可象(5.16)一样验证。令$\lambda_n(t):=\Sigma_{k=0}^{\infty}t^k\nu^k$和$\hat{\phi}_n(t):=\Sigma_{k=0}^{\infty}t^k\hat{\eta}^k$。因为当$|t|\leqslant 1$时，$\lambda_n(t)$是解析的，所以它的级数展开式是唯一的．对$k=0$，我们可以选择$\nu^0=\lambda^0=\lambda_n$，$\hat{\eta}^0=\hat{\varphi}^0=\varphi_n$，当$k=1$时，

$$(T_n-\lambda_n)\hat{\eta}^1-(T_n-T)\varphi_n=\nu^1\varphi_n.$$

在$(1-Q)X$中，可得到方程

$$(1-Q)(T_n-\lambda_n)\hat{\eta}^1=(1-Q)(T_n-T)\varphi_n,$$

它有唯一解$\hat{\eta}^1=\Sigma_n(T_n-T)\varphi_n$。因此在$QX$内，

$$\nu^1=\langle(T_n-\lambda_n)\hat{\eta}^1-(T_n-T)\phi_n,y\rangle$$

$$= \langle T\varphi_n - T_n\varphi_n + T_n\hat{\eta}^1, y\rangle$$

且

$$\lambda^1 = \lambda_n + \nu^1 = \langle T\varphi_n + T_n\hat{\eta}^1,\ y\rangle. \ \square$$

对本征向量的逼近φ_n的较正$\Sigma_{k=1}^{\infty}\eta^k$和$\Sigma_{k=1}^{\infty}\hat{\eta}^k$分别属于两个不同的子空间，$(1-P_n)X$和$(1-Q)X$（见图5.5）.

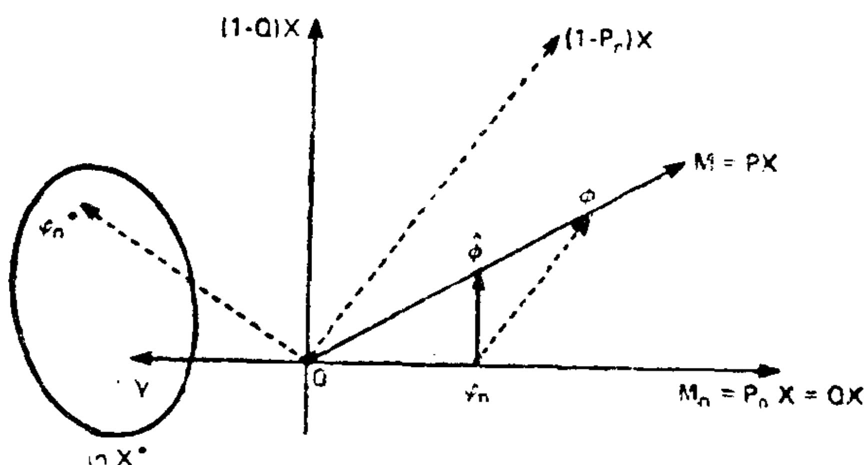


图 5.5

习题

5.33 比较公式（5.16）和（5.17）的算法复杂性.

6.4.2 可解算子方程的条件

序列x^k，λ^k和φ^k或$\hat{\varphi}^k$的实际计算基于在X内方程序列的分解：

$$(T_n - z)\xi^k = f^k, \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned} &(T_n - \lambda_n)\varepsilon^k = (1-P_n)f^k,\ P_n\varepsilon^k = 0 \\ &(1-Q)(T_n - \lambda_n)\hat{\varepsilon}^k = (1-Q)f^k, Q\hat{\varepsilon}^k = 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

其中f^k属于X且$\xi^k = x^k - x_n, \varepsilon^k = \varphi^k - \varphi_n$或$\hat{\varepsilon}^k = \hat{\varphi}^k - \varphi_n$，$k \geqslant 1$.

(5.9)(或(5.6))的精确解是由解(5.18)(或(5.19))得到的序列的极限，这里右端的f^k（或为$(1-P_n)f^k$，或为（1－

$Q)f^k$）随迭代法改变。f^k的计算需要Tg^k的值，而g^k是X的已知元。如果这个值不能以封闭形式给出，我们可以用一个阶高于T_n的逼近T_M.

习题

5.34 设T_M是T的逼近且λ_M和ϕ_M是T_M的本征元，这里ϕ_M是由$P_n\phi_M=\varphi_n$规范化的。若用逼近T_M作(5.16)右端$T\varphi^{k-1}$的赋值，证明：若$\|T_n-T\|\to 0$，或$T_n\stackrel{cc}{-}T$，则当$k\to\infty$时$\lambda^k\to\lambda_M$；$\varphi^k\to\phi_M$。

5.35 证明引理5.33对$\phi_n(t)$为真。

6.5 当T是紧算子时的其它迭代法

仍设T的本征值λ是单的且非零。ϕ是由$P_n\phi=\varphi_n$规范化的T的本征向量，n充分大且固定。我们考虑迭代

$$\mu^0:=\lambda_n,\quad \mu^{k+1}=\langle T\mu^k,\varphi_n^*\rangle,\quad k\geqslant 0,$$
$$u^0:=\varphi_n,\quad u^{k+1}=u^k-S_n(Tu^k-\mu^{k+1}u^k),\ k\geqslant 0. \tag{5.20}$$

命题5.38 设T是紧的且$\|T_n-T\|\to 0$。对任何固定的充分大的n，$\lambda=\lim_k\mu^k$，且$\phi=\lim_k u^k$，其收敛至少是线性的：

$$|\mu^k-\lambda|+\|u^k-\phi\|\leqslant c\|T-T_n\|^{k+1},\quad k\geqslant 0.$$

证明：我们用归纳法来证明收敛性。对$k=0$，$|\lambda_n-\lambda|+\|\varphi_n-\varphi\|\leqslant c\|T-T_n\|$可按如下证明。由第六章定理6.6可得：$|\lambda_n-\lambda|\leqslant c\|(T-T_n)P\|$. 令$\phi:=y_nP\varphi_n$.于是$\gamma_n{}^{-1}=\langle P\varphi_n,\varphi_n^*\rangle$且

$$|\gamma_n^{-1}-1|\leqslant|\langle P\varphi_n-\varphi_n,\varphi_n^*\rangle|$$
$$\leqslant\|P-1\|\mathrm{dist}(\varphi_n,M)\|\varphi_n^*\|\leqslant C\|(T-T_n)P\|,$$

仍由定理6.6有

$$\phi-\phi^n=\gamma_nP\varphi_n-\varphi_n=(\gamma_n-1)P\varphi_n+P\varphi_n-\varphi_n$$

且

$$\|\phi-\varphi_n\|\leqslant c\|(T-T_n)P\|.$$

假设$|\mu^k-\lambda|+\|u^k-\phi\|\leqslant c\|T-T_n\|^{k+1}$成立。于是有等式：

$$\begin{aligned}&(T_n-\lambda_n)(u^{k+1}-\phi)\\&=(T_n-\lambda_n)u^k-(1-P_n)(Tu^k-\mu^{k+1}u^k)-(T_n-\lambda_n)\phi\\&=(T_n-T)(u^k-\varphi)+(\mu^{k+1}-\lambda)u^k+(\lambda-\lambda_n)(u^k-\phi).\end{aligned}$$

则

$$\mu^{k+1}-\lambda=\langle(T-T_n)(u^k-\phi),\varphi_n^*\rangle \tag{5.21}$$

且由于$P_n(u^{k+1}-\phi)=0$，得

$$\begin{aligned}u^{k+1}-\phi&=(\mu^{k+1}-\lambda)S_nu^k+(\lambda-\lambda_n)S_n(u^k-\phi)\\&+S_n(T_n-T)(u^k-\phi)\end{aligned} \tag{5.22}$$

于是可推出：

$$|\mu^{k+1}-\lambda|\leqslant c(|\lambda-\lambda_n|+\|T-T_n\|)\|u^k-\phi\|$$

$$\begin{aligned}\|u^{k+1}-\phi\|&\leqslant c[|\mu^{k+1}-\lambda|+(|\lambda-\lambda_n|+\|T-T_n\|)\|u^k-\phi\|]\\&\leqslant c\|T-T_n\|^{k+2}.\ \square\end{aligned}$$

若$T_n\xrightarrow{cc}T$，(5.20) 的收敛性仍然成立。

命题5.39 若$T_n\xrightarrow{cc}T$，则对固定的充分大的n，

$$\max(|\mu^{2k+1}-\lambda|+\|u^{2k+1}-\phi\|,|\mu^{2k}-\lambda|+\|u^{2k}-\phi\|)\leqslant c\varepsilon_n^k\|(T-T_n)P\|,\ k\geqslant 0,$$

其中$\varepsilon_n=\|(T-T_n)P\|+\|(T-T_n)S_n(T-T_n)\|$。

证明：我们首先注意到，由定义和 (5.22) 知$\mu^{2k+1}-\lambda=\langle T(u^{2k}-\phi),\varphi_n^*\rangle$

$\|u^{2k+1}-\phi\|\leqslant c[|\mu^{2k+1}-\lambda|+|\lambda-\lambda_n|\|u^{2k}-\phi\|+\|u^{2k}-\phi\|]$. 因此$|\mu^{2k+1}-\lambda|\leqslant c\|u^{2k}-\phi\|$且$\|u^{2k+1}-\phi\|\leqslant c\|u^{2k}-\phi\|$.只需证明$|\mu^{2k}-\lambda|+\|u^{2k}-\phi\|\leqslant c\varepsilon_n^k\|(T-T_n)P\|$。显然对$k=0$成立，假设它对任意$k$成立。由 (5.21) 得到$\mu^{2k+2}-\lambda=\langle(T-T_n)(u^{2k+1}-\phi),\varphi_n^*\rangle$且由(5.22)

$$(T-T_n)(u^{2k+1}-\varphi)=(\mu^{2k+1}-\lambda)(T-T_n)S_n(u^{2k}-\phi$$
$$+\phi-\varphi_n)+(\lambda-\lambda_n)(T-T_n)S_n(u^{2k}-\phi)$$
$$+(T-T_n)S_n(T_n-T)(u^{2k}-\phi)。$$

则

$$|\mu^{2k+2}-\lambda|\leqslant c(\|u^{2k}-\phi\|+\|\phi-\varphi_n\|+|\lambda-\lambda_n|+$$
$$\varepsilon_n)\|u^{2k}-\phi\|\leqslant c\varepsilon_n\|u^{2k}-\phi\|$$

再次利用(5.22)并类似地限制$\|u^{2k+2}-\phi\|\leqslant c\varepsilon_n\|u^{2k}-\phi\|$. 由于$T_n\xrightarrow{cc}T$，所以当$n\to\infty$时$\varepsilon_n\to 0$。□

我们可按下面的方法改写(5.20). ϕ是$(T-\lambda)\phi=0$的解，对$(T-z)x-f=0$,(5.20)是(5.11)的自然的模拟. 研究$(T-\lambda)^{-1}$的奇异性是通过讨论约化预解式S_n，即$S=(T-\lambda)^{-1}(1-P)$的一个逼近。

Lin Qun对自伴紧算子和投影法$T_n=\pi_nT$提出一个非常类似于(5.20)的迭代法（Lin Qun,（1981a,1982a）. 它可以写作：

$$\mu^0:=\lambda_n,\quad \mu^{k+1}=\langle Tu^k,\varphi_n^*\rangle,\quad k\geqslant 0 \qquad (5.23)$$
$$u^0:=\varphi_n,\quad u^{k+1}=u^k+\lambda_nS_n(u^k-(1/u^{k+1})Tu_k),k\geqslant 0。$$

利用等式$\lambda_nS_n=P_n-1+S_nT_n$，我们注意到，如同命题5.32，(5.23) 可写成等价形式

$$u^{k+1}=\frac{1}{\mu^{k+1}}Tu^k+S_nT_n\left(u^k-\frac{1}{\mu^{k+1}}Tu^k\right) \qquad (5.24)$$

若令$\hat{u}^k:=(1/\mu^{k+1})Tu^k$，则$u^{k+1}=\hat{u}^k+r^k$，其中$r^k$是$(T_n-\lambda_n)r^k=T_n(u^k-\hat{u}^k)$的唯一解，且使$P_nr^k=0$。若$T_n=\pi_nT$，$r^k$是在$X_n=\pi_nX$内的Galerkin解。这将在第七章讨论有限元法时用到. 注意现在λ_nS_n是

$$\lambda S=\left(\frac{1}{\lambda}T-1\right)^{-1}(1-P)$$

相应于方程$(1-(1/\lambda)T)\phi=0$的逼近。

Lin Qun(1982)还提出了另一种迭代法：

$$\mu^0 = \lambda_n,\ \mu^{k+1} = \langle Tu^k, \varphi_n^* \rangle, \qquad k \geq 0$$
$$u^0 = \varphi_n,\ u^{k+1} = u^k - \Sigma_n^{k+1}(Tu^k - \mu^{k+1}u^k), \qquad k \geq 0 \tag{5.25}$$

这里$\Sigma_n^{k+1} = (T_n - \mu^{k+1})^{-1}(1 - P_n)$。由于要解的方程组随$k$变化，所以计算量将更大。

习题

5.36 考虑本征值问题$\lambda K\varphi = \varphi$，设$\psi$在$X^*$中满足$\langle \varphi, \psi \rangle = 1$。在$X \times \mathbb{C}$上定义非线性算子

$$F: (x, z) \mapsto ((1 - zK)x;\ \langle x, \psi \rangle - 1)$$

验证（φ，λ）是F的零点。由逼近零点$u_0 = (x_0, z_0)$起，写出方程$F(u) = 0$, $u = (x, z)$的Newton 迭代.写出由令导数F'在$z = z_0$固定而得到的较正算法。证明算法(5.23)是由后者的投影及选择$z_0 = \lambda_n$，$x_0 = \varphi_n$，$\psi = \varphi_n^*$所得的结果。

5.37 对迭代法（5.25）建立等式

$$\mu^{k+1} - \lambda = \langle (T - T_n)(u^k - \phi), \varphi_n^* \rangle,$$

$$u^{k+1} - \phi = (\mu^{k+1} - \lambda)\Sigma_n^{k+1}\phi + \Sigma_n^{k+1}(T_n - T)(u^k - \phi).$$

推导出若$\|T - T_n\| \to 0$或$T_n \xrightarrow{cc} T$,则上述序列收敛于λ, ϕ,

5.38 当$\|T - T_n\| \to 0$或$T_n \xrightarrow{cc} T$时，确定迭代(5.23)的收敛性。

5.39 研究将（5.20）应用于拟可分解矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & v^H \\ u & C \end{pmatrix}$$

其中$\|u\|_2\|v\|_2$很小.

我们已经看到当投影法或Nyström 法用于离散算子T时，

迭代法（5.20）对紧积分算子T是收敛的.尽管当$T_n \xrightarrow{cc} T$时，（5.20）的收敛速率可能是慢的，而迭代(5.24)在u^k的剩余用T_n来修匀则是更合理的（关于数值实验见Ahués等（1983a．还可得到另一种类似于Brakhage迭代(5.13）的变形的方法；用$P_n - 1 + S_n T$（λS的另一种逼近）来代替$\lambda_n S_n = P_n - 1 + S_n T_n$，于是$u^k$处的剩余由$T$修匀．从而导出Ahués的迭代法（Ahués等，1982）：

$$\mu^0 = \lambda_n, \mu^{k+1} = \langle Tu^k, \varphi_n^* \rangle, \quad k \geqslant 0,$$

$$u^0 = \varphi_n, \quad u^{k+1} = \frac{1}{\mu^{k+1}} Tu^k + S_n T \left(u^k - \frac{1}{\mu^{k+1}} Tu^k \right), \quad k \geqslant 0. \tag{2.56}$$

命题5.40 若T是紧的并在Γ上$T_n - z \xrightarrow{ss} T - z$，则(5.26)收敛于$\lambda$，$\varphi$，且

$$|\mu^k - \lambda| + \|u^k - \phi\| \leqslant c\|T - T_n)T\|^{k+1}, \qquad k \geqslant 0.$$

证明　首先注意到

$$\|(T - T_n)P\| \leqslant c\|(T - T_n)_{|M}\| \leqslant c\|(T - T_n)T\|.$$

于是对$k = 0$，

$$\mu^1 - \lambda = \langle T(\varphi_n - \varphi), \varphi_n^* \rangle$$

且

$$|\mu^1 - \lambda| + \|u^0 - \phi\| \leqslant c\|(T - T_n)T\|.$$

现在我们假设$|\mu^{k+1} - \lambda| + \|u^k - \phi\| \leqslant c\|(T - T_n)T\|^{k+1}$．显然$|\mu^{k+1} - \lambda| = |\langle T(u^k - \phi), \varphi_n^* \rangle| \leqslant c\|u^k - \phi\|$．于是我们有等式

$$(T_n - \lambda_n)(u^{k+1} - \phi) = (T_n - \lambda_n)\frac{Tu^k}{\mu^{k+1}} + Tu^k - \mu^{k+1}\varphi_n$$

$$+ (P_n - 1)\frac{T^2 u^k}{\mu^{k+1}} - (T_n - \lambda_n)\phi$$

$$= \frac{1}{\mu^{k+1}}(T_n - T)T(u^k - \phi)$$

$$+ \frac{\lambda - \mu^{k+1}}{\mu^{k+1}}(T_n - T)\phi - \lambda\phi + \lambda_n\phi$$

$$+ \frac{1}{\mu^{k+1}} P_n T^2 u^k + Tu^k - \frac{\lambda_n}{\mu^{k+1}} Tu^k - \mu^{k+1}\varphi_n$$

$$- (\lambda - \lambda_n)\phi + \frac{\mu^{k+1} - \lambda_n}{\mu^{k+1}} Tu^k$$

$$= : A.$$

$(\mu^{k+1} - \lambda_n)Tu^k = (\mu^{k+1} - \lambda)Tu^k + (\lambda - \lambda_n)T(u^k - \phi) + (\lambda - \lambda_n)\lambda\phi$,

$$(1 - P_n)A = \frac{1}{\mu^{k+1}}(T_n - T)T(u^k - \phi) + \frac{\lambda - \mu^{k+1}}{\mu^{k+1}}[(T_n - T)\phi$$

$$- Tu^k] + \frac{\lambda - \lambda_n}{\mu^{k+1}}[T(u^k - \phi) + (\lambda - \mu^{k+1})\phi]$$

$$= \frac{1}{\mu^{k+1}}(T_n - T)T(u^k - \phi) + \frac{\mu^{k+1} - \lambda_n}{\mu^{k+1}}T(u^k - \phi)$$

$$+ \frac{\mu^{k+1} - \lambda}{\mu^{k+1}}\lambda\phi.$$

以 S_n 乘之，我们得

$$u^{k+1} - \phi = \frac{1}{\mu^{k+1}}S_n(T_n - T)T(u^k - \phi)$$

$$+ \frac{\mu^{k+1} - \lambda_n}{\mu^{k+1}}S_n T(u^k - \phi) + \frac{\mu^{k+1} - \lambda}{\mu^{k+1}}\lambda S_n(\phi - \varphi_n).$$

从而容易得到结论 $\|u^{k+1} - \phi\| \leqslant c\|(T - T_n)T\|^{k+2}$. □

利用在 $\{\varphi_n\}$ 上的投影 $P_n = \langle \cdot, \varphi_n^* \rangle \varphi_n$，已经定义了迭代（5.20）、（5.24）和（5.26）。如果 $\langle \varphi_n, y \rangle = 1$，也可以利用投影 $Q = \langle \cdot, y \rangle \varphi_n$（参见6.4节）。

在第七章中，将运用一些迭代加细技巧，事实上，我们已经讨论了用有限秩算子 T_n 逼近积分算子并且满足 $T_n \xrightarrow{cc} T$ 或 $\|T_n - T\| \to 0$ 的情形。当 $p = 2$，或 $p = 1$ 时，引理5.33中给出的收敛条件也是满足的。因为投影法和近似求积法中的 T_n 有特殊结构，容易由相应的矩阵算子来计算 $R_n(z)$，P_n 和 S_n（见定理4.3和推论4.4）

正如我们所看到的，积分算子的离散化常常得到满矩阵。这证明简化矩阵形状是必要的，尤其是当计算机的存储配置有限时。当逼近某个（阶为M的）大型矩阵的给定精度的本征元时，这种技术提供了一个计算格式，它只需对 n（$n \ll M$）阶矩阵进行运算。

我们现在转入介绍数值分析中非常有效的一种方法，即所谓迭代亏损较正法。为了解方程 $F(x) = f$，我们计算一个近似方程 $\widetilde{F}(\widetilde{x}) = f$ 的解，这里 F 和 $\widetilde{F}$ 充分接近以保证存在一个压缩映照，使 x 作为由 $\widetilde{x}$ 计算的迭代向量序列的极限。

6.6 迭代亏损较正法的一般框架

我们已经指出 Rayleigh-Schrödinger 级数和在 Stetter（1978）中描述的迭代亏损较正（IDC）法之间的某些联系。现在来详细地讨论这个问题。这里介绍的内容选自 Ahués 等（1982）。

6.6.1 IDC方法

设 F（或G）：$X \to X$是（可能是）非线性算子，定义域为D（或$\mathrm{Dom}G$）。我们考虑方程

$$F(x^*) = 0, \quad x^* \in D \tag{5.27}$$

设$\|\cdot\|_*$是X上的范数，等价于$\|\cdot\|$.对$\rho>0$,定义 $B_* := \{x \in X; \|x - x^*\|_* < \rho\}$。假设$F$定义在$B_*$上。又设能计算一个定向映射$F$，且由下面的定义可知存在逼近逆$G$。

定义 如果满足下述条件：

（ i ） $F(B_*)\subseteq \mathrm{Dom}G$；

（ii） $G(0)\in B_*$；

（iii） $U:=1-G\circ F$关于$\|\cdot\|_*$在B_*上是压缩的.

则G是F的局部逼近逆.

IDC方法在于生成序列：

$$\begin{aligned} x^0 &:= G(0), \\ x^{k+1} &:= G(0)+x^k-G(F(x^k)),\quad k\geqslant 0 \qquad (5.28)\\ &= G(0)+U(x^k) \end{aligned}$$

命题5.41 若G是F的局部逼近逆，则

当$k\to\infty$时，$\|x^k-x^*\|_*\to 0$.

证明　令$V(x):=G(0)+U(x)$，因为 $V(x^*)=G(0)+x^*-G(F(x^*))=x^*$，所以$x^*$是$V$的不动点。对任何$x\in B_*$，

$$\|V(x)-x^*\|_*=\|V(x)-V(x^*)\|_*\leqslant l(U)\|x-x^*\|_*<\rho$$

其中$l(U)<1$是由（iii）定义的Lipschitz常数。因此$V(x)\in B_*$且$V(B_*)\subset B_*$。于是$\|x^k-x^*\|_*<l^k(U)\|x^0-x^*\|_*$。$F$是$B_*$上的单射，所以$x^*$是$F$在$B_*$内的唯一零点。 □

$x^0=G(0)$是x^*的逼近，其亏损（或剩余）为$d^0:=F(x^0)$，误差为：$e^*:=x^*-G(0)=U(x^*)$。e^*由$e^1:=x^1-G(0)=U(x^0)=x^0-G(d^0)$来逼近。迭代这个过程得到IDC方法，这里$F(x^k)$是$x^k$处的亏损.

6.6.2　线性方程

一个有趣的情形是线性方程$(T-z)x=f$，这时F是仿射算子$F(x)=(T-z)x-f$，因为T是线性的，F的局部逼近逆可由$T-z$的逼近逆$\widetilde{G}$导出。事实上，设$\widetilde{G}$使得$\widetilde{U}=1-\widetilde{G}(T-z)$满足$r_\sigma(\widetilde{U})<1$；即：$r_\sigma[\widetilde{G}(T-z)]<1$．于是对在$B_*$内给定的$u$，选择$G(x)=\widetilde{G}x+u$得$U(x)=x-\widetilde{G}(T-$

$z)x+\widetilde{G}f-u$，且使 $U(x)-U(y)=\widetilde{U}(x-y)$；因此$U$关于范数$\|\cdot\|_*$是压缩的，而$\|\cdot\|_*$与$\|\cdot\|$等价，$G$是$F$的逼近逆．相应的IDC方法是

$$x^0=u,\quad x^{k+1}=x^k-\widetilde{G}[(T-z)x^k-f]\qquad k\geqslant 0$$

例5.24 在$X=\mathbb{C}^N$内考虑有唯一解$x^*=A^{-1}b$的线性方程组$AX=b$．假设存在K使得

$$x^*=Kx^*+Hb\quad 且\quad H=(I-K)A^{-1}.$$

令 $F(x)=Ax-b$，$G(x)=Ku+Hb+Hx$，u给定，于是得$U(x)=Kx-Ku$，从而IDC方法为：

$$x^0,\ x^{k+1}=Kx^k+Hb,\qquad k\geqslant 0$$

当且仅当$r_\sigma(K)<1$时，收敛到x^*．U关于范数$\|\cdot\|_*$是压缩的，它（依赖于K）在第二章第4.1节中定义，这里选择ε使$r_\sigma(K)+\varepsilon<1$．Jacobi法可作为这种迭代的例子，Guass-Seidel 法和逐次超松弛法对应于A的分裂：$A=D(L+I+U)$，其中D是A的对角元矩阵，L和U分别为$D^{-1}A$的下三角和上三角元素构成的矩阵．于是$K_J:=-(L+U)$且$Hb=D^{-1}b$，$K_{GS}:=-(I+L)^{-1}U$且$Hb=(I+L)^{-1}D^{-1}b$，及$K_\omega=(I+\omega L)^{-1}((1-\omega)I-\omega U)$，$Hb=\omega(I+\omega L)^{-1}D^{-1}b$，其中$0<\omega<2$．

例5.25 我们重新考虑方程$Ax=b$和它的数值解x'，它是$A'x'=b$的精确解（参见第一章第3.5节）．选择$G(x)=A'^{-1}x=A'^{-1}b$，$Ux=x-A'^{-1}Ax=A'^{-1}Hx$，且$H=A'-A$．由IDC法得

$$x^0=x'=A'^{-1}b,\quad x^{k+1}=x'+A'^{-1}Hx^k,\qquad k\geqslant 0$$

当且仅当$r_\sigma(A'^{-1}H)<1$时，它收敛于x^*．这正是在命题1.13中定义的迭代．

例5.26 现在我们考虑Banach 空间X上的线性方程(5.9)

$(T-z)x=f$，$z\in\rho(T)$，以及它的数值逼近 (5.10) $(T_n-z)x_n=f$，而且我们假设 $T_n-z\xrightarrow{\sigma}T-z$（参见6.2节）设 n 固定且大于 $N(z)$。令 $F(x)=(T-z)x-f$，并选择 $G(x)=R_n(z)x+x_n$，于是得到定义在 D 内的 $U=R_n(z)(T_n-T)$。由IDC法得到序列：

$$
\begin{aligned}
x^0&=x_n=R_n(z)f,\\
x^{k+1}&=x_n+R_n(z)(T_n-T)x^k, \qquad k\geq 0\\
&=x^k-R_n(z)[(T-z)x^k-f]\\
&=\frac{1}{z}(Tx^k-f)-\frac{1}{z}R_n(z)T_n[(T-z)x^k-f].
\end{aligned}
$$

这与 (5.11) 或 (5.12) 定义的相同，对充分大的 n，可以证明 U 在 $\mathscr{L}(\widehat{D})$ 中是压缩的（参见习题5.40）。

习题

5.40 在 $T_n-z\xrightarrow{\sigma}T-z$ 的假设下，证明对固定的充分大的 n，U 在 $\mathscr{L}(\widehat{D})$ 内是压缩的。并导出 $\|x^k-x\|\to 0$。

例5.27 假设 T 是紧的且 $T_n-z\xrightarrow{s}T-z$，$z\in\rho(T)$ 非零，选择 $\widetilde{G}=(1/z)(R_n(z)T-1)$ 蕴涵着 $G(x)=\widetilde{G}x+x_n$，而

$$U(x)-U(y)=(1/z)R_n(z)(T_n-T)T(x-y).$$

由假设，$\|(T_n-T)T\|\to 0$，且对充分大的 n，

$$\frac{1}{|z|}\|R_n(z)(T_n-T)T\|<1.$$

由IDC法得序列：

$$x^0=x^n=R_n(z)f$$

$$x^{k+1}=x^k-\frac{1}{z}(R_n(z)T-1)[(T-z)x^k-f],\quad k\geq 0,$$

这与由（5.13）定义的相同（习题5.30），这里选择T的Nyström逼近做为T_n。其中$(1/z)(R_n(z)T-1)$是$T-z$的逼近逆，它不同于在例（5.26）中考虑的$R_n(z)=(1/z)(R_n(z)T_n-1)$。特别是，用$T$来使剩余光滑化，而不用$T_n$。关于$T-z$的其它逼近逆，在Hemker和Schippers（1981）中连同多重网格法一起考虑了T是积分算子的情形。

6.6.3　本征值问题

我们考虑本征值问题（5.6）$T\varphi=\lambda\varphi$，这里假设T是紧的，λ是非零单本征值。设$\psi\in X^*$给定．满足$\langle\varphi,\psi\rangle\neq 0$，考虑线性算子

$$F: x\mapsto x-\frac{1}{\langle Tx,\ \psi\rangle}Tx$$

（或$H: x\mapsto Tx-\langle Tx,\ \psi\rangle x$），显然，若$\varphi$是由$\langle\varphi,\psi\rangle=1$规范化的，$F(\varphi)=0$（或$H(\varphi)=0$），且由假设$\lambda=\langle T\varphi,\ \psi\rangle$非零。则在$\varphi$附近定义了$F$。可以给出$F$在$\varphi$处的Fréchet导数的简便计算，$(D_\varphi F)x=x-(1/\lambda)Tx+(1/\lambda)\langle Tx,\ \psi\rangle\varphi$，其中$\lambda=\langle T\varphi,\ \psi\rangle$。令

$$A: x\longrightarrow\frac{1}{\lambda}Tx-\frac{1}{\lambda}\langle Tx,\ \psi\rangle\varphi.$$

A是T和秩为1的算子的和，因此A是紧的，且$D_\varphi F=1-A$．于是，若$1-A$是单射，$(D_\varphi F)^{-1}=(1-A)^{-1}\in\mathscr{L}(X)$。假设$(1-A)x=0$，则$(T-\lambda)x=\langle Tx,\ \psi\rangle\phi$。因为$\lambda$是单的，这蕴涵了$\langle Tx,\ \psi\rangle=0$和$x=\alpha\varphi$，$\alpha\in\mathbb{C}$，依次有$\alpha\lambda=0$；$\alpha=0$，且$x=0$。因此$F$在$\varphi$附近是局部双射，且$\varphi$为孤立零点．为了求$F$在$\varphi$附近的逼近逆，我们考虑奇异的非齐次问题

$$\left(1-\frac{1}{\lambda}T\right)x=f,\qquad(5.29)$$

假设λ和φ已知。若$f\in(1-P)X$，（5.29）对仿射流形$\{\alpha\varphi-\lambda Sf;\ \alpha\in\mathbb{C}\}$有解。

注意到由于 $Pf=0$，$\varphi-\lambda Sf=\varphi+(P-\lambda S)f$. 这引导我们定义下述形式的 F 的局部逼近逆

$$G(x):=(P-\lambda S)x+\varphi, \qquad x\in X.$$

命题5.42 如果 ψ 满足 $T^*\psi=\overline{\lambda}\psi$，则 G 是 F 在 φ 附近的局部逼近逆.

证明

$$V(x)=\varphi+U(x)=x-Px+\lambda Sx+\frac{1}{\langle Tx,\ \psi\rangle}PTx$$

$$-\frac{\lambda}{\langle Tx,\ \psi\rangle}STx.$$

计算 Fréchet 导数 $D_\varphi V$：

$$(D_\varphi V)x=x-Px+\lambda Sx+\frac{1}{\lambda}PTx-\frac{1}{\lambda^2}\langle Tx,\psi\rangle PT\varphi$$

$$-\frac{1}{\lambda}\langle Tx,\ \psi\rangle ST\varphi$$

$$=0.$$

V 在 φ 附近是压缩的. □

当然，由于假设 λ，φ 和 ψ 是已知的，所以从数值计算意义上来说 G 是没用的. 但它的意义在于提供了如何定义可计算的逼近逆的指导思想.

例5.28 我们选择

$$G(x):=(P_n-\lambda_nS_n)x+\varphi_n=(1-S_nT_n)x+\varphi_n.$$

于是，

$$U(x)=x+\lambda_nS_n\left(x-\frac{1}{\langle Tx,\varphi_n^*\rangle}Tx\right)-\varphi_n,$$

此时 IDC方法

$$x^0=\varphi_n,\quad x^{k+1}=x^k+\lambda_nS_n\left(x^k-\frac{1}{\langle Tx^k,\varphi_n^*\rangle}Tx^k\right),\quad k\geqslant 0,$$

等价于 Lin Qun 的迭代法（5.23）或（5.24）.

例5.29 $G'(x):=(S_n-(1/\lambda_n)P_n)x+\varphi_n$ 是按（5.20）定义的H的局部逼近逆。不同于线性方程 $(T-z)x=f$ 的情形，由（5.20）定义的本征值问题与在（5.16）中由Rayleigh-Schrödinger 展开$\phi=\Sigma_{k=0}^{\infty}\eta^k$所定义的序列不同。注意到$\varphi^k$满足

$$\varphi^{k+1}=\varphi^k-S_n\left[T\varphi^k-\lambda^1\varphi^k-\sum_{i=1}^{k}\nu^{i+1}\varphi^{k-i}\right],\ k\geqslant 0.$$

例5.30 $\widetilde{G}(x):=(1-S_nT)x+\varphi_n$ 是F的局部逼近，这定义了Ahués迭代（5.26）．在Ahués等（1983b)中已经证明了在$\|T_n-T\|\to 0$（或在λ附近 $T_n-z\xrightarrow{ss}T-z$）的假设下，对充分大的n，G（或$\widetilde{G}$）是F的局部逼近逆。

6.6.4 拟 Newton 法

在形式$H(x):=Tx-\langle Tx,\psi\rangle x=0$下，其中$\psi$仍是$X^*$内的给定向量，满足$\langle\varphi,\psi\rangle=1$，考虑相应于（5.6）的非线性方程。我们希望修改在H上的 Newton 法模型，以便得到数值可行且收敛到φ的迭代法。原始Newton 迭代为

$$x^0,\ x^{k+1}=x^k-(D_{x^k}H)^{-1}H(x^k),\qquad k\geqslant 0$$

且 $(D_xH)u=Tu-\langle Tx,\psi\rangle u-\langle Tu,\psi\rangle x$.

选择$\psi:=\varphi_n^*$。如下的两个例子是从 Ahués（1982）中选来的。

例5.31 分别用φ_n，φ_n^*和T_n代替x，ψ和T来逼近D_xH，则 Newton 法变为有固定斜率J_n的方法（弦法）：$J_nu=(T_n-\lambda_n)u-\langle T_nu,\varphi_n^*\rangle\varphi_n$.因为我们在$(1-P_n)X$内寻求差分$x^{k+1}-x^k$,可限制$J_n$在$(1-P_n)X$上；则$(J_{n\restriction(1-P_n)X})^{-1}(1-P_n)=S_n$。于是定义了迭代

$$x^0=\varphi_n,\ x^{k+1}=x^k-S_nH(x^k)$$

即为（5.20）．

例5.32 Jocobi法可由

$$J(x)u = T_n u - \langle Tx, \varphi_n^* \rangle u - \langle T_n u, \varphi_n^* \rangle \varphi_n$$

来逼近．令$\mu^{k+1} = \langle Tx^k, \varphi_n^* \rangle$，则有

$$J(x^k)u = (T_n - \mu^{k+1})u - \langle T_n u, \varphi_n^* \rangle \varphi_n.$$

如前，可以限制$J(x^k)$在$(1-P_n)X$上，于是，

$$(J(x^k))_{(1-P_n)X})^{-1}(1-P_n) = \underline{\Sigma}_n^{k+1},$$

且迭代

$$x^0 = \varphi_n, \quad x^{k+1} = x^k - \Sigma_n^{k+1} H(x^k)$$

即为（5.25）．

6.6.5 二级多重网格法

多重网格法是IDC方法的另一个例子，例如我们现在要简要介绍的二级多重网格法，如果我们希望在 Banach 空间中解方程$Tx = f$，或它在X_h．($\dim X_h < \infty$)中的离散化网格：

$$T_h x_h = f_h \tag{5.30}$$

参数$h > 0$表示有关网格的直径．为了使记号简便，我们将X_h看成在X_h的给定基下的典范表示．类似地T_h看成与它在给定基下的矩阵表示相同，等等．接着引进一个粗糙的网格，其直径为$h' > h$，随之有相应的离散化$T_{h'}$和两个线性算子p和r．$p: X_{h'} \to X_h$是一个单射延拓，$r: X_h \to X_{h'}$为满射限制．我们假设在粗糙网格上方程$T_{h'} X_{h'} = f_{h'}$的解是可计算的．并设$\widetilde{G}_h = PT_{h'}^{-1} r$是$T_h$的逼近逆，即$r_\sigma(I - pT_{h'}^{-1} r T_h) < 1$，其中$I$表示$X_h$上的恒等算子．则$G_h: x \mapsto \widetilde{G}_h x + \widetilde{G}_h f_h$是$F_h$的逼近逆，IDC方法

$x^0 := PT_{h'}^{-1} r f_h$，$x^{k+1} = x^k - PT_{h'}^{-1} r(T_h x^k - f_h)$，$k > 0$，当$k \to \infty$时收敛到$x_h$．

亏损较正迭代的一步是由松弛形式u^0，$u^{k+1} := Z(u^k) = Ku^k + Hf_h$在$Tx_h = f_h$上的另一种迭代的$\nu$步组成，这里$r_\sigma(K)$

<1. 于是有：

x^0，$x'^k = Z^\nu(x^k)$，$x^{k+1} = x'^k - pT_{h'}^{-1}r(T_h x'^k - f_h)$，. $k \geq 0$，

并当 $r_\sigma[(I - pT_{h'}^{-1}rT_h)K^\nu] < 1$ 时收敛。

适当选择Z，可得到一个比$r_\sigma(K^\nu)$小得多的收敛速率（见Hackbusch，1980b，1981a）。由Z定义的ν步表示多重网格法的光滑化步骤。

现在我们回到本征值问题 $T\varphi = \lambda\varphi$，其中 λ 是单的。引入离散格式：

$$T_h\varphi_h = \lambda_h\varphi_h, \qquad \varphi_h \in X_h \tag{5.31}$$

以及伴随问题

$$T_h^H\psi_h = \overline{\lambda}_h\psi_h. \tag{5.32}$$

与粗糙网格相关的有两个类似于（5.31），（5.32）的本征值问题

$$T_{h'}\varphi_{h'} = \lambda_{h'}\varphi_{h'}, \quad T_{h'}^H\psi_{h'} = \overline{\lambda}_{h'}\psi_{h'}$$

且

$$\|\varphi_{h'}\| = \varphi_{h'}^H\psi_{h'} = 1.$$

认为这些粗糙网格问题是已解出的。此外，假设$\lambda_{h'}$是单的。$P_{h'} = \varphi_{h'}\psi_{h'}^H$是相应的本征投影，而

$$S_{h'} = (T_{h'} - \alpha I)^{-1}(I - P_{h'})$$

因为 α 是λ_h的适当的逼近。注意$S_{h'}$对充分小的h'是明确定义的。（5.31）和（5.32）可利用光滑步骤和较正步骤来解。光滑步骤是对

$$\varphi_h = \varphi_h - \omega_h(T_h - \alpha I)\varphi_h \tag{5.33}$$

和

$$\psi_h = \psi_h - \omega_h(T_h^H - \overline{\alpha} I)\psi_h \tag{5.34}$$

施行ν步Jacobi迭代。Jacobi迭代的初始向量可以是$x^0 = p\varphi_{h'}$和$y^0 = p\psi_{h'}$。可以选择$\lambda_{h'}$或一般的 Ralyeigh 商$\rho(x^k, y^k) := y^{kH}T_hx^k/y^{kH}x^k$作为$\alpha$，这里$x^k$和$y^k$是第$k$次光滑步骤的初始

向量。由这个光滑步骤得到$x_{'}^{k}$和$y_{'}^{k}$。

光滑步骤是在向量 $x_{'}^{k}$ 上添加$-p\varepsilon$，其中 ε 是粗糙网格的解，即：

$$(T_{h'}-aI)\varepsilon=(I-P_{h'})r(T_h x_{'}^{k}-a x_{'}^{k}),$$
$$\psi_{h'}^{H}\varepsilon=0.$$

即，$\varepsilon=S_{h'}r(T_h x_{'}^{k}-a x_{'}^{k})$。相应于（5.34）的向量由添加$-pS_{h'}^{H}r(T_h^H y'^k-\bar{a}y_{'}^{k})$来较正（见Ahués和Chatelin, 1983）。整个过程（包括光滑和较正）为：

$$x'^k=[I-\omega_h(T_h-aI)]^{\nu}x^k,$$
$$x^{k+1}=x_{'}^{k}-pS_h{}'r(T_h x'^k-a x_{'}^{k}),$$
$$(5.35)$$
$$y'^k=[I-\omega_h(T_h^H-\bar{a}I]^{\nu}y^k,$$
$$y^{k+1}=y_{'}^{k}-pS_h^H r(T_h^H y'^k-\bar{a}y_{'}^{k}),$$

并且λ^{k+1}（对本征值λ_h）的修正值是关于T_h的 Rayleigh 商$\rho(x^{k+1},\ y^{k+1})$。Hackbusch（1979）给出当适当选取ν，h和h'时，（5.35）收敛到φ_h和ψ_h的证明。

如果读者仅对求解（5.31）感兴趣，则按下述过程进行。令$F_h(x):=T_h x-(y^H T_h x)x=0$，其中$y$是给定的向量，满足$y^H\varphi_h\neq0$。为了定义较正步骤，考虑 IDC 法

$$\mu^0=\lambda_{h'},\ \mu^{k+1}=y^H T_h x^k,\quad k\geqslant0,$$
$$x^0=P\varphi_{h'},\ x^{k+1}=x^k-pS_{h'}rF_h(x^k),\quad k\geqslant0$$

在实际中，经常使$rp=I$（$X_{h'}$上的恒等映射）。由于$y^H\varphi_h=\psi_{h'}^{H}r\varphi_h$和$\psi_{h'}^{H}rp\varphi_{h'}=\psi_{h'}^{H}\varphi_{h'}=1$，所以$y=r^H\psi_{h'}$是$y$的适当选择。若$p\varphi_{h'}$是$\varphi_h$的适当逼近，则$y^H\varphi_h$非零。

若$rp=I$，则$prpr=pr$，pr是到X_h的维数为$\dim X_{h'}$的子空间$pX_{h'}$上的投影。关于（5.30）的二级多重网格法中，添加到向量x'^k上的较正是在$pX_{h'}$中x'^k处剩余方程

$$T_h x = T_h x'^k - f_h$$

的Galerkin解。类似地，对（5.31）和（5.32）及相应的剩余方程

$$(T_h - aI)x = (I - P_h)(T_h x'^k - a x'^k),$$

$$(T_h^H - \bar{a}I)y = (I - P_h^H)(T_h^H y'^k - \bar{a} y'^k)$$

的解释显然成立。注意在a（或$\bar{a}$）处可能有奇点，但可利用本征投影P_h（或P_h^H）除去。

例5.33 在Chatelin和Miranker（1982a, b）中描述的聚合方法是将二级多重网格法用于矩阵而不需要连续算子离散化的推广。特别是在计算大型矩阵的主本征值时，由幂法得到的单个向量序列的收敛可用聚合/非聚合法在现行向量上一次又一次地施行修正来加速（Chaterlin和Miranker，1983b）。

考虑方形域$\Omega = (0, 1)^2$上的双调和方程$\Delta^2\varphi$，且带有齐次边界条件，即在$\partial\Omega$（Ω的边界）上$\varphi = 0$，$\partial\varphi/\partial n = 0$。我们在图5.6中给出它的第12个本征向量的图形，并用此来结束

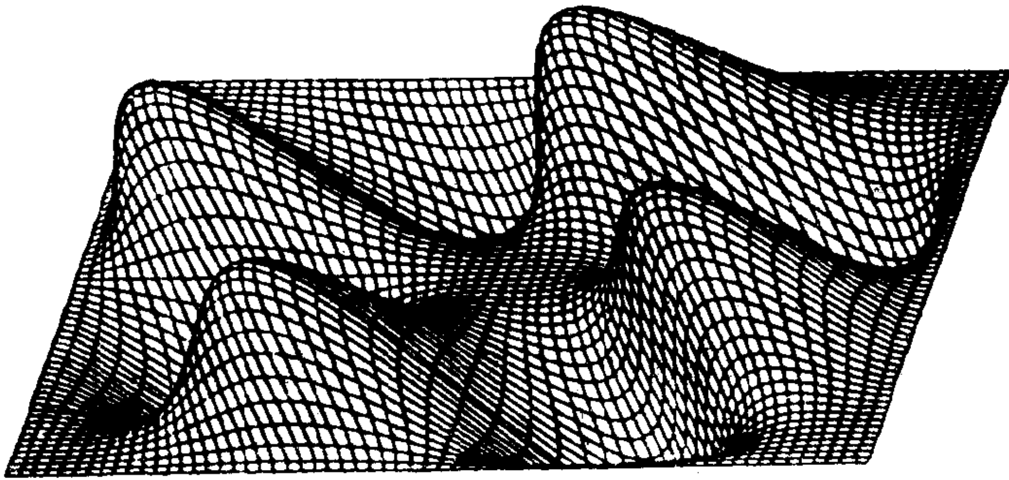


图5.6 由W.Hackbusch教授和G.Hofmann博士提供

本节。Hackbush和Hbfmann（1980）中利用有限元离散化的多重网格法给出了计算。

第六章　本征元的误差界和局部化结果

引　言

我们在相当一般的假设下给出本征元的误差界，即仅假设T的逼近T_n在$Q\sigma(T)$中一点λ的某邻域Δ内强稳定．Γ是隔离开λ并在Δ内部的一条Jordan闭曲线．λ有代数(或几何)重数m（或g）及陡度l，$1\leqslant l\leqslant m$．相伴不变子空间是$M=PX=\mathrm{Ker}(T-\lambda)^{l}$，本征空间是$E=\mathrm{Ker}(T-\lambda)$．

对于充分大的n，在Γ内恰好有T_n的m个本征值$\{\mu_{jn}\}_1^m$（重数计算在内）．在它们之中有K_n个不同的值，记作λ_{in}，并用λ_n表示其中任何一个·若每个λ_{in}有陡度l_{in}, T_n的相应于Γ内的所有本征值的不变子空间是

$$M_n=\bigoplus_{i=1}^{K_n}M_{in}=\bigoplus_{i=1}^{K_n}\mathrm{Ker}(T_n-\lambda_{in})^{l_{in}},$$

当T非自伴时，$\hat{\lambda}_n$是λ的最佳逼近，这里$\hat{\lambda}_n$是T_n在Γ内收敛于λ的本征值的算术平均：

$$\hat{\lambda}_n=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\mu_{jn}.$$

已经详细讨论过投影法的特殊情形以及投影π_n对于得出$\lambda-\hat{\lambda}_n$和$\varphi-\tilde{\varphi}_n$高阶收敛性所起的作用。在有限元法的应用中，如果可能，已用椭圆型投影π_n^e来得出收敛阶。这个例子说明了第四章中给出的有限元法抽象形式是有意义的，在那里

已强调了 π_n^a 的作用。

本章第二部分所讨论的误差界限，当给定一个 x 可以计算 Tx 的值时，它们是可后验计算的。在这些界限中，包含的常数渐近性态问题由局部化结果来回答，这些结果推广了Kato—Temple 不等式。关于 T 的本征元（相应于一个单本征值或一组相近本征值），局部化的结果由 T 的"较小"部分 QTQ 的谱信息得出，其中 Q 是在一个有限维子空间上的已知投影。其证明基于第三章中发展的解析摄动论。作为一个应用，拟三角阵的一组相近本征值得到了局部化。

1. 理论误差界

由闭图象定理，$(T-T_n)P$ 是有界的，且 $\varepsilon_n := \|(T-T_n)P\| \to 0$。由习题6.7知量 ε_n 等价于 $\max(\|(T-T_n)\psi\|;\ \psi\in M,\ \|\psi\|=1)$。注意到若 φ 是 T 的一个本征向量，则 $(T_n-T)\varphi = T_n\varphi-\lambda\varphi$ 是 T_n 在 λ，φ 处算出的余向量；ε_n 就是 M 中所有向量之余向量的极大范数。我们来证明五个导引性的引理。

引理6.1 $P_n \xrightarrow{cc} P$ 蕴涵，对于充分大的 n，$\widetilde{P}_n := P_n{\restriction}_M$（或 $P_{(n)} := P{\restriction}_{M_n}$）是从 M 到 M_n 上（或从 M_n 到 M 上）的双射。

证明　设 $x\in M$，$\|x\|=1$，$x=Px$。对于充分大的 n，有

$$|1-\|P_nx\||=|\|Px\|-\|P_nx\||\leqslant\|(P-P_n)Px\|$$
$$\leqslant\|(P-P_n)P\|\leqslant\frac{1}{2}.$$

于是，对于 $x\in M$，有 $\|P_nx\|\geqslant\frac{1}{2}\|x\|$，即是，$\|\widetilde{P}_n^{-1}\|\leqslant 2$。类似地，设 $x_n\in M_n$，$\|x_n\|=1$，$x_n=P_nx_n$，则

$$|1-\|Px_n\||=|\|P_nx_n\|-\|Px_n\||$$
$$\leqslant\|(P_n-P)P_nx_n\|\leqslant\frac{1}{2}$$

对于充分大的 n 成立，因为 $P_n \xrightarrow{cc} P$ 和 $\|(P_n - P)P_n\| \to 0$.

$$\|Px_n\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_n\| \text{且} \|P_{(n)}^{-1}\| \leqslant 2. \quad \square$$

考虑 $\mathcal{L}(M)$ 中的算子 $F := TP_{\restriction M}$ 和 $G_n = \widetilde{P}_n^{-1} T_n \widetilde{P}_n$. F 有重数为 m 的本征值 λ，而 G_n 有本征值 $\{\mu_{jn}\}_1^m$.

引理6.2 $\lambda - \widehat{\lambda}_n = (1/m)\mathrm{tr}(F - G_n)$ 和 $\|F - G_n\| = O(\varepsilon_n)$.

证明 第一个等式是显然的。对于第二个，我们记 $\|F - G_n\| = \max(\|T - \widetilde{P}_n^{-1} T_n P_n)\psi\|;\ \psi \in M,\ \|\psi\| = 1)$ 和 $(T - \widetilde{P}_n^{-1} T_n P_n)\psi = \widetilde{P}_n^{-1} P_n (T - T_n)\psi$。这证明了第二个等式。 $\square$

引理6.3 设 f 是 z 在 λ 的某邻域内的全纯函数。则有 $(1/m)\,|\mathrm{tr} f(F) - f(G_n)| \leqslant \|f(F) - f(G_n)\| \leqslant c\|F - G_n\|$.

证明 $f(F) - f(G_n)$ 是 Dunford-Taylor 积分

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma f(z)[(F - z)^{-1} - (G_n - z)^{-1}]dz$$

（见Dunford和 Schwartz，1958，第一部分，P.600）。由

$$(F - z)^{-1} - (G_n - z)^{-1} = (F - z)^{-1}(F - G_n)(G_n - z)^{-1}$$

得知

$$\|f(F) - f(G_n)\| \leqslant c\left(\sup_{z \in \Gamma} |f(z)|\ \|(F - z)^{-1}\|\ \|(G_n - z)^{-1}\|\right) \|F - G_n\|. \quad \square$$

引理6.4 下面的恒等式：

$$\varphi - P_n\varphi = S_n(\lambda)(T_n - T)\varphi$$

对于 $\mathrm{Ker}(T - \lambda)$ 中的任一 φ 以及

$$\varphi_n - P\varphi_n = S(\lambda_n)(T - T_n)\varphi_n$$

对于 $\mathrm{Ker}(T_n - \lambda_n)$ 中的任一 φ_n 成立。

证明 我们从恒等式

$$R(z) - R_n(z) = R_n(z)(T_n - T)R(z)$$

$$= R(z)(T_n - T)R_n(z).$$

开始，对于本征向量 φ，有

$$R(z)\varphi = \frac{1}{\lambda - z}\varphi$$

及

$$\varphi - P_n\varphi = \left(\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{R_n(z)}{\lambda - z}dz\right)(T_n - T)\varphi$$

$$= S_n(\lambda)(T_n - T)\varphi,$$

其中$S_n(\lambda)$是 $S_n(z)$ 在 λ 处的值，而 $S_n(z)$ 则是 T_n 关于它在 Γ 内的本征值的约化预解式：$S_n(z) := R_n(z)(1 - P_n)$（参见第二章，第7.7节）。注意到 $(T_n - T)\varphi = T_n\varphi - \lambda\varphi$。类似地，有

$$R_n(z)\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n - z}\varphi_n$$

及

$$P\varphi_n - \varphi_n = \left(\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{R(z)}{\lambda_n - z}dz\right)(T_n - T)\varphi_n$$

$$= S(\lambda_n)(T_n - T)\varphi_n$$

对于 $S(z) := R(z)(1 - P)$；及 $(T - T_n)\varphi_n = T\varphi_n - \lambda_n\varphi_n$。

□

习题

6.1 用

$$1 - P_n = (T_n - \lambda)^{-1}(1 - P_n)(T_n - \lambda),$$

$$1 - P = (T - \lambda_n)^{-1}(1 - P)(T - \lambda_n)$$

给出引理6.4中恒等式的一个直接证明。

6.2 证明

$$\|(1 - P)\psi_n\| \leqslant \|1 - P\| \operatorname{dist}(\psi_n, M) \leqslant c\,\Theta(M, M_n)$$

对M_n中的任一ψ_n，$\|\psi_n\| = 1$，

$$\|(1-P_n)\psi\| \leqslant \|1-P_n\| \operatorname{dist}(\psi, M_n) \leqslant c\,\Theta(M, M_n)$$

对M中的任一ψ.

引理6.5 恒等式

$$(1-P_n)\psi = \sum_{j=1}^{l} S_n^j(\lambda)(T_n - T)(T-\lambda)^{j-1}\psi$$

对M中任何ψ成立。

证明　由于对M中的任何ψ有 $(T-\lambda)^l\psi = 0$；且可写

$$(T_n - \lambda)\psi = (T-\lambda)\psi + (T_n - T)\psi,$$

$$\begin{aligned}
(1-P_n)\psi &= (T_n-\lambda)^{-1}(1-P_n)(T_n-\lambda)\psi \\
&= S_n(\lambda)[(T-\lambda)\psi + (T_n - T)\psi] \\
&= (T_n-\lambda)^{-2}(1-P_n)(T_n-\lambda)(T-\lambda)\psi \\
&\quad + S_n(\lambda)(T_n-T)\psi \\
&= S_n^2(\lambda)(T-\lambda)^2\psi + S_n^2(\lambda)(T_n-T) \\
&\quad (T-\lambda)\psi + S_n(\lambda)(T_n-T)\psi \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

这样的递推可以进行下去，直至达到 $(T-\lambda)^l\psi = 0$为止。 □

习题

6.3 设λ_{in}是T_n在Γ中的不同本征值之一，它的陡度是l_{in}，M_{in}是相伴的不变子空间．证明对于M_{in}中任何的ψ_{in}，有

$$(1-P)\psi_{in} = \sum_{j=1}^{l_{in}} S^j(\lambda_{in})(T-T_n)(T_n-\lambda_{in})^{j-1}\psi_{in}$$

1.1 $\lambda - \widehat{\lambda}_n$和$\Theta(M, M_n)$的界

我们估计这些量关于ε_n的阶.

定理6.6 设T_n是T在Δ内的强稳定逼近算子，则对于充分大的n，下面的量

$$\|(1-P)\psi_n\| \quad 对\ \psi_n \in M_n,\ \|\psi_n\| = 1,$$

$$\|(1-P_n)\psi\| \quad 对\ \psi\in M,$$

$\Theta(M,M_n)$，$\lambda-\hat{\lambda}_n$，及（若 $\lambda\neq 0$），

$$\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\mu_{jn}}\right),$$

都至少是ε_n阶的。

证明　P_n 是一致有界的，所以有

$$\max(\|(1-P)\psi_n\|;\ \psi_n\in M_n,\ \|\psi_n\|=1,$$
$$\|(1-P_n)\psi\|;\ \psi\in M)\leqslant c\Theta(M,M_n)$$

（参见习题6.2）。现在$\Theta(M,M_n)=\max(\delta(M,M_n),\ \delta(M_n,M))$。

我们首先由恒等式

$$(R(z)-R_n(z))P=R_n(z)(T_n-T)R(z)P$$
$$=R_n(z)(T_n-T)PR(z)$$

通过在 Γ 上的积分来界定$\delta(M,\ M_n)\leqslant\|(P-P_n)P\|$。由于 $\dim M_n=\dim M$，且对充分大的 n，$\delta(M,M_n)<1$，因而由命题2.12知有

$$\delta(M_n,M)\leqslant\delta(M,M_n)/(1-\delta(M,M_n))$$

又由引理6.2，$\lambda-\hat{\lambda}_n=O(\varepsilon_n)$ 是显然的。最后一个界限可在引理 6.3 中令$f(z)=\dfrac{1}{z}$得到。　□

1.2 单个的本征值及其本征向量的界限

设 λ_n 是 T_n 在 Γ 内的不同本征值之一，对某些 j，$\lambda_n=\mu_{jn}$，φ_n是相应的本征向量，$\|\varphi_n\|=1$。

定理6.7　设T_n是T在Γ上的强稳定逼近，则对充分大的 n 有

$$\max_j|\lambda-\mu_{jn}|=O(\varepsilon_n^{1/l}),\quad \min_j|\lambda-\mu_{jn}|=O(\varepsilon_n^{g/m}),$$

$$\mathrm{dist}(\varphi_n,\mathrm{Ker}(T-\lambda))=O(\varepsilon_n^{1/l}).$$

证明　关于本征值的结果对矩阵是标准的（见Wilkinson，1965，P.81）。可用于在M的某些基下表示F和G_n的$m\times m$矩阵。

对于本征向量，证明分成两步。

（1）首先设T和T_n在$\mathscr{L}(X)$中。$E=\mathrm{Ker}(T-\lambda)$是有限维的，它有余子空间$W$：$X=E\oplus W$。设$Q$是沿$W$在$E$上的投影。$(1-Q)(T-\lambda)_{\restriction M}$在$W$上是可逆的。设

$$\varphi_n\in\mathrm{Ker}(T_n-\lambda_n),\quad \|\varphi_n\|=1.$$

$$\mathrm{dist}(\varphi_n,\ \mathrm{Ker}(T-\lambda))\leqslant\|(1-Q)\varphi_n\|,$$

对于

$$(1-Q)\varphi_n=[(1-Q)(T-\lambda)_{\restriction W}]^{-1}(1-Q)(T-\lambda)(1-Q)\varphi_n$$

及

$$(T-\lambda)(1-Q)\varphi_n=(T-T_n)\varphi_n+(\lambda_n-\lambda)\varphi_n$$

现在，对X中的任何y有

$$(T-T_n)\varphi_n=(T-T_n)(\varphi_n-y)+(T-T_n)y.$$

可以选y是M中的一个向量$\hat{\psi}_{(n)}$，使得

$$\|\hat{\psi}_{(n)}\|=1,\quad \|\varphi_n-\hat{\psi}_{(n)}\|\leqslant\Theta(M,M_n)\leqslant c\varepsilon_n,$$

其中c是一普通的常数。因而，由$T-T_n$的一致界限，有

$$\|(T-T_n)\varphi_n\|\leqslant c\varepsilon_n.$$

这给出

$$\mathrm{dist}(\varphi_n,\mathrm{Ker}(T-\lambda))\leqslant\|(1-Q)\varphi_n\|\leqslant c(\varepsilon_n+|\lambda_n-\lambda|).$$

（2）现设T，$T_n\in\mathscr{C}(X)$。对于Γ上的给定点z_0，$R(z_0)$和$R_n(z_0)$在$\mathscr{L}(X)$中。它们的本征值是

$$\nu=\frac{1}{\lambda-z_0}\quad 和\quad \nu_n=\frac{1}{\lambda_n-z_0};$$

对应的本征空间是相等的。另一方面，$\{T_n\}$在z_0的稳定性蕴

涵$R_n(z_0)$是一致有界的，且有$(R_n(z_0)-R(z_0))P=R_n(z_0)(T-T_n)R(z_0)P=R_n(z_0)(T-T_n)PR(z_0)$。

证明的第一部分可用于$R_n(z_0)$及$R(z_0)$，且有

$$|\nu-\nu_n|=\left|\frac{1}{\lambda-z_0}-\frac{1}{\lambda_n-z_0}\right|$$

$$=\frac{|\lambda_n-\lambda|}{|\lambda-z_0||\lambda_n-z_0|}. \quad \square$$

习题

6.4 证明交替公式$\lambda-\hat{\lambda}_n=(1/m)\mathrm{tr}P(T-T_n)P_{(n)}^{-1}$ (de Boor-Swartz).

6.5 由$\varepsilon_n^*:=\|(T^*-T_n^*)P^*\|$，证明

$$\lambda-\hat{\lambda}_n=\frac{1}{m}\mathrm{tr}(T-T_n)P+o(\varepsilon_n\varepsilon_n^*)$$

(Osborn)。对于任何这样的紧投影P，验证此结论，由$\mathrm{Im}P\subset\mathrm{Dom}T$，则$\mathrm{tr}TP=\mathrm{tr}PTP$。

6.6 证明$\lambda-\hat{\lambda}_n=(1/m)\mathrm{tr}P_n(T-T_n)\widetilde{P}_n^{-1}$ (Vainnikko)。

6.7 证明当$n\to\infty$时，量$\|(T-T_n)_{\restriction M}\|$与$\|(T-T_n)P\|$是等价的。

6.8 对于$1\leqslant j\leqslant k\leqslant l\leqslant m$，定义$E_k:=\mathrm{Ker}(T-\lambda)^k$和$E_{nj}:=\mathrm{Ker}(T_n-\lambda_n)^j$。关于$\varphi_{nj}\in E_{nj},\|\varphi_{nj}\|=1$，证明$\mathrm{dist}(\varphi_{nj},E_k)=O(\varepsilon_n^{(k-j+1)/l})$。

6.9 对于由$x_n=R_n(z)f$逼近的解$x=R(z)f$，证明

$$x-x_n=R_n(z)(T_n-T)x$$

且$(T_n-T)x=(T_n-z)x-f$,

或

$$x-x_n=R(z)(T_n-T)x_n$$

且$(T_n-T)x_n=f-(T-z)x_n$。

导出先验与后验误差界。对条件数进行评述。

6.10 证明恒等式

$$(T_n - T)x = (T_n - z)(x - x_n);$$

$$(T_n - T)x_n = (T - z)(x - x_n);$$

$$(1 - P_n)(T_n - T)\varphi = (T_n - \lambda)(1 - P_n)\varphi;$$

$$(1 - P)(T - T_n)\varphi_n = (T - \lambda_n)(1 - P)\varphi_n.$$

命题6.8 在定理6.7的假设下，且当T，$T_n \in \mathscr{L}(X)$时，$\Theta(M, M_n)$的收敛速率对于$\mathrm{Ker}(T-\lambda)$中任一φ的投影余量范数$\|(1-P_n)(T-T_n)\varphi\|$是下方有界的。

证明 由定理6.6和习题6.10，对$\mathrm{Ker}(T-\lambda)$中的任一φ，得到

$$\|(1-P_n)(T_n-T)\varphi\| \leqslant c\|(1-P_n)\varphi\| \leqslant c\,\Theta(M, M_n),$$

其中c是一个普通的常数。 □

投影余量具有ε_n的阶，除非$(T_n - T)\varphi$在$M_n = P_nX$附近。这一结果应该联系到下界$\|x - x_n\| \geqslant c\|(T_n - T)x\|$，后者在同一假设下对于解$x$是成立的。

1.3 文献注释

Vainikko (1967a, b) 已对Galerkin法及摄动的Galerkin法给出了紧算子的本征元的误差界（也见Krasnoselskii等，1972）。关于Nyström法的误差界在Anselone (1971) 和Atkinson (1975) 中给出。对于闭算子，在强稳定的一般假设下，误差界在Chatelin和Lemordant (1978) 以及Chatelin (1979) 中给出。

在一致收敛或集体紧收敛的假设下，Bramble和Osborn (1973) 以及Osborn (1975) 对于紧算子引入了算术平均$\hat{\lambda}_n$。对于闭算子，有关离散正则收敛假设下的更一般的框架，可参看Grigorieff (1975b)。

从实用观点看，de Boor和Swartz (1981a) 对于常微分

方程重本征值（具有陡度$l>1$）用配置法逼近做过精细的数值研究。

2. 投影法

我们已经证明，一般说来，$\lambda-\hat{\lambda}_n$及$\Theta(M,M_n)$至少具有ε_n的阶。存在着$\lambda-\hat{\lambda}_n$具有高于ε_n的阶的情形。投影法将提供一个基本的例子。现在我们就来研究它。

设$\{\pi_n\}$是从X到X_n上且使$\pi_n\xrightarrow{p}1$的投影序列。用$T_n=\pi_nT$逼近算子T。因而方程

$$T\varphi=\lambda\varphi,\quad 0\neq\varphi\in X, \tag{6.1}$$

在X_n中由

$$\pi_nT\varphi_n=\lambda_n\varphi_n,\quad 0\neq\varphi_n\in X_n \tag{6.2}$$

逼近。

2.1 余量

对于本征向量φ，余向量$(T-T_n)\varphi$等于

$$(1-\pi_n)T\varphi=\lambda(1-\pi_n)\varphi.$$

更一般地，

$$(T-T_n)P=(1-\pi_n)TP=(1-\pi_n)PTP.$$

我们知道，对X中任一x，我们已在第四章中引入了量$\delta_n(x)=\text{dist}(x,X_n)=\|x\|\delta(\{x\},X_n)$，它满足关系

$$\delta_n(x)\leqslant\|(1-\pi_n)x\|\leqslant(1+\|\pi_n\|)\delta_n(x).$$

$\delta_n(x)$表示当x由子空间X_n的元逼近时的最小可能误差.

我们回顾定义$\delta(M,X_n)=\sup(\text{dist}(\psi,X_n);\ \psi\in M,\ \|\psi\|=1)$.

引理6.9 对投影法$T_n=\pi_nT$,

$$\varepsilon_n=\|(1-\pi_n)TP\|\leqslant c\delta(M,X_n).$$

证明 由$\|(1-\pi_n)TP\|\leqslant\|TP\|\|(1-\pi_n)P\|$，这是显然的。 □

引理6.10 来自逼近（6.2）中的$\lambda-\hat{\lambda}_n$，$\|(1-P)\psi_n\|$对于$\psi_n\in M_n$及$\Theta(M,M_n)$当$\lambda\neq 0$时，其误差界可由$\pi_n T$及$\pi_n T\pi_n$给出。

证明 设Γ是围绕λ而不包围0的一条Jordan曲线。$T_n^P=\pi_n T$及$T_n^G=\pi_n T\pi_n$在Γ内有相同的本征值及相应的同样的本征向量。而且，有$\mathscr{M}_n=M_n^G=M_n^P$（见习题4.25及4.29）。对于$|\lambda-\mu_{jn}|$，$j=1,\cdots,m$及$\text{dist}(\varphi_n,\text{Ker}(T-\lambda))$同样的结果显然也成立。 □

因而本征元的误差界能用$\delta(M,X_n)$表示（参看定理6.6及6.7）。估计误差问题化为逼近论的问题：估计M中的函数ψ及X中子空间X_n之间的距离$\delta_n(\psi)$。这个距离依赖于M的不变向量的光滑性及子空间X_n的可逼近性。

习题

6.11 考虑由X_n、Y_n定义的Petrov法（见第四章）：

$$\pi_n(T-\lambda_n)\varphi_n=0,\qquad \varphi_n\in X_n,$$

其中π_n是Y_n上的投影。证明，在命题4.8的假设下，本征元的误差可用$\delta((K-\alpha)^{-1}M,Y_n)$或$\delta(M,X_n)$来表示。

因为对于投影法，$(T-T_n)\varphi$是和$(1-\pi_n)\varphi$成比例的，$(T-T_n)\varphi$位于X_n之外，因而在M_n之外。于是对于$\Theta(M,M_n)$，阶ε_n是最佳的。现在来研究$\lambda-\hat{\lambda}_n$的阶.

2.2 $\hat{\lambda}_n$的超收敛

除了在X中有$\pi_n\xrightarrow{p}1$外，又设在M^*上有$\pi_n^*\xrightarrow{p}1$，其中M^*是T^*的相应于$\bar{\lambda}$的不变子空间。定义$\alpha_n:=\|(1-\pi_n)P\|$，$\alpha_n^*:=\|(1-\pi_n^*)P^*\|$.

定理6.11 设 $\pi_n \xrightarrow{p} 1$，在M^*上有 $\pi_n^* \xrightarrow{p} 1$，且 $\{\pi_n T\}$ 是 T 在 Δ 上的强稳定逼近，则对于充分大的 n，有下面的收敛速率：

$$|\lambda - \hat{\lambda}_n| = O(a_n a_n^*),$$

$$\left|\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\mu_{jn}}\right)\right| = O(a_n a_n^*), \qquad \lambda \neq 0 .$$

证明 λ（或 μ_{jn}）是 $T|_M$（或 $T_n|_{M_n}$）的本征值。在基 $\{x_i\}_1^m$和$\{x_i^*\}_1^m$下，$T|_M$ 用矩阵 A 表示，其系数为 $a_{ij} = \langle Tx_j, x_i^*\rangle$。对于充分大的 n，$P_{(n)} = P|_{M_n}$是双射，令$x_{jn} := P_{(n)}^{-1} x_j$，则 $Px_{jn} = x_j$。显然有 $\langle x_{in}, x_j^*\rangle = \langle Px_{in}, x_j^*\rangle = \delta_{ij}$；因而在基$\{x_{in}\}_1^m$及$\{x_i^*\}_1^m$下，$T_n|_{M_n}$ 用矩阵 B_n表示，其系数为$b_{ij}^n = \langle T_n x_{jn}, x_i^*\rangle$。注意到$a_{ij} = \langle TPx_{jn}, x_i^*\rangle = \langle Tx_{jn}, x_i^*\rangle$，所以有

$$\begin{aligned} a_{ij} - b_{ij}^n &= \langle (T - T_n)x_{jn}, x_i^*\rangle \quad \text{对于 } i, j = 1, \cdots, m. \\ &= \langle (T - T_n)x_j, x_i^*\rangle \\ &\quad + \langle (T - T_n)(P_{(n)}^{-1}P - P)x_j, x_i^*\rangle. \end{aligned}$$

于是 $\|A - B_n\| \leqslant c \max_{i,j} |\langle (T - T_n)P_{(n)}^{-1}x_j, x_i^*\rangle|$。

特别令T_n为$\pi_n T$。$P_{(n)}^{-1}P$（或 P）是沿（$1-P)X$在M_n（或 M）上的投影。由引理2.16及定理6.6，有

$$\|P_{(n)}^{-1}P - P\| \leqslant c\Theta(M, M_n) \leqslant c\|(1 - \pi_n)TP\| \leqslant c a_n .$$

而且$\|A - B\| \leqslant c a_n a_n^*$。因为 $z \mapsto z^{-1}$在 $\lambda \neq 0$ 的邻近是全纯的，所求结果由引理6.2和6.3得出。□

习题

6.12 证明 $\max_j|\lambda-\mu_{jn}|^l=O(\alpha_n\alpha_n^*)$，$\min_j|\lambda-\mu_{jn}|^m=O[(\alpha_n\alpha_n^*)^g]$，且有

$$\operatorname{dist}(\varphi_n,\operatorname{Ker}(T-\lambda))\leqslant c\max(\alpha_n,(\alpha_n\alpha_n^*)^{1/l}).$$

6.13 利用习题 6.5 直接建立$|\lambda-\hat{\lambda}_n|=O(\alpha_n\alpha_n^*)$.

T（或T^{-1}）是否有紧性对定理6．11中的收敛速率没有影响．因而，对于Galerkin逼近．在离散紧收敛(参见Desloux等1978b；Mills1979b）或强稳定，或正则的假设（Chatelin 1979）下，收敛速率还能保持．

我们可以看到，为了得到误差界，并不需要条件$\pi_n^*\xrightarrow{P}1$在M^*上成立，但是如果在M^*上π_n^*确实趋于1，则有$\alpha_n^*\longrightarrow 0$，且$\lambda-\lambda_n$具有比$\Theta(M,M_n)$更高的阶。

如我们将看到的，α_n^*和α_n具有相同的阶常是足够的，当$\lambda-\hat{\lambda}_n$相比于$\Theta(M,M_n)$的阶α_n具有α_n^2阶时，通常称$\hat{\lambda}_n$是超收敛的．正如我们所知，$\operatorname{dist}(\varphi_n,M)$的阶$\alpha_n$是不能改善的，但是，若考虑$\lambda_n\neq 0$时，迭代本征向量$\tilde{\varphi}_n=(1/\lambda_n)T\varphi_n\in X$，则如我们现在看到的，可能有$\operatorname{dist}(\tilde{\varphi}_n,M)=o(\alpha_n)$。计算$\tilde{\varphi}_n$的代价已在第四章中讨论了。

2.3 迭代本征向量$\tilde{\phi}_n$的超收敛

当T是紧的,假设$\lambda_n\neq 0$不再是一种限制：$\lambda\in Q\delta(T)$的假设蕴函了$\lambda\neq 0$。所以对于充分大的n，$\lambda_n\neq 0$是成立的。

命题6.12 设$\pi_n\xrightarrow{P}1$且T是紧的，则对充分大的n有

$$\operatorname{dist}(\tilde{\varphi}_n,M)\leqslant c\|T(1-\pi_n)\|\alpha_n.$$

证明 我们知道$\tilde{\varphi}_n$是$T_n^S=T\pi_n$的相应于λ_n的一个本征向

量．注意到若$\|\varphi_n\|=1$，$\|\widetilde{\varphi}_n\|\leqslant\|T\|/|\lambda_n|$关于$n$是一致有界的．则由定理6.6有

$$\operatorname{dist}(\widetilde{\varphi}_n, M)\leqslant c\|T(1-\pi_n)P\|\leqslant c\|T(1-\pi_n)\|\|(1-\pi_n)P\|.$$

□

由于T^*是紧的，故当$\pi_n^*\xrightarrow{p}1$时，$\|(1-\pi_n^*)T^*\|=\|T(1-\pi_n)\|$收敛于0．然而，这一收敛可能是缓慢的，除非对$T$和$\pi_n$加上某些限制．$\pi_n^*\not\to 1$的情形在Kulkarni和Limaye（1983a）中研究过．

例6.1 我们考虑在$X=L^2(a, b)$中由

$$Tx=\int_b^a k(\cdot, s)x(s)ds$$

定义的积分算子T．设$\Delta=\{t_i\}_0^n$是$[a, b]$的严格分划，$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$．令$\mathbb{P}_{r,\Delta}$表示这样的函数集合，它们在各个$\Delta_i:=[t_{i-1}, t_i)$，$i=1, 2, \cdots, n$上化为次数低于$r+1$的多项式．又设π_n是$\mathbb{P}_{r,\Delta}$上的正交投影．若$h:=\max_i(t_i-t_{i-1})\to 0$，$\pi_n\xrightarrow{p}1$，且对于$C^{r+1}(a,b)$中的$x$，$\delta_n(x)=\|(1-\pi_n)x\|_2=O(h^{r+1})$．设$k\in C^{r+1}([a, b]\times[a, b])$．于是$M$中的任何不变向量在$C^{r+1}(a, b)$中，且$\operatorname{dist}_2(\varphi_n, M)=O(h^{r+1})$．在$k$的光滑性假设下，阶$h^{2r+2}$能随$\widetilde{\varphi}_n$达到．对于$[a, b]$中的$t$，定义$k_t:=k(t, \cdot)$．于是对$M$中的任一$\psi$，都有

$$\begin{aligned}[T(1-\pi_n)\psi](t)&=\int_a^b k(t,s)[(1-\pi_n)\psi](s)\,ds\\&=((1-\pi_n)\psi, \overline{k}_t)\\&=((1-\pi_n)\psi, (1-\pi_n)\overline{k}_t),\end{aligned}$$

其中（·，·）是L^2-内积，且$\overline{k}_t$表示$a\leqslant s\leqslant b$上的函数

$s \mapsto k_t(s)$. 所以有

$$\|T(1-\pi_n)\psi\|_2 \leqslant \|T(1-\pi_n)\psi\|_\infty \leqslant \left(\sup_{t\in[a,b]}\|(1-\pi_n)k_t\|_2\right)$$

$\|(1-\pi_n)\psi\|_2 \leqslant ch^{2r+2}$甚至还能证明, $\text{dist}_\infty(\widetilde{\varphi}_n, M) = O(h^{2r+2})$, 其中 dist_∞ 是关于最大范数$\|\cdot\|_\infty$的距离（第七章）. 称$\widetilde{\varphi}_n$是整体超收收敛的，因为它在$[a, b]$中所有的点 t 处都是超收敛的。若核不是充分光滑的，则$\widetilde{\phi}_n$不再是整体超收敛的了。它可能在$[a,b]$中的一些能区别的集合上是超收敛的(见第七章).
□

习题

6.14 考虑例6.1中的方程$(T-z)x=f$.证明若k与f在C^{r+1}中且$\widetilde{x}_n=(1/z)(Tx_n-f)$。有

$$\|x-\widetilde{x}_n\|_2 \leqslant ch^{2r+2}$$

(Chandler).

6.15 作出对$\|\phi-u^1\|$的估计，其中$u^1=\widetilde{\varphi}_n+r^0$在第五章中由关系（5.24）定义. 何时$u^1$改进$\widetilde{\varphi}_n$?

2.4 文献注释

$\lambda-\hat{\lambda}_n$的各种迹的公式解释了$\hat{\lambda}_n$较高（如果可能）的精确度：$\lambda-\hat{\lambda}_n$分别表示为X及X^*中的两个向量的数积，其中之一具有余量范数的阶,一般说来, $\lambda-\hat{\lambda}_n$具有这一余量的阶；当两个向量近乎正交时，它有较高的阶。

Osborn（1975）对有限元法使用过习题6.5中给出的迹的公式；Vainikko（1978b）将习题6.6中的公式用于有限差分法；习题6.4中的公式（即定理6.11的证明中曾用到的）在Boor及Swartz（1980）中用于在Gauss点的配置法。

Sloan（1976b）首先注意到了迭代本征向量对于投影法

可能的超收敛性．对于使得$\pi_n^* \xrightarrow{p} 1$的投影，犹如逐段多项式插值在Gauss点一样也能得到超收敛性[Boor和Swartz(1981b)中考虑了更一般的投影]．我们将在第七章中更详细地论述这一问题．

对于近似积分法，在φ_n^F和$\varphi_n^N=(1/\lambda_n)T_n^N\varphi_n^F$之间存在一种类似的关系，但是没有证明出理论上的结果．甚至当核不是光滑时也存在数值的例证表明，φ_n^N也能改进φ_n^F（参看第4.4节的数值实验．）

3. 一个例子：有限元法

3.1 协调有限元法

考虑在第四章第8.2节中由

$$a(u,\ v)=\lambda(u,\ v)_H,\quad \forall v\in V \tag{6.3}$$

所定义本征值的弱形式，其中$V\subset H$，嵌入是连续的，但不必是紧的．a连续，且在$V\times V$上是强制的。算子A：$H\longrightarrow V$及$B:=A_{|V}:V\to V$是在第四章中定义的．我们在V中考虑问题（6.3）：

$$\lambda Bu=u,\quad 0\neq u\in V$$

设$1/\lambda\in Q\sigma(B)$．用P表示B相应于$1/\lambda$的谱投影．设$\{V_n\}$是V的有限维子空间的一个序列，且设π_n^a是V_n上的a投影．

在V_n中（6.3）由

$$a(u_n,\ v_n)=\lambda(u_n,\ v_n)_H,\ 对V_n中所有的v_n \tag{6.4}$$

逼近，这等价于

$$\lambda_n B_n u_n=u_n,\quad 0\neq u_n\in V_n,\quad 且B_n=\pi_n^a B.$$

下标V指明所考虑的范数是$\|\cdot\|_V$．关于a的强制性和连续的假设，依据引理4.25保证对于V中的每一个v，有

$$\max(\|(1-\pi_n^a)v\|_V,\ \|(1-\pi_n^{a\times})v\|_V)\leqslant c\ \mathrm{dist}_V(v\cdot V_n).$$

我们定义$\delta_n := \delta_V(M, V_n) = \sup(\text{dist}_V(\psi, V_n); \psi \in M, \|\psi\| = 1)$（或$\delta_n^\times = \delta_V(M^\times, V_n)$），其中$M$是$B$相应于$1/\lambda$的不变子空间（或$M^\times$是$a$伴随算子$B^\times$相应于$1/\overline{\lambda}$的不变子空间）.

定理6.13 设B_n是B的一个强稳定逼近，则对于充分大的n，能够达到下面的收敛速率：

$$|\lambda - \widehat{\lambda}_n| = O(\delta_n \delta_n^\times), \quad \Theta_V(M, M_n) = O(\delta_n).$$

证明 这是定理6.11在V中的一个直接的应用，其中伴随性和V中的投影的概念是相关于强制的半双线性形式a的. □

误差$\Theta_V(M, M_n)$的估计问题依照习题6.16与估计$\|u - u_n\|_V$的问题是同样的.

习题

6.16 证明方程$a(u, v) = (f, v)_H$（对V中所有的v）在V_n中近似解u_n的误差界是$\|u - u_n\|_V \leqslant c\delta_n(u)$. 比较$\delta_n(u)$与$\delta_V(M, V_n)$.

6.17 设a是Hermite的，$1/\lambda \in P\sigma(B)$是B的本征值，不限制它是孤立的或重数有限的。$M = \text{Ker}(B - 1/\lambda)$. 证明

$$\text{dist}(1/\lambda, \quad \sigma(\widetilde{B}_n)) \leqslant c \ \delta_V(M, V_n), \text{ 对于}$$

$$\widetilde{B}_n = \pi_n^a B \pi_n^a.$$

6.18 给出第四章例4.25中定义的广义本征值问题的误差界.

例6.2 设Ω是$\mathbb{R}^N$中带有光滑边界的一个有界区域. 我们令$H = L^2(\Omega)$，$V = H_0^1(\Omega)$，且对于第四章第4.13节的

$$a(u, v) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \partial_i u \partial_j \overline{v} + a_0 u \overline{v} \right] dt$$

考虑问题（6.3）. 设h是收敛于0的正参数. 我们选择类$\mathring{S}_{1,h}$，$k \geqslant 2$中的一个族$\{V_h\}$（见Osborn，1975），它满足

下述条件

（i） $V_h C H_0^1(\Omega)$,

（ii） $\inf_{x\in V_h}(\|v-x\|_H+h\|v-x\|_V)\leqslant ch^t\|v\|_t$ 对于 $H^t(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)(1\leqslant t\leqslant k)$中所有的$h$和$v$都成立，这里$\|\cdot\|_t$是$H^t$的范数。

由条件（ii）得出

$$\text{dist}_V(v,\ V_h)\leqslant ch^{k-1}\quad \text{对}\ v\in H^k(\Omega)。\qquad (6.5)$$

对于a的假设保证了$M=PV$和$M^\times=P^\times V$的元素在$H^t(\Omega)$内，$t\geqslant 0$.我们已经得到结论

$$|\lambda-\hat{\lambda}_h|=O(h^{2k-2}),\quad \Theta_V(M,\ M_h)=O(h^{k-1})。$$

我们由（ii）得出相对于L^2范数的间隙

$$\Theta_H(M,\ M_h)=O(h^k)。$$

这些估计在 Bramble 和 Osborn(1973) 以及在 Osborn (1975)内给出。在这些论文中问题的叙述宁可选择在H中而不在V中（参看例6.3）。为了得出（6.5）而加在V_h上的条件，读者可见Ciarlet（1978）中的叙述。

对于Dirichlet问题，有时难于构成满足条件（i）的族$\{V_h\}$，因为要求这些函数在边界各$\partial\Omega$上等于零。然而，为了绕过这个困难，一些方法已经发展起来了，诸如Bramble和Schatz的最小二乘法（1970），Nitsche的方法(1970—1971)，以及Babuska的Lagrange乘数法（1973）。

所有这些方法都遵从下面例子的途径。

例6.3 我们再来考虑（6.3），但现在是在H中考虑它。$\|\cdot\|$表示$\|\cdot\|_H$。

$$\lambda Au=u,\quad 0\neq u\in H。$$

若假设V到H内的嵌入是紧的，A是紧的，且（6.4）定义了逼近$A_h:H\to H$，使得$\|A_h-A\|\to 0$。设A'和A_h'分别是A和

A_h的（关于H中内积的）伴随算子．M和M'分别是A和A'的不变子空间．于是，应用习题6.5，易于证明

$$|\lambda-\hat{\lambda}_h|\leqslant c\left[\max_{\substack{\psi\in M,\psi^*\in M'\\ \|\psi\|=\|\psi^*\|=1}}\langle(A-A_h)\psi,\psi^*\rangle+\|(A-A_h)_{\restriction M}\|\right.$$

$$\left.\|(A'-A'_h)_{\restriction M'}\|\right],$$

$$\Theta(M,\ M_h)\leqslant c\|(A-A_h)_{\restriction M}\|.$$

注意到在这一讨论中，只用到条件$\|A_h-A\|=\|A'_h-A'\|\to 0$．至于有限元法实际上是$A$在$V$内的一种投影法这一事实只是隐含地用于界定第一项$\langle(A-A_h)\psi,\ \psi^*\rangle$（见Osborn1975）。

现在来考虑第四章例4.26中定义的问题，它比（6.3）更为一般化。H_1及H_2是两个复Hilbert空间，其范数分别是$\|\cdot\|_1$及$\|\cdot\|_2$．设给出了从$H_1\times H_2$到$\mathbb{C}$内的两个连续的半双线性形式a与b，使得

$$\inf_{\substack{\|u\|_1=1\\ u\in H_1}}\sup_{\substack{\|v\|_2=1\\ v\in H_2}}|a(u,\ v)|\geqslant\alpha>0$$

$$\sup_{\substack{\|u\|_1=1\\ u\in H_1}}|a(u,\ v)|>0\text{对}H_2\text{中所有的}v\neq 0\tag{6.6}$$

问题：

求$\lambda\in\mathbb{C}$，$0\neq u\in H_1$ 使得 $a(u,v)=\lambda b(u,v)$ 对所有的 $v\in H_2$ (6.7)

等价于

$$\lambda Tu=u,\quad 0\neq u\in H_1,$$

其中$T\in\mathscr{L}(H_1)$已在例4.26中定义，如同a伴算子$T^\times\in\mathscr{L}(H_2)$一样．我们设$1/\lambda\in Q\sigma(T)$．

设已给出有限维子空间的两个族，$\{S_{1h}\}$与$\{S_{2h}\}$分别在H_1与H_2中．（6.7）由以下的问题逼近

求$\lambda_n \in \mathbb{C}$，$0 \neq u_h \in S_{1h}$使得 (6.8)

$$a(u_h, v_h) = \lambda_h b(u_h, v_h) \quad 对 S_{2h} 中的所有 v_h.$$

关于（6.8），我们设

$$\inf_{\substack{u_h \in S_{1n} \\ \|u_h\|_1 = 1}} \sup_{\substack{v_h \in S_{2n} \\ \|v_h\|_2 = 1}} |a(u_h, v_h)| \geqslant \alpha > 0,$$

(6.9)

$$\sup_{\substack{u_h \in S_{1h} \\ \|u_n\|_1 = 1}} |a(u_h, v_h)| > 0 \ 对 S_{2h} 中所有的 v_h \neq 0$$

和所有的h。

在假设（6.6）和（6.9）之下，存在唯一确定的投影$\pi_h^a: H_1 \to S_{1h}$和$\pi_h^{a\times}: H_2 \to S_{2h}$，使得

$\|(1-\pi_h^a)u\|_1 \leqslant c\,\mathrm{dtis}_1(u, S_{1h})$对$H_1$中所有的$u$(见习题4.81).

我们定义$\delta_h := \delta_1(M, S_{1h}), \delta_h^\times := \max_{v \in M^\times} \|(1-\pi_h^{a\times})v\|_2$.

命题6.14 除假设（6.6）和（6.9）之外，还设，对于H_1中的任何u，$\mathrm{dist}_1(u, S_{1h}) \to 0$，且设$\pi_h^a T$是$T$在$1/\lambda$的一个邻域内的强稳定逼近，则有

$$\lambda - \hat{\lambda}_h = O(\delta_h \delta_h^\times), \Theta(M, M_h) = O(\delta_h).$$

证明 这仍是定理6.11的一个应用，把它留给读者去作.

注意$\delta_h^\times$可以趋向也可以不趋向于0。□

习题

6.19 证明（6.6）蕴涵

$$\inf_{\substack{\|v\|_2 = 1 \\ v \in H_2}} \sup_{\substack{\|u\|_1 = 1 \\ u \in H_1}} |a(u,v)| > 0.$$

6.20 设$N = \dim S_{1h} = \dim S_{2h}$，且令$\{e_i^h\}_1^N$（或$\{f_i^h\}_1^N$）

是S_{1h}（或S_{2h}）的基。证明（6.8）等价于$N\times N$广义的矩阵本征值问题

$$\widetilde{A}^h q_h = \lambda_h \widetilde{B}^h q_h,$$

其中

$$q_h = (q_i^h)_1^N,\quad u_h = \sum_{i=1}^N q_i^h e_i^h,\quad (\widetilde{A}^h)_{ij} = a(e_j^h, f_i^h)$$

和

$$(\widetilde{B}^h)_{ij} = b(e_j^h, f_i^h).$$

证明在假设（6.9）之下，$\widetilde{A}^h$是可逆的.

例6.4 上面的抽象结果在Mills（1979b）用于奇异的Weyl—Stone本征值问题的本征函数数值逼近的研究。算子T是非紧的，而且逼近T_h满足$\|(T-T_h)|_{S_{1h}}\|_1\to 0$。这是一种离散紧收敛。

例6.5 在Mills（1979c，1980）中，这结果被推广于自反Banach空间，且附有在自伴情形下，对可能有无限重数的本征值的应用。

例6.6 上述的抽象框架也在Kolata（1979）中用于研究Lagrange乘数法，并在Mercier等（1981）中用于混合法及杂交法。在这两种情形中，对T作了紧性的假设。

3.2 非协调有限元方法

我们考虑用在例4.27中定义的方法逼近例4.25中定义的广义本征值问题．我们已在第四章中解释了用投影π_n^a进行讨论的困难性。若假设$\|A-A_n\|_H\to 0$（因而A是紧的），则在H中类似于例6.3中给出的一个界限容易建立起来。设A'，A'_n：$H\to V$由下述关系

$$a(v, A'f) = b(v, f)\quad \forall v\in V,$$

$$a(v_n,\ A'_n f)=b(v_n,f)\quad \forall v_n\in V_n$$

来定义($f\in H$)。设$1/\lambda$是A的本征值，$1/\bar{\lambda}$是A'的本征值，而且谱投影$P'=(-1/2i\pi)\int_\Gamma (A'-z)^{-1}dz$，和不变子空间$M'=P'H$。于是，对于充分大的$n$，有

$$|\lambda-\widehat{\lambda_n}|\leqslant c\left[\max_{\substack{u\in M,\ v\in M'\\ \|u\|_H=\|v\|_H=1}}|b((A-A_n)u_n v)|\right.$$
$$\left.+\|(A-A_n)_{\restriction M}\|_H\|(A'-A'_n)_{\restriction M'}\|_H\right]$$

证明留给读者（见Mercier等，1981）。

3.3 迭代本征向量

我们再来考虑本征值问题（6.3）及其逼近（6.4）。设λ是单的，u_n是$B_n=\pi_n^a B$相应于$1/\lambda_n$的本征向量。考虑由

$$\widetilde{u_n}=\lambda_n B u_n$$

定义的迭代本征向量.

$\widetilde{u_n}$是方程

$$a(\widetilde{u_n},\ v)=\lambda_n(u_n,v)\quad 对V中的任一v,$$

它可以用高次有限元来解。把命题6.12用于B，我们得到

$$\|\widetilde{u_n}-u\|_V\leqslant c\|B(1-\pi_n^a)\|_V\delta_V(M,V_n),$$

当$\|B(1-\pi_n^a)\|_V\to 0$时，$\widetilde{u_n}$改善了u_n.

例6.7 考虑Ω内的Dirichlet问题

$$\Delta u=\lambda u\quad 在\Omega内,$$
$$u=0\quad 在\partial\Omega上,$$

其中Ω是R^2中的有界区域。且$H=L^2(\Omega)$，$V=H_0^1(\Omega)$。我们选择分段线性有限元，于是有

$$\|(1-\pi_n^a)u\|_V\leqslant h\|u\|_V,$$

$$\|B(1-\pi_n^a)u\|_V\leqslant c\|(1-\pi_n^a)u\|_H\leqslant ch\|u\|_V.$$

由此可知若将分段二次有限元用于计算$\widetilde{u}_n$，则可得$\|u-u_n\|_V = O(h)$ 及 $\|u-\widetilde{u}_n\|_V = O(h^2)$. 见Lin Qun (1980) 及第七章中的例7.5。

4. 有界算子的后验误差界

我们现在通过量$\eta_n = \|(T-T_n)P_n\|$来给出误差界，因为$P_n \xrightarrow{cc} P$，$\eta_n \to 0$，且η_n等于

$$\max_{\substack{\psi\in M_n\\ \|\psi\|=1}} \|(T-T_n)\psi\|,$$

如果我们能够对于M_n中的任何ψ合理地容易计算项$T\psi$，它是可以后验计算的。在整个这一节中我们总假设T是有界的。

4.1 $\lambda - \widehat{\lambda}_n$和$\Theta(M,M_n)$ 的界

定理6.15 设$\{T_n\}$是T在Γ上的强稳定逼近，则对于充分大的n，$\lambda - \widehat{\lambda}_n$和$\Theta(M,M_n)$ 都是η_n阶的.

证明 我们知道：

$$\Theta(M,M_n) \leqslant \max(\|(P-P_n)P\|, \|(P-P_n)P_n\|),$$

$$(R(z)-R_n(z))P_n = R(z)(T_n-T)R_n(z)P_n = R(z)(T_n-T)P_nR_n(z).$$

于是由命题2.13得到$\delta(M_n,M) \leqslant c\eta_n$ 及 $\Theta(M,M_n) < c\eta_n$。现在我们在$\mathscr{L}(M_n)$ 中考虑算子 $F_n' := P_{(n)}^{-1}TP_{(n)}$及 $G_n' := T_{n\restriction M_n}$。显然有 $m(\lambda-\widehat{\lambda}_n) = \mathrm{tr}(F_n' - G_n')$.

设$\{x_i\}_1^m$是M的一个基。令$x_{in} := P_n x_i$，$i = 1, \cdots, m$。根据对于充分大的n，有$\dim M_n = \dim M$的假设，这时$\{x_{in}\}_1^m$是M_n的基且由引理3.11知其伴随基$\{x_{in}^*\}_1^m$对于n是一致有界的。我们得到

$$\operatorname{tr}(F_n' - G_n') = \sum_{i=1}^{m} \langle (P_{(n)}^{-1} T P_{(n)} - T_n) x_{in}, x_{in}^* \rangle$$

和

$$|\operatorname{tr}(F_n' - G_n')| \leqslant c \max_i \| P_{(n)}^{-1} P_{(n)} (T - T_n) x_{in} \| = c\eta_n. \quad \square$$

习题

6.21 在$\mathscr{L}(M)$中定义 $G_n'' := P_{(n)} T_n P_{(n)}^{-1}$，证明

$F - G_n'' = P_{(n)} (F_n' - G_n') P_{(n)}^{-1}$ 及$\|F - G_n''\| = O(\eta_n)$

6.22 由习题6.21导出

$\max_j |\lambda - \mu_{jn}| = O(\eta_n)$，$\min_j |\lambda - \mu_{jn}| = O(\eta_n^{g/m})$，

和

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{m} \left(\sum_j^m \frac{1}{\mu_{jn}} \right) = O(\eta_n)$$

6.23 借助于η_n估计$\|(P - P_n)P\|$的界。

如果我们能够估计在这些界中出现的常数，则后验误差界能从如定理6.15的叙述中得出来。

4.2 广义Rayleigh商

设T及T_n是Hilbert空间中的自伴稠定算子，又x_n是 T_n 的本征向量，满足 $(x_n, x_n) = \|x_n\|^2 = 1$ 。已知 Rayleigh 商$\rho_n := (Tx_n, x_n)$是 λ 的具有以下阶

$$\frac{1}{\delta(\rho_n)} \|(T - \rho_n) x_n\|^2 \quad 且 \quad \delta(\rho_n) := \operatorname{dist}(\rho_n, \sigma(T) - \{\lambda\})$$

的逼近（见第5节）。

对于非自伴的情形，设 λ 是重数为m的精确孤立本征值。Rayleigh商概念的一种可能的推广是考虑 M_n 的基$\{x_{in}\}_1^m$和在

M_n^* 中的伴随基 $\{x_{in}^*\}_1^m$，且令

$$\zeta_n := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\langle Tx_{in}, x_{in}^*\rangle = \frac{1}{m}\mathrm{tr}TP_n .$$

ζ_n是T的基于M_n中给定基和M_n^*中对应的伴随基的广义 Rayleigh商，几乎不需再作额外的工作，就常可后验计算ζ_n（见第七章）.

ζ_n能够是$\hat{\lambda}_n$的一种改进吗？关于矩阵的情形（第一章，第4节）对于 $m=1$：$\zeta=y^HAx$，$y^Hx\mp 1$，我们已经注意到了这个问题. 我们知道答案依赖于y是不是A^H的一个逼近本征向量. 在下述内容中，情况基本上是相同的.

仍设T及T_n都是稠定的，且令

$$\eta_n^* := \|(T^* - T_n^*)P_n^*\|.$$

η_n^*可以趋于也可以不趋于0.

引理6.16 设T_n是T在Γ上的强稳定逼近，则对于充分大的n，有

$$\lambda - \zeta_n = \lambda - (1/m)\mathrm{tr}TP_n = O(\eta_n\eta_n^*).$$

证明

$$\begin{aligned} m(\lambda - \hat{\lambda}_n) &= \sum_{i=1}^{m}\langle(P_nT\tilde{P}_n^{-1} - P_nT_nP_n)x_{in}, x_{in}^*\rangle \\ &= \sum_i\langle P_n(T - T_nP_n)\tilde{P}_n^{-1}x_{in}, x_{in}^*\rangle \\ &= \sum_i\langle(T - T^n)\tilde{P}_n^{-1}x_{in}, x_{in}^*\rangle \\ &= \mathrm{tr}(T - T_n)P_n \\ &\quad + \sum_i\langle(\tilde{P}_n^{-1}P_n - P_n)x_{in}, (T^* - T_n^*)x_{in}^*\rangle. \end{aligned}$$

现在用

$$m\widehat{\lambda}_n = \mathrm{tr}\,T_n P_n, \quad \|\widetilde{P}_n^{-1} P_n - P_n\| \leqslant c\,\Theta(M, M_n) \leqslant c\eta_n$$

得出

$$|m\lambda - \mathrm{tr}\,TP_n| \leqslant c\eta_n \eta_n^*. \quad \square$$

η_n是ε_n阶的。若$\lambda - \widehat{\lambda}_n$是$\varepsilon_n$阶的，则当$\eta_n^* \to 0$时，$\zeta_n$改善了$\widehat{\lambda}_n$。

例6.8 当T是积分算子，且由有限秩的T_n数值逼近时，对ζ_n的计算只要求矩阵计算加上对Tx_{in}的计算。细节在第七章第8.2节中给出。特别是，不要求有关$\{x_{in}^*\}_1^m$的信息。

例6.9 我们考虑带光滑核的积分算子的Nyström逼近。于是，在一个合适的Banach空间中$|||T_n^N - T||| = |||T_n^{N*} - T^*|||$ $\to 0$（第四章，第7节）。ζ_n改善了$\widehat{\lambda}_n$（参看第4.4节的数值实验）。

例6.10 考虑第五章第5节中定义的本征元当$m = 1$时的迭代加细方法。第一次迭代λ^1是$\lambda^1 = \langle T\varphi_n, \varphi_n^* \rangle = \zeta_n$；这基于本征向量$\varphi_n$及$\varphi_n^*$的广义Rayleigh商。

例6.11 设T是Hilbert空间中的自伴算子。给出一个逼近本征向量φ_n，Rayleigh商$\rho_n = (T\varphi_n, \varphi_n)$是$\lambda$的一个近似值，它至少和$\zeta_n = (T\varphi_n, \varphi_n^*)$一样好（且较易计算）。这是因为当$T_n$非自伴（设$\lambda_n$是单的）时，$\varphi_n^*$可能不是$T$的近似本征向量。

习题

6.24 设T是自伴算子，$\|x\| = 1$，$\rho = (Tx, x)$。对任何的$\alpha \in \mathbb{C}$，证明

$$\|(T-\alpha)x\|^2=\|(T-\rho)x\|^2+|\alpha-\rho|^2.$$

并导出 $\min_{x\in\alpha}\|(T-\alpha)x\|=\|(T-\rho)x\|$.

6.25 设T在Hilbert空间中是自伴的。设T_n相应于φ_n的本征值λ_n是单的。证明若T_n是自伴的，则$\zeta_n=\rho_n$。当T_n非自伴时，仍有$T_n^*\xrightarrow{p}T^*=T$，试对作为$\lambda$的逼近的$\zeta_n$与$\rho_n$进行比较。

6.26 设T_n是有界算子T的Galerkin逼近$\pi_n T\pi_n$。证明$\widehat{\lambda}_n=\zeta_n$。

对于Galerkin逼近，$\widehat{\lambda}_n=\zeta_n$再次表明若有$\pi_n^*\xrightarrow{p}1$，则$\widehat{\lambda}_n$是有较高精度的逼近。在第4.3节中我们会看到投影法的更多特殊的性质。

4.3 投影法

设λ_n是$T_n=\pi_n T$的单本征值，其相应的本征向量是φ_n，谱投影用P_n^P表示。在第2.3节中我们已经考虑了迭代本征向量$\widetilde{\varphi}_n=(1/\lambda_n)T\varphi_n$，$\widetilde{\varphi}_n$是$T_n^S=T\pi_n$的本征向量，对应的谱投影表示为$P_n^S$。我们引入广义Rayleigh商

$$\widetilde{\lambda}_n:=\operatorname{tr}TP_n^S.$$

引理6.17 下面的恒等式成立：

$$\widetilde{\lambda}_n=\operatorname{tr}TP_n^S=\operatorname{tr}TP_n^P.$$

证明 对于T_n^G，T_n^P和T_n^S，相应于λ_n的本征向量分别是φ_n，φ_n及φ_n^S。我们定义伴随向量如下：

$$(\pi_n T\pi_n)^*\varphi_n^*=\overline{\lambda_n}\varphi_n^*,\quad \langle\varphi_n,\varphi_n^*\rangle=1,$$

$$(\pi_n T)^*\psi_n=\overline{\lambda_n}\psi_n,\quad \langle\varphi_n,\psi_n\rangle=1,$$

和

$$(T\pi_n)^*\psi_n' = \overline{\lambda_n}\psi_n' \quad \langle \varphi_n^S, \psi_n' \rangle = 1.$$

ψ_n'和 φ_n^*是共线的：我们 令 $\psi_n' := \alpha\varphi_n^*$. 于是

$$1 = \langle \varphi_n^S, \ \psi_n' \rangle = \left\langle \frac{1}{\lambda_n} T\varphi_n, \ \alpha\varphi_n^* \right\rangle = \langle \pi_n\varphi_n, \ \frac{\alpha}{\lambda_n} T^*\varphi_n^* \rangle$$

$$= \langle \varphi_n, \ \alpha\varphi_n^* \rangle = \overline{\alpha},$$

即是，$\psi_n' = \varphi_n^*$。同样地，令$\psi_n := (\beta/\overline{\lambda_n}) T^* \varphi_n^*$。

$$1 = \langle \varphi_n, \psi_n \rangle = \left\langle \varphi_n, \ \frac{\beta}{\lambda_n} T^*\varphi_n^* \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\lambda_n} T\varphi_n, \ \beta\varphi_n^* \right\rangle = \overline{\beta};$$

所 以 $\psi_n = (1/\overline{\lambda}_n) T^*\varphi_n^*$。现在

$$\widetilde{\lambda}_n = \mathrm{tr} TP_n^S = \langle T\varphi_n^s, \ \varphi_n^* \rangle = \left\langle T\varphi_n, \ \frac{1}{\lambda_n} T^*\varphi_n^* \right\rangle$$

$$= \langle T\varphi_n, \ \psi_n \rangle = \mathrm{tr} TP_n^P. \qquad \square$$

我们现在借助于$\eta_n := \|(1-\pi_n)T\varphi_n\|$及 $\eta_n^* :=$ $\|(1-\pi_n^*)T^*\varphi_n^*\|$来给出误差界。

命题6.18 对于充分大的n，我们有

$$|\lambda - \lambda_n| = O(\eta_n\eta_n^*) \text{ 和 } |\lambda - \widetilde{\lambda}_n| = O(\|(1-\pi_n)T\|\eta_n\eta_n^*).$$

证明 对于第一个界，我们令$\zeta_n = \lambda_n$，并应用引理6.16于$\pi_n T \pi_n$（因为$m = 1$）．对于第二个界，令$\widetilde{\lambda}_n = \mathrm{tr} TP_n^P$并把引理6.16应用于$T_n = \pi_n T$。这给 出 $|\lambda - \widetilde{\lambda}_n| \leqslant c\|(1-\pi_n)T\varphi_n\|$ $\|T^*(1-\pi_n^*)\psi_n\|$，其中 ψ_n 已在引理6.17的证明中定义。$\psi_n = (1/\overline{\lambda}_n) T^*\varphi_n^*$，且因而

$$\|T^*(1-\pi_n^*)\psi_n\| = \frac{1}{|\lambda_n|}\|T^*(1-\pi_n^*)T^*\varphi_n^*\| \leqslant$$

$c\|(1-\pi_n)T\|\eta_n^*$. □

若$\|(1-\pi_n)T\|\to 0$，则$\widetilde{\lambda}_n$改善了λ_n．若T是紧的且$\pi_n \xrightarrow{P} 1$，这个条件是满足的（参见第4.4节的数值实验）．

习题

6.27 考虑对本征值用$T_n^G=\pi_n T\pi_n$的迭代加细．证明前两次迭代为$\lambda'^G=\lambda^{0G}=\lambda_n$，$\lambda^{2G}=\widetilde{\lambda}_n$．

6.28 设T是Hilbert空间中的紧自伴算子，又设π_n是正交投影．λ_n及φ_n由$\pi_n T\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$定义，

$$\widetilde{\varphi}_n=\frac{1}{\lambda_n}T\varphi_n \quad 及 \quad \widetilde{\rho}_n=\frac{(T\widetilde{\varphi}_n,\widetilde{\varphi}_n)}{(\widetilde{\varphi}_n,\widetilde{\varphi}_n)}$$

证明

$$\lambda=\widetilde{\rho}_n+O(\|(1-\pi_n)T\|^4)$$

及

$$\lambda=\widetilde{\lambda}_n+O(\|(1-\pi_n)T\|^3)$$

4.4 数值实验

我们转述Redont（1979a）以及Kulkarni和 Limaye(1983a)给出的一些数值的实验．在$X=C(0,1)$中考虑由以下的核

（1）$k_1(s,t)=e^{st}$，$0\leqslant s$，$t\leqslant 1$，

（2）$k_2(s,t)=|\cos s-\cos t|$，$0\leqslant s$，$t\leqslant 1$

定义的积分算子．上面的两个函数关于s，t都是对称的，k_1是光滑的，而k_2则有不连续的一阶导数．

对于第一个例子，三个主本征值是

$\lambda_1=1.353030$，$\lambda_2=0.105983$，$\lambda_3=3.560749\times 10^{-3}$．

对于第二个例子，主本征值是$\lambda_1=0.164565$．[0，1]在$t_i=i/n$，$i=0$，…，n处被分为n个区间，积分算子分别由下

面的方法来逼近：

（1）投影法，其中π_n是在$\{t_i\}_0^n$点处的分段线性插值。这定义了在$\{t_i\}_0^n$上的一种配置法。

（2）近似积分法，其中求积分式是对于每个区间$[t_i, t_{i+1}]$，$i=0, \cdots, n-1$的两点Gauss公式。

ν是对应的离散矩阵$\widetilde{A}_n$的容度：分别有$n=\nu$或$\nu/2$。i是本征值λ_i的秩：$i=1, 2, 3$。

在计算中，对于一个给定的x，向量Tx用T的容度为100的Nyström逼近来估计。

4.4.1 各种方法的比较

对于投影法（或近似积分法），我们考虑逼近T_n^G，T_n^P和T_n^S（或T_n^F及T_n^N）。对于$\mathscr{M}\in\{G,P,S,F,N\}$，各种方法关于一个共同的容度$\nu$通过$\eta_n^{\mathscr{M}}:=\|(T-T_n^{\mathscr{M}})\varphi_n^{\mathscr{M}}\|_\infty$，$\|\varphi_n^{\mathscr{M}}\|_\infty=1$来计算。对于核$k_1$和$k_2$的结果列在表6.1中。$\rho(\mathscr{M},\mathscr{M}')$是比值$\eta_n^{\mathscr{M}}/\eta_n^{\mathscr{M}'}$。已知$\eta_n^P=\eta_n^G$。

界$\lambda-\lambda_n^{\mathscr{M}}=O(\eta_n^{\mathscr{M}})$的有效性通过比值$|\lambda-\lambda_n^{\mathscr{M}}|/\eta_n^{\mathscr{M}}$验证。结果列在表6.2中。$\|\varphi-\varphi_n^G\|_\infty$和$\|\varphi-\varphi_n^S\|_\infty$的比较在表6.3中作出.

4.4.2 T_n^P与T_n^N之间的比较

对于T_n^P和T_n^N，误差$\lambda-\lambda_n$和$\lambda-\zeta_n$通过$\zeta_n=\langle T\varphi_n, \varphi_n^*\rangle$来计算。考虑到算子是$L^2(0, 1)$中的自伴算子，Rayleigh商$\rho_n=(T\varphi_n, \varphi_n)$已计算过。结果列在表6.4中。注意对于$T_n^P$，

$\zeta_n=\mathrm{tr}\,TP_n^P=\widetilde{\lambda}_n$。

4.4.3 计算的评注

表 6.1

$\eta_n^{\mathscr{M}}$的值和对应的比值

$k(s,t)$	i	$\mathscr{M}$	ν = 4	8	16	30	50
k_1	1	η_n^F	8.4×10^{-2}	4.1×10^{-2}	1.9×10^{-2}	8.3×10^{-3}	3.6×10^{-3}
		η_n^N	1.5×10^{-4}	9.3×10^{-6}	5.8×10^{-7}	4.7×10^{-8}	5.7×10^{-9}
		$\rho(N, F)$	1.8×10^{-3}	2.3×10^{-4}	3.0×10^{-5}	5.7×10^{-6}	1.6×10^{-6}
		η_n^G	4.2×10^{-3}	1.5×10^{-3}	3.4×10^{-4}	9.2×10^{-5}	2.7×10^{-5}
		η_n^S	3.1×10^{-3}	1.0×10^{-3}	2.2×10^{-4}	5.9×10^{-4}	2.1×10^{-5}
		$\rho(S, G)$	0.74	0.67	0.65	0.64	0.78
		$\rho(N, G)$	3.6×10^{-2}	6.2×10^{-3}	1.7×10^{-3}	5.1×10^{-4}	2.1×10^{-4}
	2	η_n^F	2.0×10^{-2}	1.2×10^{-2}	6.3×10^{-3}	2.9×10^{-3}	1.2×10^{-3}
		η_n^N	7.5×10^{-4}	4.8×10^{-5}	3.0×10^{-6}	2.4×10^{-7}	3.0×10^{-8}
		$\rho(N, F)$	3.7×10^{-2}	4.0×10^{-3}	4.8×10^{-5}	8.3×10^{-5}	2.5×10^{-5}
		η_n^G	4.0×10^{-3}	7.8×10^{-4}	1.8×10^{-4}	4.8×10^{-5}	1.4×10^{-5}
		η_n^S	3.5×10^{-2}	6.4×10^{-3}	1.4×10^{-3}	3.7×10^{-4}	1.3×10^{-4}
		$\rho(S, G)$	8.7	8.2	7.8	7.7	9.3
		$\rho(N, G)$	0.19	6.5×10^{-2}	1.7×10^{-2}	5.0×10^{-3}	2.1×10^{-3}
	3	η_n^F	8.2×10^{-3}	2.6×10^{-3}	6.8×10^{-4}	1.9×10^{-4}	6.9×10^{-5}
		η_n^N	4.4×10^{-3}	2.9×10^{-4}	1.9×10^{-5}	1.5×10^{-6}	1.8×10^{-7}
		$\rho(N, F)$	0.54	0.11	2.8×10^{-2}	7.9×10^{-3}	2.6×10^{-3}
		η_n^G	1.0×10^{-3}	1.9×10^{-4}	4.3×10^{-5}	1.2×10^{-5}	3.2×10^{-6}
		η_n^S	0.24	4.1×10^{-2}	8.7×10^{-3}	2.3×10^{-3}	8.1×10^{-4}
		$\rho(S, G)$	240	216	202	192	253
		$\rho(N, G)$	4.4	2.3	0.44	1.2×10^{-1}	5.6×10^{-2}
k_2	1	η_n^F	6.6×10^{-2}	2.8×10^{-2}	1.2×10^{-2}	5.0×10^{-3}	2.1×10^{-3}
		η_n^N	9.7×10^{-3}	2.6×10^{-3}	6.9×10^{-5}	1.7×10^{-4}	3.7×10^{-5}
		$\rho(N, F)$	0.15	0.93×10^{-1}	5.7×10^{-2}	3.4×10^{-2}	1.8×10^{-2}
		η_n^G	1.9×10^{-2}	4.1×10^{-3}	9.9×10^{-4}	2.8×10^{-4}	7.0×10^{-5}
		η_n^S	9.0×10^{-3}	1.7×10^{-3}	9.7×10^{-4}	1.0×10^{-4}	3.6×10^{-5}
		$\rho(S, G)$	0.47	0.41	0.37	0.36	0.51
		$\rho(N, G)$	0.51	0.63	0.70	0.61	0.53

表 6.2

比值$\lambda-\lambda_n^{\mathcal{M}}|/\eta_n^{\mathcal{M}}$

$k(s,t)$	i	$\mathcal{M}$	ν				
			4	8	16	30	50
k_1	1	F	7.6×10^{-4}	1.0×10^{-4}	1.4×10^{-5}	2.5×10^{-6}	7.1×10^{-7}
		N	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44
		G	0.67	0.66	0.64	0.63	0.75
		S	1.0	0.99	0.99	0.99	0.99
	2	F	1.4×10^{-2}	1.5×10^{-3}	1.8×10^{-4}	3.2×10^{-5}	9.2×10^{-6}
		N	0.39	0.39	0.39	0.39	0.39
		G	6×10^{-2}	8.10^{-2}	8.2×10^{-2}	8.1×10^{-2}	9.9×10^{-2}
		S	6.9×10^{-3}	9.8×10^{-3}	1.0×10^{-2}	1.0×10^{-2}	1.0×10^{-2}
	3	F	3.6×10^{-2}	7.9×10^{-3}	1.9×10^{-3}	5.4×10^{-4}	1.9×10^{-4}
		N	6.7×10^{-2}	6.9×10^{-2}	6.9×10^{-2}	6.9×10^{-2}	6.9×10^{-2}
		G	6.7×10^{-2}	3.0×10^{-3}	8.4×10^{-3}	1.1×10^{-2}	1.5×10^{-2}
		S	2.8×10^{-4}	1.4×10^{-5}	4.1×10^{-5}	5.3×10^{-5}	5.6×10^{-5}
k_2	1	F	9.9×10^{-2}	5.4×10^{-2}	3.0×10^{-2}	1.8×10^{-2}	1.3×10^{-2}
		N	0.68	0.56	0.51	0.55	0.74
		G	0.44	0.38	0.36	0.36	0.59
		S	0.90	0.92	0.94	1.0	1.2

在表6.1中我们看出关于离散问题，对给定的容度ν，Galerkin逼近和Sloan逼近是同样有效的，但是Nyström法却比Fredholm逼近优越。至少当核光滑时，Nyström法也比Galerkin法优越。表6.1中的结果也表明η_n^S不能改进η_n^G($\pi_n^*\neq1$)，但是η_n^N对于两类核都能改进η_n^F。

表 6.3

φ_n^G与 φ_n^S的比较

ν	k_1		k_2	
	$\|\varphi-\varphi_n^G\|_\infty$	$\|\varphi-\varphi_n^S\|_\infty$	$\|\varphi-\varphi_n^G\|_\infty$	$\|\varphi-\varphi_n^S\|_\infty$
4	4.9×10^{-3}	2.4×10^{-5}	7.3×10^{-2}	1.2×10^{-2}
6	1.8×10^{-3}	2.2×10^{-5}	3.0×10^{-2}	4.8×10^{-3}
8	9.5×10^{-4}	2.0×10^{-5}	1.6×10^{-2}	2.4×10^{-3}
10	5.8×10^{-4}	1.9×10^{-5}	1.0×10^{-2}	1.4×10^{-3}
12	3.9×10^{-4}	1.8×10^{-5}	7.1×10^{-3}	9.7×10^{-4}
16	2.2×10^{-4}	1.7×10^{-5}	4.1×10^{-3}	5.5×10^{-4}
20	1.3×10^{-4}	1.7×10^{-5}	2.4×10^{-3}	4.0×10^{-4}
30	6.4×10^{-5}	1.6×10^{-5}	1.2×10^{-3}	2.2×10^{-4}

在表6.2中我们看出，所有的比值$|\lambda-\lambda_n^{A}|/\eta_n^{A}$都是常数，只有$|\lambda-\lambda_n^F|/\eta_n^F$是例外．这是因为（随着$\lambda_n^F=\lambda_n^N$和$\eta_n^N\ll\eta_n^F$）界$\lambda-\lambda_n^F=O(\eta_n^N)$比界$\lambda-\lambda_n^F=O(\eta_n^F)$更为实际。

4.5 文献注释

本征值λ基于Rayleigh商或广义Rayleigh商的各种计算改进已由Linz（1970，1972），Rakotch（1975、1978），Spence(1978,1979),Ghemires(1979)及Kulkarni和Limaye（1983a）中提出。本征值和本征向量的迭代加细在第七章，B部分中研究。

表 6.4

得自ζ_n和ρ_n的比较改进

$k(s,t)$	i	$\mathscr{M}$	ν	$\lambda-\lambda_n$	$\lambda-\zeta_n$	$\lambda-\rho_n$	$\lambda-\zeta_n/\lambda-\rho_n$
k_1	1	P	6	-1.9×10^{-3}	8.1×10^{-8}	5.8×10^{-7}	0.14
			8	-1.0×10^{-3}	2.6×10^{-8}	5.7×10^{-8}	0.46
		N	4	6.4×10^{-5}	1.1×10^{-7}	1.4×10^{-9}	78
			6	1.3×10^{-5}	4.6×10^{-9}	*[a]	—
			8	4.1×10^{-6}	*[a]	*[a]	—
	2	P	6	-1.1×10^{-4}	-1.3×10^{-7}	2.1×10^{-6}	-0.062
			8	-6.3×10^{-5}	-3.2×10^{-8}	8.8×10^{-7}	-0.036
		N	4	2.9×10^{-4}	1.9×10^{-6}	-1.6×10^{-7}	-11.9
			6	5.8×10^{-5}	8.1×10^{-8}	-6.7×10^{-9}	-12.1
			8	1.8×10^{-5}	8.4×10^{-9}	*[a]	—
	3	P	6	6.4×10^{-6}	2.2×10^{-8}	7.1×10^{-6}	3.1×10^{-3}
			8	5.7×10^{-7}	2.1×10^{-9}	2.1×10^{-6}	10^{-3}
		N	4	2.9×10^{-4}	1.7×10^{-6}	-5.2×10^{-5}	-0.033
			6	6.2×10^{-4}	1.1×10^{-7}	-2.2×10^{-6}	-0.050
			8	2.0×10^{-5}	1.3×10^{-8}	-2.3×10^{-7}	-0.056
k_2	1	P	4	-8.2×10^{-3}	-5.7×10^{-4}	4.5×10^{-4}	-1.27
			6	-3.0×10^{-3}	-1.9×10^{-4}	5.5×10^{-5}	-3.45
			10	-9.5×10^{-4}	-5.0×10^{-5}	-3.5×10^{-6}	14.3
		N	4	6.6×10^{-3}	-5.5×10^{-3}	6.5×10^{-5}	-86
			6	2.7×10^{-3}	-2.5×10^{-3}	1.5×10^{-5}	-167
			10	9.3×10^{-4}	-9.1×10^{-4}	2.2×10^{-6}	-413

[a] 星号表明对应的误差小于$|\lambda-\lambda_{100}^N|$，其中$\lambda_{100}^N$是用于计算$\zeta_n$与$\rho_n$时容度为100的 Nyström 逼近的本征值.

5. T的一组本征值的局部化

从数值计算的观点看，知道误差界中常数的渐近性态是重要的. 在这一节中，我们首先论及T的一个或多个本征值的局部化，即在复平面上确定这些本征值所在的区域. 局部化基于一些给出的数据. 对于定义域在X的稠密内闭算子T的一个单

本征值，我们可用如下方式陈述这一问题。由关于向量 $x \in \mathrm{Dom}\,T$，$y \in \mathrm{Dom}(T^*)$ 及复数 $\zeta := \langle Tx, y\rangle / \langle x, y\rangle$ 的信息，是否可能求出中心在 ζ（或 x）且包含 λ（或 φ）（$T\varphi = \lambda\varphi$）的最小圆盘之半径？在实用中，$x$（或 y）可选择为 T_n 的本征向量 φ_n（或 T_n^* 的 φ_n^*），其中 T_n 是 T 的一个逼近。

当 T 是 Hilbert 空间中的自伴算子时，答案由 Kato—Temple 不等式给出（Kato，1949），我们首先讨论这个问题。

5.1 T 是自伴算子

设 H 是Hilbert空间，T 是闭自伴算子，其定义域 D 在 H 内稠密。对于 $x \in D$ 且 $\|x\| = 1$，定义Rayleigh 商 $\rho := (Tx, x)$，且令 $\varepsilon := \|(T-\rho)x\|$。

引理6.19 （Kato）设 a，b 是这样两个实数，使得

（i）$a < \rho < b$，

（ii）开区间 (a, b) 不含 $\sigma(T)$ 的点。则有 $(b-\rho)(\rho-a) \leqslant \varepsilon^2$。

证明 二次式 $(\lambda-a)(\lambda-b) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab$ 当 λ 在 $\sigma(T)$ 上变化时是非负的。乘以式子 $d(E(\lambda)x, x) = d\|E(\lambda)x\|^2 \geqslant 0$ 并在 $\mathbb{R}$ 上积分结论仍成立。因为

$$\int \lambda^2 d(E(\lambda)x, x) = (T^2x, x) = \|Tx\|^2,$$

$$\int \lambda d(E(\lambda)x, x) = (Tx, x) = \rho,$$

及

$$\int d(E(\lambda)x, x) = \|x\|^2 = 1,$$

我们得到

$$\|Tx\|^2 - (a+b)\rho + ab \geqslant 0 \quad 及 \quad \|Tx\|^2 = \varepsilon^2 + \rho^2,$$

即是，$(b-\rho)(\rho-a) \leqslant \varepsilon^2$。 □

推论6.20 (Krylov—Weinstein)对于D中的任何x($\|x\| = 1$)，存在$\lambda\in\sigma(T)$，使得$|\lambda-\rho|\leqslant\varepsilon$。

证明 由引理6.19，对每一个这样的$a<\rho$，当$b>\beta=\rho+\varepsilon^2/(\rho-a)$时，区间$(a, b)$包含$\sigma(T)$的一个点。因为$\sigma(T)$是闭集，$(a, \beta]$也含有$\sigma(T)$的点。为得出所要的结论，只需令$a=\rho-\varepsilon$。 □

当λ是T的具有限重数m的孤立本征值时，若我们知道ρ到集合$\sigma(T)-\{\lambda\}$之间的距离的一些信息，则Krylov—Weinstein不等式可以改善。我们定义$\delta(\rho):=\operatorname{dist}(\rho,\sigma(T)-\{\lambda\})$，且$\theta$是$x$与相应于$\lambda$的本征空间$M=PX$之间的锐角。

定理6.21 (Kato—Temple) 设λ是重数有限的本征值，又设区间$(\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$除$\lambda$外不含$\sigma(T)$的点，且使得$\underline{\lambda}<\rho<\bar{\lambda}$。则有

$$\rho-\frac{\varepsilon^2}{\bar{\lambda}-\rho}\leqslant\lambda\leqslant\rho+\frac{\varepsilon^2}{\rho-\underline{\lambda}}$$

且

$$\sin\theta\leqslant\frac{2}{\bar{\lambda}-\underline{\lambda}}\left[\left(\rho-\frac{\underline{\lambda}+\bar{\lambda}}{2}\right)^2+\varepsilon^2\right]^{1/2}.$$

证明 对于本征值不等式，我们用引理6.19：

(1) 若$\lambda<\rho<\bar{\lambda}$，令$a=\lambda$，$b=\bar{\lambda}$，我们得到

$$\rho-\frac{\varepsilon^2}{\bar{\lambda}-\rho}\leqslant\lambda<\rho.$$

(2) 若$\underline{\lambda}<\rho<\lambda$，则令$a=\underline{\lambda}$，$b=\lambda$得

$$\rho<\lambda\leqslant\rho+\frac{\varepsilon^2}{\rho-\underline{\lambda}}.$$

(3) 在一般情形下，我们导出所述不等式。

现在回到

$$\cos^2\theta = \|Px\|^2 = (Px,\ x)$$
$$= ((E(\lambda) - E(\lambda^-))x,\ x).$$

二次式

$$(z - \underline{\lambda})(z - \overline{\lambda}) = z^2 - (\underline{\lambda} + \overline{\lambda}) + \underline{\lambda}\,\overline{\lambda}$$

当 z 在 $\sigma(T)$ 中变化时，除在 λ 处外是非负的.
乘以 $d(E(z)x,\ x)$ 且在 $\mathbb{R}$ 上积分，得到

$$\|Tx\|^2 + (\underline{\lambda} + \overline{\lambda})\rho + \underline{\lambda}\,\overline{\lambda} - (\lambda - \underline{\lambda})(\underline{\lambda} - \overline{\lambda})\cos^2\theta \geqslant 0,$$

及

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \leqslant 1 - \frac{\|Tx\|^2 + (\underline{\lambda} + \overline{\lambda})\rho + \underline{\lambda}\,\overline{\lambda}}{(\lambda - \underline{\lambda})(\overline{\lambda} - \lambda)}.$$

因为

$$(\lambda - \underline{\lambda})(\overline{\lambda} - \lambda) = \left(\frac{\overline{\lambda} - \underline{\lambda}}{2}\right)^2 - \left(\lambda - \frac{\underline{\lambda} + \overline{\lambda}}{2}\right)^2.$$

这个量在分母上以 $[(\overline{\lambda} - \underline{\lambda})/2]^2$ 为界. 由此得出所要的不等式.

$\overline{\lambda} - \rho$ 与 $\rho - \underline{\lambda}$ 与 ε 相比越大，与Krylov—Weinstein不等式相比，本征值的界越好.

推论6.22 若 $\varepsilon < \delta(\rho)$，则 $|\lambda - \rho| \leqslant \varepsilon^2/\delta(\rho)$ 且 $\sin\theta \leqslant \varepsilon/\delta(\rho)$.

证明 我们应用定理6.21，且令 $\underline{\lambda} = \rho - \delta(\rho)$ 及 $\overline{\lambda} = \rho + \delta(\rho)$. □

注意若 $\varepsilon \geqslant \delta(\rho)$，我们仍有 $|\lambda - \rho| \leqslant \varepsilon$ 及 $\sin\theta \leqslant 1$.

习题

6.29 证明若在 $X = \mathbb{R}^2$ 中考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & a \end{pmatrix}$$

则利用数据 x 及 $\rho=(Tx,\ x)$ 所得本征值的界是最佳的。

6.30 证明只要 ε 满足 $\varepsilon^2<(\overline{\lambda}-\rho)(\rho-\underline{\lambda})$，则定理6.21能改进推论6.20。

6.31 利用推论6.20得出 $\delta(\rho)$ 的一个上界。

当 Tx 对于一个给定的 x 可计算时，Kato—Temple 不等式给出了 λ 的依赖于 $\underline{\lambda}$ 和 $\overline{\lambda}$ 的一个局部化。这些数常常通过 Krylov—Weinstein 不等式来计算。

当 λ 没有从 $\sigma(T)$ 的其余部分中很好地隔离开来时，我们可以要求对一组邻近的本征值进行局部化，而不是对它们逐个来做。这能够按如下进行。

代替向量 x，我们现在考虑 H 的一个 r 维子空间 V，$V\subset D$。设 Q 是 V 上的正交投影。作为第一步，设已知 QTQ（它是 V 中 T 的部分）的谱分解：$\{\rho_i\}_1^r$ 是重复的本征值，而 $\{x_i\}_1^r$ 则是相应的本征向量的标准正交基：

$$(Tx_i,\ x_j)=\rho_i\delta_{ij},\quad i,j=1,\cdots,r,\quad \rho_1\leqslant\rho_2\leqslant\cdots\leqslant\rho_r.$$

令 $\varepsilon_i:=\|(T-\rho_i)x_i\|,\quad i=1,\cdots,r.$

设存在这样一个开区间 $(\underline{\lambda},\ \overline{\lambda})$，使得

（i）除 r 个重复的本征值外，它不包含 $\sigma(T)$ 的点，这 r 个本征值按照递增次序排列：$\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_r$；

（ii）$\underline{\lambda}<\rho_k<\overline{\lambda}$，$k=1,\ \cdots,\ r$。

定理6.23 在上述的假设下，有

$$\rho_k-\sum_{i=1}^{r}\frac{\varepsilon_i^2}{\overline{\lambda}-\rho_i}\leqslant\mu_k\leqslant\rho_k+\sum_{i=1}^{r}\frac{\varepsilon_i^2}{\rho_i-\underline{\lambda}},\quad k=1,\ \cdots,\ r.$$

证明 见Kato（1949）。 □

注意到分母中不包含如同 $\rho_i-\rho_j$ 的量，它们可能是小的或甚至为 0。

T在（$\underline{\lambda}$，$\overline{\lambda}$）内的 r 个本征值由关于QTQ（T在V中的部分）的本征元的信息已可局部化。现设x_i不必是QTQ的本征向量，而只是V的任一标准正交基。

令$\varepsilon_i := \|(1-Q)Tx_i\|$，$i=1,\cdots,r$。则$\varepsilon := (\Sigma_{i=1}^{r}\varepsilon_i^2)^{1/2}$表示Schmidt 范数

$$|||(1-Q)TQ||| := \left(\sum_{i=1}^{r}\|(1-Q)Tx_i\|^2\right)^{1/2}$$

［见 Kato（1976，P.262）；在矩阵论中 Schmidt 范数常称为 Frobenius或 Schur 范数］。我们还定义算术平均

$$\hat{\lambda} := \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_i \quad 及 \quad \hat{\rho} := \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\rho_i,$$

其中ρ_i现在是Rayleigh商（Tx_i，x_i），$i=1,\cdots,r$。

推论6.24 在定理6.23的假设下，下面的界

$$\rho_k - \frac{\varepsilon^2}{\min_i(\overline{\lambda}-\rho_i)} \leqslant \mu_k \leqslant \rho_k + \frac{\varepsilon^2}{\min_i(\rho_i-\underline{\lambda})}$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ r,$$

和

$$\hat{\rho} - \frac{\varepsilon^2}{\min_i(\overline{\lambda}-\rho_i)} \leqslant \hat{\lambda} \leqslant \hat{\rho} + \frac{\varepsilon^2}{\min_i(\rho_i-\underline{\lambda})}.$$

分别对于$|\mu_k-\rho_k|$和$|\hat{\lambda}-\hat{\rho}|$成立。

证明　这是Schmidt 范数在酉变换下不变的直接结论。□

由关于V中任何标准正交向量集合$\{x_i\}_1^r$及相应的Rayleigh 商$\rho_i=(Tx_i,\ x_i)$的信息，T在($\underline{\lambda}$，$\overline{\lambda}$)中的 r 个本征值已局部化了。

5.2 T是非自伴的且λ是单的

设T是闭线性算子，其定义域D在复Banach空间X中稠密。令$x \in D$，$\|x\| = 1$，$y \in \mathrm{Dom}(T^*)$。我们设$\langle y,x\rangle \neq 0$，且为简单起见设$\langle y,x\rangle = 1$．$\zeta := \langle Tx,y\rangle$是基于$x$和$y$的广义Rayleigh商。令$Q$表示$X$沿着$\{y\}^\perp \cap X$在$\{x\}$上的投影：$Q = \langle\cdot, y\rangle x$．我们考虑$T$的分解：

$$\begin{aligned} T &= QTQ + (1-Q)T(1-Q) + (1-Q)TQ + QT(1-Q) \\ &= \underbrace{\zeta Q + (1-Q)T(1-Q)}_{\widetilde{T}} + \underbrace{(T-\zeta)Q + Q(T-\zeta)}_{\widetilde{H}} \end{aligned}$$

对于复的t，应用于族$T(t) = \widetilde{T} + t\widetilde{H}$的解析摄动理论将代替$T$的谱分解，后者不再成立．

习题

6.32　证明$\|Q\| = \|y\| \geqslant 1$．

6.33　证明$\widetilde{H} \in \mathscr{L}(X)$，且$\widetilde{T} = T - \widetilde{H} \in \mathscr{C}(X)$．

6.34　证明ζ是$\widetilde{T}$的一个孤立本征值．证明当ζ单时，相应的谱投影是Q．

6.35　设ζ是$\widetilde{T}$的单本征值，证明$\mathring{T} := [(1-Q)(T-\zeta)]_{\restriction \{y\}^\perp \cap X} = (\widetilde{T}-\zeta)_{\restriction \{y\}^\perp \cap X}$是可逆的且$\Sigma := (1-Q)\mathring{T}^{-1}(1-Q) \in \mathscr{L}(X)$是$\widetilde{T}$相应于$\zeta$的约化预解式．

6.36　$(1-Q)Tx = (T-\zeta)x = (1-Q)(T-\zeta)x$．

6.37　$\widetilde{H}Q = (1-Q)\widetilde{H}Q$及$\widetilde{H}(1-Q) = Q\widetilde{H}(1-Q)$．

6.38　证明QX及$(1-Q)X$在$\widetilde{H}\widetilde{R}(z)\widetilde{H}\widetilde{R}(z)$之下是不变的，其中$\widetilde{R}(z) := (\widetilde{T}-z)^{-1}$，$z \in \rho(\widetilde{T})$．

6.39　设M和N是$T \in \mathscr{L}(X)$的两个不变闭子空间，使得$X = M \oplus N$．证明$r_\sigma(T) = \max(r_\sigma(T_{\restriction M}), r_\sigma(T_{\restriction N}))$．

我们证明两个预备引理。

引理6.25 对于$\rho(\widetilde{T})$中的任一z，有

$$r_\sigma(\widetilde{H}\widetilde{R}(z))=(r_\delta[\widetilde{H}\widetilde{R}(z)\widetilde{H}\widetilde{R}(z)Q])^{1/2}$$

及
$$\widetilde{R}(z)=(\widetilde{T}-z)^{-1}.$$

证明 对$\rho(\widetilde{T})$中的任何z，有$r_\sigma^2(\widetilde{H}\widetilde{R}(z))$

$=r_\sigma(\widetilde{H}\widetilde{R}(z)\widetilde{H}\widetilde{R}(z))$. 因为$QX$和$(1-Q)X$在$\widetilde{H}\widetilde{R}(z)\widetilde{H}\widetilde{R}(z)$之下是不变的，我们得到

$$r_\sigma(\widetilde{H}\widetilde{R}(z)\widetilde{H}\widetilde{R}(z))=\max[r_\sigma(\widetilde{H}\widetilde{R}(z)\widetilde{H}\widetilde{R}(z)Q),$$
$$r_\sigma(\widetilde{H}\widetilde{R}(z)\widetilde{H}\widetilde{R}(z)(1-Q))].$$

现在我们写

$$\widetilde{H}\widetilde{R}(z)\widetilde{H}\widetilde{R}(z)Q=[\widetilde{H}\widetilde{R}(z)(1-Q)][\widetilde{H}\widetilde{R}(z)Q],$$
$$\widetilde{H}\widetilde{R}(z)\widetilde{H}\widetilde{R}(z)(1-Q)=[\widetilde{H}\widetilde{R}(z)Q][\widetilde{H}\widetilde{R}(z)(1-Q)].$$

这证明了所考虑的两个算子有相同的谱半径，证明完毕。 □

相应于ζ及x（或$\overline{\zeta}$与y）的余向量是$u:=Tx-\zeta x$（或$v:=T^*y-\overline{\zeta}y$）. $\hat{y}:=y/\|y\|$是标准化了的，且$\hat{v}:=v/\|y\|$是对应的余向量。余向量的范数是$\varepsilon:=\|u\|$（或$\varepsilon^*:=\|\hat{v}\|$. 设$a$是$\|\Sigma\|$的一个上界：$a\geqslant\|\Sigma\|$。令$\Gamma$表示圆周$\{z\in\mathbb{C};$ $|z-\zeta|=1/2a\}$。

引理6.26 设$\Gamma\subset\rho(\widetilde{T})$，则有界

$$\max_{z\in\Gamma}r_\sigma^2[\widetilde{H}\widetilde{R}(z)]\leqslant 2a\sum_{k=0}^{\infty}(2a)^{-k}|\langle\Sigma^{k+1}u,v\rangle|.$$

证明 $\widetilde{R}(z)x=(\zeta-z)^{-1}x$, 且$B_z=:Q(\widetilde{H}\widetilde{R}(z))^2Q$是秩为1的算子，使得对$\xi\in X$，$B^z\xi=(\zeta-z)^{-1}\langle\xi,y\rangle\langle\widetilde{R}(z)u,v\rangle x$。于是

$$r_\sigma[(\widetilde{H}\widetilde{R}(z))^2Q] = r_\sigma(B_z) = 2a\,|\langle\widetilde{R}(z)u,v\rangle|.$$

$\widetilde{R}(z)$关于ζ的 Laurent 展式是

$$\widetilde{R}(z) = \frac{-Q}{z-\zeta} + \sum_{k=0}^{\infty}(z-\zeta)^k\Sigma^{k+1}.$$

于是

$$\max_{z\in\Gamma}|\langle\widetilde{R}(z)u,v\rangle| \leqslant \sum_{k=0}(2a)^{-k}|\langle\Sigma^{k+1}u,v\rangle|. \quad \square$$

现在我们回到局部化结果的证明．引入下面的条件

存在这样一个$\widetilde{\varepsilon}$，使得对于$k\geqslant 1$有

$$|\langle\Sigma^k u,v\rangle| \leqslant a^k\|y\|\widetilde{\varepsilon}, \tag{6.10}$$

且设$\widetilde{r}:a^2\|y\|\widetilde{\varepsilon}$．g 是定义在$0\leqslant r\leqslant\frac{1}{4}$上的函数$r\mapsto$ $(1-\sqrt{1-4r})/2r$．

定理6.27 (Lemordant)设ζ是$\widetilde{T}$的单本征值，且(6.10)成立．于是若$\widetilde{r}<\frac{1}{4}$，则存在$T$的单本征值$\lambda$，使得$|\lambda-\zeta|\leqslant$ $g(\widetilde{r})|\langle\Sigma u,v\rangle|$．$\lambda$是$\sigma(T)$在圆盘$\{z\in\mathbb{C}:|z-\zeta|\leqslant 1/2a\}$中唯一的点．若$\langle Px,y\rangle\neq 0$，其中$P$是相应于$\lambda$的本征投影，则存在这样一个本征向量$\varphi$，由$\langle\varphi,y\rangle=1$规范化，使得$\|\varphi-x\|$ $\leqslant g(\widetilde{r})\|\Sigma u\|$．

证明　我们首先观察$\widetilde{T}$在Γ内的谱．

$\sigma(\widetilde{T})=\{\zeta\}\cup\sigma[(1-Q)T(1-Q)]$及$\sigma[(1-Q)T(1-Q)]$位于域$\{z\in\mathbb{C},\ |z-\zeta|\geqslant 1/\|\Sigma\|\}$内，由于条件$a\geqslant\|\Sigma\|$，$\Gamma$在这个域的外部．$\widetilde{T}$在$\Gamma$内有单本征值$\zeta$，且$\Gamma$位于$\rho(\widetilde{T})$内．

关于$T(t)=\widetilde{T}+t\widetilde{H}$，对$\Gamma$上的$z$，我们形式上定义$R(t,z)=(T(t)-z)^{-1}$，

$$P(t)=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma}R(t,z)dz.$$

$P(0)=Q$ 及

$$P(1)=P=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\Gamma}(T-z)^{-1}dz,\ 若\Gamma\subset\rho(T).$$

由命题3.26，若$\max_{z\in\Gamma}r_\sigma[\widetilde{H}\widetilde{R}(z)]<1$，则$t=1$属于$P(t)$的解析域．再由引理6.26和条件（6.10），我们得到

$$\max_{z\in\Gamma}r_\sigma^2[\widetilde{H}\widetilde{R}(z)]\leqslant 2a^2\|y\|\widetilde{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=4a^2\|y\|\widetilde{\varepsilon}<1.$$

所以$P(t)$当$|t|\leqslant 1$时是解析的；$\dim PX=\dim QX=1$．T（或$T(t)$）在Γ内有单本征值λ（或$\lambda(t)$），且展开式

$$\lambda(t)=\zeta+\sum_{k=1}^{\infty}t^k\lambda_k$$

对于$|t|\leqslant 1$是收敛的．

对于界限$\lambda-\zeta$，我们可以如在第三章中一样用Cauchy不等式．然而，利用$\widetilde{H}$的特殊构造，我们能得出较好的结果．

由第三章，第7节的（3.16）式，有

$$\lambda_k=\frac{(-1)^k}{k}\sum_{*}\underbrace{\mathrm{tr}[\widetilde{H}\Sigma^{p_1}\cdots\widetilde{H}\Sigma^{p_k}]}_{\tau},\quad k\geqslant 1,$$

且$*=\{P_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,k,\ \Sigma_{i=1}^{k}P_i=k-1\}$及

$\Sigma^0=-Q$．τ的括弧中包含形如$\widetilde{H}\Sigma^{p_i}$的$k$个项，其中至少有一个是$\widetilde{H}Q$．于是

$$-\tau = \mathrm{tr}(\widetilde{H}\Sigma^{p_1}\cdots\widetilde{H}Q)(Q\widetilde{H}\cdots\Sigma^{p_k}) = \mathrm{tr}[(Q\widetilde{H}\cdots\Sigma^{p_k})(\widetilde{H}\Sigma^{p_1}\cdots\widetilde{H}Q)].$$

$\widetilde{H}$的特殊构造（习题6.37）蕴涵在括弧中的算子对于奇数k为0，即，$\lambda_{2k+1}=0$，$k\geqslant 0$，及$\lambda-\zeta=\Sigma_{k=1}^{\infty}\lambda_{2k}$. 再次用$\widetilde{H}$的性质和秩$Q=1$，我们得到

$$\lambda_{2k} = \frac{1}{k}\sum_{\substack{p_1+\cdots+p_k=2k-1\\ p_i\geqslant 1}} \underbrace{\prod_{i=1}^{k}\mathrm{tr}(-\widetilde{H}\Sigma^{p_i}\widetilde{H}Q)}_{A}.$$

在λ_{2k}中，型A的项数是展开式$(x+x^2+\cdots)^k=[x/(1-x)]^k$中$x^{k2-1}$项的系数，也就是展开式$(1-x)^{-k}$中$x^{k-1}$的系数. 它等于

$$\frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!} = \frac{k}{2}4^k C_k^{1/2}.$$

型A的各项包含$\mathrm{tr}\widetilde{H}\Sigma\widetilde{H}Q$；所以

$$|\lambda_{2k}| \leqslant \frac{4^k}{2}C_k^{1/2}a^{2k-2}\|y\|^{k-1}\tilde{\varepsilon}^{k-1}|\langle\Sigma u,v\rangle|$$

$$\leqslant \frac{1}{2a^2\|y\|\widetilde{\varepsilon}}C_k^{1/2}(4a^2\|y\|\widetilde{\varepsilon})^k|\langle\Sigma u,v\rangle|.$$

用展开式 $1-\sqrt{1-4\widetilde{r}}=\Sigma_{k=1}^{\infty}C_k^{1/2}(4\widetilde{r})^k$，$\widetilde{r}<\frac{1}{4}$，

得到

$$|\lambda-\zeta| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_{2k}| \leqslant g(\widetilde{r})|\langle\Sigma u,v\rangle|.$$

设$\langle Px,y\rangle\neq 0$，即$QPx\neq 0$. 因而存在一个本征向量$\varphi$，它由$Q\varphi=x$规范化. 我们写出恒等式

$$(\widetilde{T}-\zeta)(\varphi-x)+(\widetilde{H}-\lambda+\zeta)\varphi+(\widetilde{T}-\zeta)x=0.$$

$$(1-Q)(\varphi-x)=(1-Q)\varphi=\varphi-x.$$

则有

$$\varphi - x + \Sigma(\widetilde{H} - \lambda + \zeta)(\varphi - x + x) = 0,$$

及

$$\varphi - x + [\Sigma \widetilde{H}(1 - Q) - (\lambda - \zeta)\Sigma](\varphi - x) = -\Sigma \widetilde{H} x,$$

所以

$$\varphi - x = -(1 - (\lambda - \zeta)\Sigma)^{-1} \Sigma \widetilde{H} x = -(\widetilde{T} - \lambda)^{-1} u$$

和

$$\lambda - \zeta = -\langle(\widetilde{T} - \lambda)^{-1} u, v\rangle.$$

由此得到

$$\|\varphi - x\| \leqslant \|(1 - (\lambda - \zeta)\Sigma)^{-1}\| \|\Sigma u\|$$

与

$$|\lambda - \zeta| \|\Sigma\| \leqslant g(\widetilde{r}) a^2 \|y\| \widetilde{\varepsilon} = g(\widetilde{r}) \widetilde{r}$$

以及

$$\frac{1}{1 - |\lambda - \zeta| \|\Sigma\|} \leqslant \frac{1}{1 - g(\widetilde{r})\widetilde{r}} = g(\widetilde{r}). \quad \square$$

我们还注意到 x （或 y ）并不要求是 T（或 T^* ）的逼近本征向量：而只有条件（6.10）必须成立。这在实用上是特别重要的，如同我们对于拟三角矩阵已经见到的（第一章，引理1.23）。

若 $\widetilde{\varepsilon}$ 充分小，则 $\langle Px, y\rangle$ 是非零的，这由以下的命题可知。

命题6.28 当 $\widetilde{r} < \frac{1}{8}$ 时，条件 $\langle Px, y\rangle \neq 0$ 成立。

证明　对于 $\xi \in X$，$Q(P - Q)Q\xi = \langle \xi, y\rangle(\langle Px, y\rangle - 1)x$；因而 $0 < \langle Px, y\rangle < 2 \Longleftrightarrow r_\sigma(Q(P - Q)Q) < 1$。设 Γ 是圆 $\{z; |z - \zeta| = 1/2a\}$，它包含 λ 与 ζ。于是

$$Q(P - Q)Q = \frac{-1}{2i\pi} \int_\Gamma Q[R(z) - \widetilde{R}(z)]Q dz$$

$$= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} Q \widetilde{R}(z) \sum_{1}^{\infty} (-\widetilde{H}\widetilde{R}(z))^{k} Q dz.$$

现在$Q\widetilde{R}(z) = \widetilde{R}(z)Q$且$Q(\widetilde{H}\widetilde{R}(z))^{2k-1}Q = 0$，及 $Q(\widetilde{H}\widetilde{R}(z))^{2k}Q = B_z^k, k \geqslant 1$，其中$B_z = Q(\widetilde{H}\widetilde{R}(z))^2 Q$。因而

$$Q\widetilde{R}(z)\sum_{k=1}^{\infty} B_z^k Q = Q\widetilde{R}(z)B_z(1-B_z)^{-1}Q$$

$$:= Q\widetilde{R}(z)C_z Q.$$

已知在条件（6.10）下，有$r_\sigma(B_z) = 2a|\langle\widetilde{R}(z)u, v\rangle| \leqslant 4\widetilde{r} < 1$。对于$\xi \in X$，$Q\widetilde{R}(z)C_z Q\xi = [1/(\zeta - z)]\langle C_z\xi, y\rangle x$，且有

$$Q(P-Q)Q\xi = \frac{-1}{2i\pi}\left[\int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta - z}\langle C_z\xi, y\rangle dz\right] x.$$

由于$Q(P-Q)Q$的秩为1且有本征方向$\{x\}$，得

$$r_\sigma[Q(P-Q)Q] \leqslant \frac{2a}{2a} \max_{z\in\Gamma} |\langle C_z x, y\rangle|.$$

现在$|\langle C_z x, y\rangle| = r_\sigma(C_z) = r_\sigma(B_z)(1 - r_\sigma(B_z))^{-1}$

$\leqslant 4\widetilde{r}(1-4\widetilde{r})$。若$\widetilde{r} < \frac{1}{8}$，则条件$4\widetilde{r}/(1-4\widetilde{r}) < 1$满足.

注意到$g\left(\frac{1}{8}\right) < 1.2$。□

习题

6.40 证明$\varphi - x + \Sigma u = (\lambda - \zeta)\Sigma(1 - (\lambda - \zeta)\Sigma)^{-1}\Sigma u$。

6.41 证明

$$|\lambda - \zeta + \langle \Sigma u, v\rangle \leqslant (g(\widetilde{r}) - 1)|\langle \Sigma u, v\rangle|,$$

$$\|\varphi - x + \Sigma u\| \leqslant (g(\widetilde{r}) - 1)\|\Sigma u\|.$$

验证当$\widetilde{r} \to 0$时有$g(\widetilde{r}) - 1 \sim \widetilde{r}$。

6.42　直接证明，若$\varepsilon\varepsilon^*$充分小，则有$\langle Px, y\rangle \neq 0$。

6.43　用分裂

$$T = [P_n T P_n + (1 - P_n) T (1 - P_n)] + [(1 - P_n) T P_n + P_n T (1 - P_n)]$$

当在Γ上有$T_n - z \xrightarrow{ss} T - z$时，对于$T \in \mathscr{L}(X)$定义一个收敛的迭代格式。

因为$1 \leqslant g(\widetilde{r}) \leqslant 2$，若我们能知道方程$(\widetilde{T} - \zeta)W = u$在$(1 - Q)X$中的唯一解$W = \Sigma u$，则定理6.27中的界是可计算的。关于$W$的信息能够用来分别计算习题6.41中$\zeta$与$x$的校正$-\langle w, v\rangle$与$-w$。

再有若T的本征值是相近的，则Σ是病态的，现在我们给出一组本征值的局部化结果。

5.3 一组本征值的局部化结果

现在的两组数据是两组m个向量，分别为$\mathrm{Dom}(T)$中的$\{x_i\}_1^m$和$\mathrm{Dom}(T^*)$中的$\{y_i\}_1^m$，满足$\|x_i\| = 1$，$\langle y_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$，$i, j = 1, \cdots, m$以及$m$个复数$\zeta_i := \langle Tx_i, y_i\rangle$，$i = 1, \cdots, m$。$\hat{\zeta} = (1/m)\Sigma_{i=1}^m \zeta_i$是广义 Rayleigh 商．设$V$（或$W$）是由$\{x_i\}_1^m$（或$\{y_i\}_1^m$）生成的。$Q = \Sigma_{i=1}^m \langle\cdot, y_i\rangle x_i$是沿$W^\perp \cap X$在$V$上的投影．设

$$\Sigma := (1 - Q) T_{\hat{\zeta}}^{-1} (1 - Q)$$

是有界的，其中$T_{\hat{\zeta}} := [(1 - Q)(T - \hat{\zeta})]_{|W^\perp \cap X}$。

为简单计，首先设QTQ是对角的：$\langle Tx_j, y_i\rangle = \zeta_i \delta_{ij}$。这意味着$\{x_i\}_1^m$（或$\{y_i\}_1^m$是$QTQ$（或$Q^*T^*Q^*$）的本征向量组成的基。令$\eta := \max_{i=1,\ldots,m} |\zeta_i - \hat{\zeta}|$，

$$u_i := (T - \zeta_i) x_i, \qquad \|x_i\| = 1,$$
$$v_i := (T^* - \overline{\zeta}_i) y_i, \quad \|y_i\| \geqslant 1.$$

设 a 是$\|\Sigma\|$的一个上界：$a \geqslant \|\Sigma\|$。现在条件（6.10）具有如下的形式

存在$\tilde{\varepsilon}$，使得对于$k \geqslant 1$，$\max\limits_{i,j} |\langle \Sigma^k u_i, v_j \rangle| \leqslant \frac{1}{m} a^k \tilde{\varepsilon}$.(6.11)

令 $d := 1/(1-2a\eta)$，且设 $\eta < 1/4a$。则 $1 \leqslant d < 2$。注意到当 QTQ 的本征值相近时，即当$\hat{\zeta}$能足够好地代表各个ζ_i（$i = 1, \cdots, m$）时，η 是小的。我们令$\tilde{r} := a^2 d \tilde{\varepsilon}$。

定理6.29 我们设Σ是有界的，$\eta < 1/4a$，且（6.11）满足。于是，若$\tilde{r} < \frac{1}{8}$，则T 的谱在圆盘$\{z \in \mathbb{C};\ |z - \zeta| < 1/2a\}$中由$m$个重复的本征值组成。它们的算术平均$\hat{\lambda}$满足$|\hat{\lambda} - \hat{\zeta}| \leqslant (1/2a)[4\tilde{r}/(1-4\tilde{r})]$。在圆盘中每个本征值$\lambda$满足$|\lambda - \hat{\zeta}| \leqslant \eta + 2a\tilde{\varepsilon}$。

证明见 Chatelin (1983)。

至今我们一直假设QTQ是对角的，但是对于如同 QTQ 的有限秩非自伴算子，本征向量构成的基（即使它存在）的计算也并非总是数值稳定的．因而直接在QTQ的三角形式上做是合理的。依照Lemordant (1977)，设QTQ是拟三角的。QTQ 的秩为m，且基$\{x_i\}_1^m$能够选择为V中的一组m个标准正交向量。V是这样的空间，在其中QTQ是拟三角的（例如，由 QR 算法）。$\{y_i\}_1^m$是W中的伴随基，$\langle y_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$，$i, j = 1, \cdots, m$。在此基下，$QTQ$ 的对角线为$\{\xi_i\}_1^m$。

现在η用$Q(T - \hat{\zeta})Q$与它的严格上三角部分之差的范数来代替。当QTQ是拟上三角时，并且对角元素$\{\zeta_i\}_1^m$与它们的

算术平均$\hat{\zeta}$充分接近时，η是小的。

在关于V和W的适当的假设之下，能够得到定理6.29的推广。由于框架的一般化，它具有更为复杂的形式。这在Chatelin（1983）和Lemordant（1977）中给出。

我们重新考虑这种情形，对于一个秩为N的拟三角阵，即使向量e_i（$i \neq 1$ $i \neq N$）不是A或A^H的近似本征向量，$a_{ii} = e_i^H A e_i$，$i = 1, \cdots, N$也是近似本征值。然而，当A与这样一个三角矩阵充分接近，后者没有两个对角元素等于a_{ii}（引理1.23）时，条件（6.10）（或其矩阵形式（1.17））对于$x = y = e_i$是成立的。

更一般地，若A与一个具有m个相近的对角线元素的三角矩阵充分接近时，选择$\{x_i\}$，$\{y_i\}$为典范基的m个向量，能够证明条件（6.11）是成立的。

例6.12 设A是第三章例3.20中的拟三角矩阵，它有三个相近的对角元素

$$A = \begin{vmatrix} -6 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 10^{-6} & 3.9998 & 1 & 2 & 2 \\ 10^{-6} & 10^{-4} & 4.0002 & 1 & 1 \\ 10^{-6} & 10^{-4} & 10^{-4} & 4 & 1 \\ 10^{-6} & 10^{-6} & 10^{-6} & 10^{-6} & 14 \end{vmatrix}$$

A有本征值

$$\lambda_1 = -6 + 7 \times 10^{-7}, \quad \lambda_2 = 4.04930,$$

$$\lambda_3 = 3.97535 + i \times 0.03771,$$

$$\lambda_4 = 3.97535 - i \times 0.03771, \quad \lambda_5 = 14 + 5 \times 10^{-7}.$$

借助于圆心分别在-6及14且半径等于4×10^{-6}的Gershgorin圆盘容易把λ_1和λ_5局部化。

对于其余的三个本征值的组，我们考虑在典范向量e_2, e_3,

e_4上的正交投影Q。依照分解$\mathbb{C}^5=\{e_2,e_3,e_4\}\oplus\{e_1,e_5\}$，$A$被分解成4个部分

$$A=\left(\begin{array}{c|c} QAQ & QA(I-Q) \\ \hline (I-Q)AQ & (I-Q)A(I-Q) \end{array}\right)$$

$$=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3.9998 & 1 & 2 & 10^{-6} & 2 \\ 10^{-4} & 4.0002 & 1 & 10^{-6} & 1 \\ 10^{-4} & 10^{-4} & 4 & 10^{-6} & 1 \\ \hline 2 & 3 & 3 & -6 & 1 \\ 10^{-6} & 10^{-6} & 10^{-6} & 10^{-6} & 14 \end{array}\right|$$

我们计算

$$\max_{x,\|x\|_1=1}\|(I-Q)AQx\|_1=3+10^{-6},$$

$$\max_{x,\|x\|_\infty=1}\|(I-Q)A^HQx\|=2,$$

$$\hat{\zeta}=\frac{1}{3}\mathrm{tr}QAQ=4,$$

$$\mathring{A}_4=[(I-Q)(A-4I)]_{\{e_1,e_5\}}=\begin{pmatrix}-10 & 1\\ 10^{-6} & 10\end{pmatrix},$$

$$\mathring{A}_4^{-1}=\frac{-1}{100+10^{-6}}\begin{pmatrix}10 & -1\\ -10^{-6} & -10\end{pmatrix}.$$

A的对应于e_i及$\zeta_i=e_i^HAe_i$的余向量是

$$u_i=(A-\zeta_iI)e_i \quad \text{for} \quad i=2,3,4.$$

同样地

$$v_i=(A^H-\zeta_iI)e_i, \qquad i=2,3,4$$

QAQ是拟三角的。设U是它的严格上三角部分，则有

$$Q(A-4I)Q-U=\begin{pmatrix} -2\times10^{-4} & 0 & 0 \\ 10^{-4} & 2\times10^{-4} & 0 \\ 10^{-4} & 10^{-4} & 0 \end{pmatrix},$$

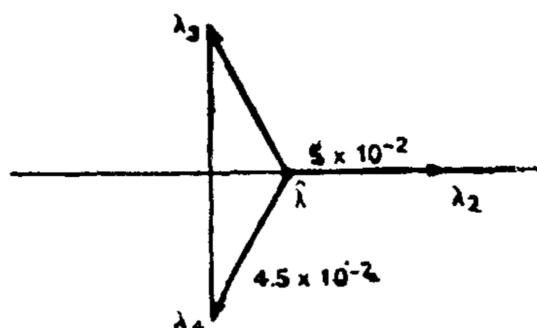


图 6.1

且它的L^1范数是$\eta=4\times10^{-4}$。注意到$v_j^H\Sigma u_j=v_j^H(1-Q)\times\Sigma(1-Q)u_i$。当$a=0.166$和$\widetilde{\varepsilon}<5\times10^{-6}$时，条件

$$\max_{i,j=2,3,4}|v_j^H\Sigma^k u_i|\leqslant a^k\widetilde{\varepsilon}$$

成立。能够得出这样的结论，在圆盘$\{z;|z-4|\leqslant3\}$中恰好有A的三个本征值，使得

$$\max_i|\lambda_i-4|\leqslant0.126.$$

算术平均$\hat{\lambda}$为$|\hat{\lambda}-4|\leqslant4.7\times10^{-7}$，参见Chatelin (1983)。实际的误差分别是，$\max_{i=2,3,4}|\lambda_i-4|=0.05$及$\hat{\lambda}-4=5.7\times10^{-8}$。注意在$\lambda_i-4$与$\hat{\lambda}-4$度量上的显著差别，见图6.1。

我们确信并没有用到A相应于本征值簇的逼近本征向量。而仅仅用到了所考虑的3×3对角块的不变子空间的基。

在本节的结尾，我们可以说如上的结果是从基$\{x_i\}_1^m$的信息得到T的一组m个本征值的局部化，$\{x_i\}_1^m$是T的“部分”QTQ的一个近似不变子空间V的基，而在V中QTQ是拟三角

的。V不必是T的近似不变子空间。它与W一起应该满足形如（6.11）的较弱的条件。

6. 误差界中常数的渐近性态

6.1 一般的结果

第5节中的局部化结果可以用来得出关于第4节中给出的误差界中常数渐近性态的某些信息。

若λ是单的，我们选择T_n的本征向量φ_n（或T_n^*的φ_n^*），且由$\langle\varphi_n^*,\varphi_n\rangle=\|\varphi_n\|=1$规范化后作为向量$x$（或$y$）。$\zeta_n=\langle T\varphi_n,\varphi_n^*\rangle$。余向量为$u_n:=(T-\zeta_n)\varphi_n$（或$v_n:=(T^*-\zeta_n)\varphi_n^*$）。令$\Sigma_n:=(1-P_n)\mathring{T}_{\zeta_n}^{-1}(1-P_n)$。应用定理6.27给出

$$
\begin{aligned}
|\lambda-\zeta_n|&\leqslant 2|\langle\Sigma_n u_n,v_n\rangle|\\
&\leqslant 2\|\Sigma_n u_n\|\|v_n\|\leqslant 2\|\Sigma_n\|\|u_n\|\|v_n\|.
\end{aligned}
$$

在引理6.16给出的界中的常数具有$\|\Sigma_n\|$的渐近性态。类似地，若T在Hilbert空间中是自伴的，令$\rho_n=(T\varphi_n,\varphi_n)$是Rayleigh商。关于$|\lambda-\rho_n|$的界限的常数依赖于$\delta(\rho_n)=\mathrm{dist}(\rho_n,\sigma(T)-\{\lambda\})$的渐近性态。

6.2 关于⊥—Galerkin与Rayleigh-Ritz法的渐近等式

在带有正交投影的Galerkin法应用于自伴紧算子情形下，我们来叙述本征元的收敛速率的渐近等式。它们对于Rayleigh-Ritz法应用于自伴且有紧预解式的椭圆型微分算子的情形也是有效的。

设H_n，$n=1,2\cdots$是Hilbert空间H的有限维子空间的序列。我们设H_n上的正交投影π_n，使得对于$x\in H$，有$\pi_n x\to x$。设T是紧的自伴算子，且$T_n=\pi_n T\pi_n$是它的Galerkin逼近。由假设$\|T-T_n\|\to 0$。设λ是T的代数重数为m的本征值。有

T_n的m个本征值，依照它们的重数来编号，如μ_{in}， $i=1,\cdots,m$，它们收敛于λ. P（或P_n）相应于λ（或$\{\mu_{in}\}_1^m$)的正交谱投影. r_n是普通的实常数；当n趋向无穷时它趋向于1 .

命题6.30 对于充分大的n，下面的等式成立：

$$\|\varphi-P_n\varphi\|=r_n\|(1-\pi_n)\varphi\|,\quad \varphi\in\ker(T-\lambda);$$

$\|(1-P)\varphi_{in}\|=r_n\|(1-\pi_n)P\varphi_{in}\|$, $(\lambda-\mu_{in})/\lambda$
$=r_n\|(1-\pi_n)P\varphi_{in}\|^2$,

对于$\varphi_{in}\in\mathrm{Ker}(T_n-\mu_{in})$，且$i=1,\cdots,m$，按照所考虑的情形,其中$r_n$是依赖于$\varphi$，$\varphi_{in}$， λ，μ_{in}的实常数。当$n\to\infty$时，$r_n\to1$。

证明　考虑对于$i=1,\cdots,m$的恒等式

$(T_n-\mu_{in})\pi_n\varphi=\pi_nT(\pi_n-1)\varphi+(\lambda-\mu_{in})\pi_n\varphi$,

$\varphi\in\ker(T-\lambda)$. 并把P_n和T_n交换。左乘$Q_n=1-P_n$，我们得到

$$(T_n-\mu_{in})Q_n\pi_n\varphi=Q_n[\pi_nT(\pi_n-1)\varphi+ +(\lambda-\mu_{in})\pi_n\varphi],$$

$(T_n-\mu_{in})^{-1}$在Q_nH上是一致有界的. 于是

$$\|Q_n\pi_n\varphi\|\leqslant M[c\|T(\pi_n-1)\|\|(1-\pi_n)\varphi\| + |\lambda-\mu_{in}|\ \|Q_n\pi_n\varphi\|].$$

$\mu_{in}\to\lambda$及$(1-P_n)\pi_n\varphi=(1-P_n\pi_n)\varphi-(1-\pi_n)\varphi$.所以

$$\frac{1}{\|(1-\pi_n)\varphi\|}\big|\ \|\varphi-P_n\pi_n\varphi\|-\|(1-\pi_n)\varphi\|\ \big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\|Q_n\pi_n\varphi\|}{\|(1-\pi_n)\varphi\|}\leqslant c\|T(\pi_n-1)\|.$$

P_n是P_nH上的正交投影，而π_n则是在$H_n\supset P_nH$上的。因而

$$\|(1-\pi_n)\varphi\|\leqslant\|(1-P_n)\varphi\|\leqslant\|(1-P_n\pi_n)\varphi\|,$$

和

$$\|(1-P_n)\varphi\|=r_n\|(1-\pi_n)\varphi\|.$$

当$n\to\infty$时，$r_n\to 1$，$r_n\geqslant 1$，且r_n不依赖于φ。我们现在写

$$\varphi_{in}-P\varphi_{in}=\varphi_{in}-P_n\pi_nP\varphi_{in}+P_n\pi_nP\varphi_{in}-P\varphi_{in},$$

$$\varphi_{in}-P_n\pi_nP\varphi_{in}=(P-P_n\pi_n)(P\varphi_{in}-\varphi_{in}).$$

由于 $$P-P_n\pi_n=(P-P_n)\pi_n+P(1-\pi_n),$$

$$\|P-P_n\pi_n\|\to 0.$$

从

$$[1+(P-P_n\pi_n)](\varphi_{in}-P\varphi_{in})=(1-P_n\pi_n)P\varphi_{in}$$

得出

$$\|\varphi_{in}-P\varphi_{in}\|=r_n\|(1-P_n\pi_n)P\varphi_{in}\|=r_n\|(1-\pi_n)P\varphi_{in}\|.$$

对于 $i=1,\cdots,m$,

$$\begin{aligned}(\lambda-\mu_{in})(\varphi,\varphi_{in})&=(T\varphi,\varphi_{in})-(\varphi,T_n\varphi_{in})\\&=(T(1-\pi_n)\varphi,\varphi_{in})=(T(1-\pi_n)\varphi,\varphi_{in}-P\varphi_{in})\\&\quad+(T(1-\pi_n)\varphi,P\varphi_{in}).\end{aligned}$$

我们定义

$$A_{in}=(T(1-\pi_n)\varphi,\varphi_{in}-P\varphi_{in}).$$

显然地

$$\frac{A_{in}}{\|(1-\pi_n)\varphi\|\|(1-\pi_n)P\varphi_{in}\|}\to 0$$

且

$$(T(1-\pi_n)\varphi,P\varphi_{in})=\lambda((1-\pi_n)\varphi,(1-\pi_n)P\varphi_{in})=$$
$$\lambda\|(1-\pi_n)P\varphi_{in}\|^2$$

若φ选择作为$P\varphi_n$。于是我们有等式

$$\frac{\lambda-\mu_{in}}{\lambda}\frac{\|P\varphi_{in}\|^2}{\|(1-\pi_n)P\varphi_{in}\|^2}=1+\frac{A_{in}}{\|(1-\pi_n)P\varphi_{in}\|^2}=r_n,$$

其中$\|P\varphi_{in}\|\to 1$。□

习题

6.44 对应用于有紧预解式的自伴椭圆型微分算子的Rayleigh-Ritz法证明类似的等式。

6.45 当$\pi_n=\pi_n^*$和$T=T^*$时，用命题 6.30 得出习题6.12的界是最佳的结论。

6.46 设λ是单的。用分解式

$$\pi_n T=T_n=[PT_nP+(1-P)T_n(1-P)]+$$
$$[(1-P)T_nP+PT_n(1-P)]$$

证明 $(\lambda-\lambda_n)/\lambda=r_n\|(1-\pi_n)\varphi\|^2$，其中$r_n\to 1$，$\|\varphi\|=1$.

对正规算子T，关于本征向量的等式仍然成立。对于本征值，我们得到

$$(\lambda-\mu_{in})/\lambda=z_n\|(1-\pi_n)P\psi_{in}\|^2,$$

其中z_n是复常数，它趋于1，且$\psi_{in}\in \mathrm{Ker}(T_n^*-\overline{\mu_{in}})$（见Chatelin，1975）。这意味着每个本征值μ_{in}位于圆盘

$$\{z;\ |z-\lambda|\leqslant r_n|\lambda|\,\|(1-\pi_n)P\psi_{in}\|^2\}$$

内（见图6.2）。

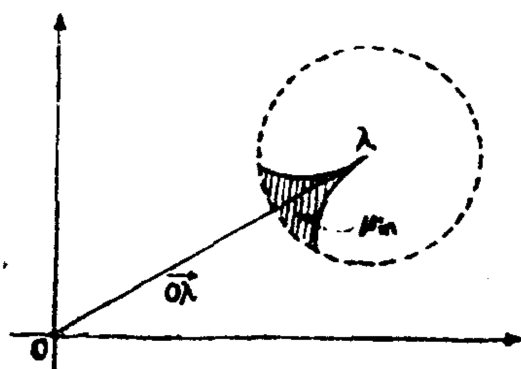


图 6.2

这两条限制的曲线两者在λ处相切于向量$\overrightarrow{O\lambda}$，且当$n\to\infty$时，面积变狭到半直线$[O,\lambda]$上。这是对于自共轭情形中状

况的正则情形的推广，在那里有

$$0 \leqslant \lambda - \mu_{in} \leqslant r_n \lambda \|(1-\pi_n) P\varphi_{in}\|^2,$$

对于 $\lambda > 0$ （见图6.3）.

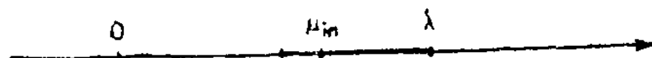


图 6.3

让我们从一个例子看出常数 r_n 怎样趋于1. 我们考虑[0，1]上的Sturm-Liouville问题：

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0, \quad 0 < t < 1,$$
$$x(0) = x(1) = 0. \tag{6.12}$$

对于 $H = L^2(0,1)$， $V = H_0^1(0,1)$， (6.12) 等价于

$$(x,y)_V = \lambda(x,y)_H \quad 对所有的 y \in V.$$

本征元是 $\lambda_i = i^2\pi^2$， $\varphi_i(t) = \sin i\pi t$， $i = 1,2,\cdots$. 我们应用Rayleigh-Ritz法，其中 V_n 是分段五阶的 Hermite 多项式空间，多项式定义在点 $t_i = i/n$， $i = 0,\cdots,n$. π_n 是 V_n 上的 V-正交投影. 单本征值 λ_i 由单本征值 λ_{in} 逼近，P_{in} 是相应的本征投影. 表 6.5 给出

$$\alpha_i^n := \frac{(\lambda_{in} - \lambda_i)/\lambda_i}{\|(1-\pi_n)\varphi_i\|_V^2}, \quad \beta_i^n := \frac{\|(1-P_{in})\varphi_i\|_V}{\|(1-\pi_n)\varphi_i\|_V},$$

其中 $\|\varphi_i\|_V = 1$，关于第4个、第6个和第10个本征值：$i = 4, 6, 10$. 我们可能已注意到 $0 \leqslant \alpha_i^n \leqslant 1$，在另一方面，$\beta_i^n \geqslant 1$.

6.3 文献评论

第5节中的局部化结果是Kato-Temple不等式的非自伴情形（Kato, 1949）的一种自然的推广. 加限制的变形已在Fiedler和Pták（1964），Pták（1976）以及Redont (1979a)

表6.5 α_i^n和β_i^n的渐近性态

i	n	$\dim V_n$	$\lambda_{in}-i^2\pi^2$	$1-\alpha_i^n$	β_i^n-1
4	4	13	1.32×10^{-2}	9.34×10^{-2}	4.2×10^{-4}
	5	16	5.06×10^{-4}	5.05×10^{-2}	2.3×10^{-4}
	6	19	9.36×10^{-5}	3.81×10^{-2}	7.0×10^{-5}
	7	22	1.95×10^{-5}	2.71×10^{-2}	4.0×10^{-5}
	8	25	4.80×10^{-6}	1.98×10^{-2}	1.0×10^{-5}
	9	28	1.38×10^{-6}	1.50×10^{-2}	2.0×10^{-5}
	10	31	4.57×10^{-7}	1.18×10^{-2}	1.0×10^{-6}
6	4	13	3.69×10^{-1}	1.88×10^{-1}	1.67×10^{-3}
	5	16	5.73×10^{-2}	1.17×10^{-1}	1.30×10^{-3}
	6	19	3.62×10^{-2}	1.01×10^{-1}	2.7×10^{-4}
	7	22	2.99×10^{-3}	6.56×10^{-2}	3.1×10^{-4}
	8	25	8.10×10^{-4}	5.11×10^{-2}	1.3×10^{-4}
	9	28	2.40×10^{-4}	3.93×10^{-2}	7.0×10^{-5}
	10	31	7.00×10^{-5}	3.07×10^{-2}	4.0×10^{-6}
10	4	13	35.9	3.72×10^{-1}	1.34×10^{-3}
	5	16	2.75	2.53×10^{-1}	1.03×10^{-3}
	6	19	2.44	2.12×10^{-1}	3.89×10^{-3}
	7	22	8.75×10^{-1}	1.77×10^{-1}	1.47×10^{-3}
	8	25	3.20×10^{-1}	1.66×10^{-1}	9.1×10^{-4}
	9	28	1.20×10^{-1}	1.19×10^{-1}	7.0×10^{-4}
	10	31	1.10×10^{-1}	1.05×10^{-1}	1.6×10^{-4}

中给出。它们是以T的逼近本征向量的信息为基础的。

定理6.27是第三章中所述的解析摄动论对于分解

$$T=[QTQ+(1-Q)T(1-Q]+[(1-Q)TQ+QT(1-Q)]$$

应用的一个例子．感兴趣的读者能在 Lemordant (1980) 中发现对于 T_n 的分解的一种类似应用，这是由于用 T 的谱投影 P 去得到收敛速率

$$T_n=[PT_nP+(1-P)T_n(1-P]+[(1-P)T_nP+ \\ +PT_n(1-P)]$$

而导出的．

第七章　一些应用实例

引　　言

在本章中，我们描述关于前面几章给出的理论的两种不同类型的应用。在A部分中，我们寻求最优的收敛速率。作为第一步，我们考虑第二类 Fredholm 积分方程及其相应的本征值问题。投影方法应用于逐段多项式上的投影或者等同于 L^2 中的⊥—Galerkin法，或者等同于C中 Gauss 点上的配置法。这一研究具有双重的目的：

（1）把本征向量（及不变子空间）按几乎相同的方式当作解来对待；

（2）对上面引用的两个投影方法作平行的分析，以使许多证明能够得到分解。

投影所起的决定性作用，在得到的收敛速率中清楚地显示出来。在有关方面，讨论了两个方法之间的相似与差异。对于光滑的核与某类可能不连续的核得到了超收敛性。这就完成了第六章第2节中所给出的结果。第二步，我们借助第四章第9.4节给出的解释，将相同的分析用于一个常微分方程。

在B部分中，我们提出一个在第五章中所引入的本征元的迭代加细的计算格式，并给出数值验算。

A. 积分方程与微分方程的超收敛结果

首先，我们考虑如下形式的第二类积分方程

$$(Tx)(t)-zx(t)=f(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1, \qquad (7.1)$$

的某种投影方法，其中算子T定义为

$$x(t)\mapsto\int_0^1 k(t,s)x(s)ds,\ 0\leqslant t\leqslant 1. \qquad (7.2)$$

连同（7.1），我们考虑本征值问题

$$(T\varphi)(t)=\lambda\varphi(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ \varphi\neq 0. \qquad (7.3)$$

其中λ是T的孤立本征值。

（7.1）与（7.3）视为复Banach空间X（以后将专指L^∞或L^2）中的方程．假定T是X中的紧算子，在C中取值，$z\in\rho(T)$，$\rho(T)$为T的预解集．设X_n是X的有限维子空间，π_n是到X_n上的投影．那么，投影方法在于以

$$(\pi_n T-z)x_n=\pi_n f,\ x_n\in X_n, \qquad (7.4)$$

$$\pi_n T\varphi_n=\lambda_n\varphi_n,\ \varphi_n\in X_n,\ \|\varphi_n\|=1. \qquad (7.5)$$

分别逼近（7.1）与（7.3）．x_n（或φ_n）是对应于T的逼近$T_n^P=\pi_n T$（P表示投影）的投影解（或本征向量）．

给定$[0,1]$的一个严格分划$\Delta=\{t_i\}_0^n$使得$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$，设X_n为如下的逐段多项式集合$\mathbb{P}_{r,\Delta}$，即在每个子区间$[t_{i-1},t_i)_{(i=1,\cdots,n)}$上是次数小于$r+1$的逐段多项式，而在$t=1$处是按连续性定义其值．我们将考虑逼近的两种类型：

（a）$X=L^2(0,1)$，且π_n^1是$L^2(0,1)$在$\mathbb{P}_{r,\Delta}$上的正交投影；

（b）$X=L^\infty(0,1)$，且π_n^2是关于$C(0,1)\subset L^\infty(0,1)$中的$x$定义的插值映射，使得$\pi_n^2x$是$x$于每个子区间上，在$r+1$个Gauss点$\{\tau_j^i\}_{j=1}^{r+1}$（$i=1,\cdots,n$）处的插值．

π_n^2x是逐段连续的，因此可以定义$\pi_n^2(\pi_n^2x)$且等于π_n^2x

（习题 4.6）。定义于$C(0,1)$上的π_n^2不是一个投影，但可作为定义于第 2 节中的逐段连续函数空间 C_Δ 内的投影。

情形（a）对应于 ⊥ - Galerkin 法，而情形（b）则对应于在 Gauss 点$\{\tau_j^i\}$处的配置法．设π_n是表示两个映射π_n^1或 π_n^2中的任意一个．若 $z \neq 0$（或 $\lambda_n \neq 0$），我们考虑迭代解$\widetilde{x}_n$（或本征向量$\widetilde{\varphi}_n$）由下式给出

$$\widetilde{x}_n = \frac{1}{z}(Tx_n - f) \quad （或 \widetilde{\varphi}_n = \frac{1}{\lambda_n}T\varphi_n）.$$

因为T是紧的，$\rho(T)$中的z是非零的，或因T的孤立本征值是非零的，于是$\lambda_n \neq 0$并不是一个限制。

$\widetilde{x}_n$及$\widetilde{\varphi}_n$是与T的逼近$T_n^S = T\pi_n$（S表示Sloan）对应的方程

$$(T\pi_n - z)\widetilde{x}_n = f \tag{7.6}$$

$$T\pi_n\widetilde{\varphi}_n = \lambda_n\widetilde{\varphi}_n \tag{7.7}$$

的解。回顾$\pi_n\widetilde{x}_n = x_n$，$\pi_n\widetilde{\varphi}_n = \varphi_n$，因而在情形（b）中，迭代解与解本身在配置点上是一致的。

在A部分的其余部分，$\|\cdot\|_\nu$在情形（a）中取为$\|\cdot\|_2$，在情形（b）中取为$\|\cdot\|_\infty$。如果k和f是足够光滑的，众所周知，对于两种情形（a）与（b）均有：当$\|\widetilde{x}_n - x\|_\nu = O(h^{2r+2})$时，$\|x_n - x\|_\nu = O(h^{r+1})$（习题 4.38、4.39）。类似的结果对$\widetilde{\varphi}_n$也成立(第六章第 2 节).我们将看到，当$k$是常微分方程的Green 函数时，这样的超收敛性在分划点$\{t_i\}_0^n$仍然成立.

对于⊥-Galerkin 法，问题是寻找$x_n - \widetilde{x}_n$（或$\varphi_n - \widetilde{\varphi}_n$）的逐点估计或整体的$L^\infty$—估计。证明分为四步：

1. 在L^2中证明其收敛性；

2. 在 L^2 中 $x_n-\widetilde{x}_n$ 与 $\varphi_n-\widetilde{\varphi}_n$ 的界；

3. $x-\widetilde{x}_n$ 和 $\varphi-\widetilde{\varphi}_n$ 的逐点界；

4. 推演 L^∞ 中的整体界.

配置法的一些性质，在第5节中由 ⊥-Galerkin 法导出. 我们通过这样的作法，强调两种方法之间的密切联系以及把证明分解为多步. 仅留下少部分工作即可从 (a) 得到 (b) 的超收敛结果，即仅要确定 $\widetilde{x}_n$ (或 $\widetilde{\varphi}_n$) 直到某阶的所有导数关于 n 一致有界. 这一部分运用了de Boor和Swartz (1973) 发展了的配置法技巧. 而且，当核是光滑时，这一部分甚至是不必要的.

1. 问题的定义

1.1 积分算子的性质

$\alpha\geqslant 0$ 及 $\gamma\geqslant -1$ 为整数. 我们讨论下面一类核. 回顾记号：对于 $0\leqslant t\leqslant 1$，$k_t(s):=k(t,s)$. 设 k_1 (或 k_2) 是定义在三角形 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ (或 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$) 上，$k_{1t}$ (或 k_{2t}) 相应地定义在 $[0,t]$ (或 $[t,1]$) 上.

定义 对于 $\alpha\geqslant 0$ 及 $\alpha\geqslant\gamma\geqslant -1$，核 $k(t,s)$ 关于 t 是属于类 $\mathfrak{G}(\alpha,\gamma)$，当且仅当对于 $\gamma\geqslant 0$ 与 $[0,1]$ 中的 t，

$$k_t\in C^\alpha(0,t)\cap C^\alpha(t,1)\cap C^\gamma(0,1) \qquad (7.8)$$

在 $[0,1]$ 上关于 t 一致地成立. 若 $\gamma=-1$，k_t 对 $s=t$ 为第一类间断，则称 γ 为 k 关于 t 的连续性，并称 α 为它的关于 t 的阶 (光滑性的). 若 $\gamma=\alpha$，则称 k 是关于 t 具有连续性 α 的光滑核.

以 $p=q=r=2$，应用定理4.1于属于类 $\mathfrak{G}(\alpha,\gamma)$ 的核 k_t 的积分算子，来证明 T：$L^2\to C$ 是紧算子. 因而 T 是 $L^2\to L^2$ 与 $L^\infty\to L^\infty$ 的紧算子.

1.2 抽象框架与紧算子

对于$\rho(T)$中的z，$R(z)=(T-z)^{-1}$是有界的且(7.1)的唯一解是$x=R(z)f$。设$\lambda\neq 0$是T的一个具有代数（或几何）重数m（或g）及陡度l，$1\leqslant l\leqslant m$，$1\leqslant g\leqslant m$的孤立本征值。其相应的本征空间$E:=\mathrm{Ker}(T-\lambda)$是$T-\lambda$的零空间，$\dim E=g$；不变子空间是$M:=\mathrm{Ker}(T-\lambda)^m$，$\dim M=m$。并且，$\mathrm{Ker}(T-\lambda)^l=\mathrm{Ker}(T-\lambda)^m$。

设Γ是$\rho(T)$内围绕λ的Jordan曲线，它既不包含0，也不包含T的任何其它本征值。$P:=(-1/2i\pi)\int_\Gamma R(z)dz$是相应于$\lambda$的谱投影，$M=PX$。对于$\Gamma$内的任意$z$，算子$T-z$在$(1-P)X$上是可逆的，$S(z):=(T-z)^{-1}(1-P)$是$T$在$z$点关于$\lambda$的约化预解式。

设$\{T_n\}$是$\mathscr{L}(X)$中使得T_n逐点收敛于T的算子序列，T_n或是$T_n^P=\pi_nT$或是$T_n^S=T\pi_n$.若$\Gamma\subset\rho(T_n)$，则对于$z\in\Gamma$，可以定义T_n的预解式$R_n(z)$与谱投影$P_n:=(-1/2i\pi)\int_\Gamma R_n(z)dz$。若$T_n$在$\Gamma$内是强稳定的，在$\Gamma$内恰好有$T_n$的$m$个本征值$\{\mu_{in}\}_{i=1}^m$（按照它们的代数重数计数），$\hat{\lambda}_n$是它们的算术平均值，$\lambda_n$是任意一个不同的本征值。$M_n:=P_n^PX$是相应于$\Gamma$内所有不同本征值的$T_n^P=\pi_nT$的不变子空间的直和。类似地，$\widetilde{M}_n:=P_n^SX$对应于$T_n^S=T\pi_n$。容易验证$\widetilde{M}_n=TM_n$（习题4.25），称$\widetilde{M}_n$是迭代不变子空间.

设$h:=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i-t_{i-1})$。若$h\to 0$，则情形(a)(或(b))中，对于$L^2$（或$C$）中的任意$x$，在$L^2$中成立$\|\pi_n^1x-x\|_2\longrightarrow 0$（或在$L^\infty$中成立$\|\pi_n^2x-x\|_\infty\longrightarrow 0$）。因为$T$是$L^2$（或$L^\infty$）中取值于$C$的紧算子，于是$\|(\pi_n^1-1)T\|_2\to 0$，在$L^2$

中$T\pi_n^1 \xrightarrow{cc} T$（或在$L^\infty$中$\|(\pi_n^2-1)T\|_\infty \to 0$及在$C$中$T\pi_n^2 \xrightarrow{cc} T$）。

不但有以下的收敛性

$$\|x-x_n\|_\nu \longrightarrow 0, \quad \|x-\widetilde{x}_n\|_\nu \longrightarrow 0, \quad \text{当} f \in C,$$

$$|\lambda-\lambda_n| \longrightarrow 0, \quad |\lambda-\widehat{\lambda}_n| \longrightarrow 0,$$

$$\|(1-P)\varphi_n\|_\nu \longrightarrow 0, \quad \|(1-P)\widetilde{\varphi}_n\|_\nu \longrightarrow 0,$$

$$\Theta_\nu(M,M_n) \longrightarrow 0, \quad \Theta_\nu(M,\widetilde{M}_n) \longrightarrow 0.$$

其中Θ_ν表示L^ν范数下的间隙，而且T_n^P和T_n^S在Γ内的强稳定性也是容易得到的（第五章）。

注意，这个研究不必要求π_n^2是一个投影，而仅仅要求对于$C(0,1)$中的x，$\pi_n^2 x \to x$。

1.3 误差公式

直接应用第六章的结果于T_n^P和T_n^S，得出下面的界：

$$\begin{aligned} &\|x-x_n\|_\nu \leqslant c\|(1-\pi_n)x\|_\nu, \\ &\Theta_\nu(M,M_n) \leqslant c\|(1-\pi_n)P\|_\nu, \\ &\|(1-P)\psi_n\|_\nu \leqslant c\|(1-\pi_n)P\|_\nu, \quad \psi_n \in M_n \end{aligned} \tag{7.9}$$

及

$$\begin{aligned} &\|x-\widetilde{x}_n\|_\nu \leqslant c\|T(1-\pi_n)x\|, \\ &\Theta_\nu(M,\widetilde{M}_n) \leqslant c\|T(1-\pi_n)P\|_\nu \\ &\|(1-P)\widetilde{\psi}_n\|_\nu \leqslant c\|T(1-\pi_n)P\|_\nu, \quad \widetilde{\psi}_n \in \widetilde{M}_n. \end{aligned} \tag{7.10}$$

令$P_{(n)} := P_{\restriction M_n} : M_n \to M$是算子$P$限制在$M_n$上，于是，如同定理6.11所证明的那样，可得到

$$m(\lambda-\widehat{\lambda}_n) = \sum_{i=1}^{m} \langle (1-\pi_n) T P_{(n)}^{-1} x_i, x_i^* \rangle, \tag{7.11}$$

其中$\{x_i\}_1^m$（或$\{x_i^*\}_1^m$）是M的基（或M^*的伴随基）。

对于M中的任意x，$P_{(n)}^{-1}x-x=(1-P)P_{(n)}^{-1}x$。所以

$$\|(1-P)P_{(n)}^{-1}x\|_\nu\leqslant\|1-P\|_\nu\text{dist}_\nu(P_{(n)}^{-1}x,M)$$
$$\leqslant c\Theta_\nu(M,M_n).$$

可以推断，对于M中任意x

$$\|P_{(n)}^{-1}x-x\|_\nu\leqslant c\|(1-\pi_n)P\|_\nu.$$

本征空间$E=\text{Ker}(T-\lambda)$是有限维的，从而有补子空间W：$\mathbf{X}=E\oplus W$。设Q是沿W在E上的投影，则如定理6.7那样证得

$$\text{dist}_\nu(\tilde{\varphi}_n,E)\leqslant\|\tilde{\varphi}_n-Q\tilde{\varphi}_n\|_\nu$$
$$\leqslant c[\|T(1-\pi_n)\tilde{\varphi}_n\|_\nu+|\lambda_n-\lambda|].$$

为了建立逐点估计，我们需要以下的引理。

引理7.1 下面的恒等式成立

$$\tilde{x}_n-x=TR(z)(1-\pi_n)\tilde{x}_n,$$
$$(1-P)\tilde{\varphi}_n=TS(\lambda_n)(1-\pi_n)\tilde{\varphi}_n.$$

证明　当注意到

$$R(z)T=TR(z)\quad\text{及}\quad S(\lambda_n)T=TS(\lambda)$$

以$T_n=T\pi_n$，由引理6.4及习题6.9直接证得。□

对$[0,1]$内任意t，我们推出逐点等式

$$(\tilde{x}_n-x)(t)=\int_0^1k(t,s)[R(z)(1-\pi_n)\tilde{x}_n](s)ds$$
$$=(R(z)(1-\pi_n)\tilde{x}_n,k_t),$$
$$[(1-P)\tilde{\varphi}_n](t)=\int_0^1k(t,s)[S(\lambda_n)(1-$$
$$-\pi_n)\tilde{\varphi}_n](s)ds=(S(\lambda_n)(1-\pi_n)\tilde{\varphi}_n,k_t),$$

其中$(\cdot,\cdot)$是L^2中的内积，$\bar{k}_t$定义为

$$\overline{k}_t : s \mapsto \overline{k}_t(s) := \overline{k(t,s)}, \qquad s \text{ 在}[0,1]\text{内}.$$

设l_t（或l_t^1）是

$$(T^* - \overline{z})l_t = \overline{k_t}$$

$$(\text{或}(T^* - \overline{\lambda}_n)(1-P^*)_t^1 = (1-P^*)\overline{k_t})$$

的唯一解，其中伴随算子是在 L^2 中定义．于是$l_t = R^*(z)\overline{k_t}$（或$l_t' = S^*(\lambda_n)\overline{k_t}$），而且上面的等式可改写为

$$(\widetilde{x}_n - x)(t) = ((1-\pi_n)\widetilde{x}_n, l_t),$$

$$[(1-P)\widetilde{\varphi}_n](t) = ((1-\pi_n)\widetilde{\varphi}_n, l_t^1). \qquad (7.12)$$

2. 解的光滑性质

2.1 逐段连续函数

给定[0,1]的一个严格分划$\Delta = \{t_i\}_0^n$，$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$，令$h_i := t_i - t_{i-1}$，$h := \max_{1\le i\le n} h_i$，$\overline{\Delta}_i := [t_{i-1}, t_i]$，$i = 1, \cdots, n$。定义$C_\Delta := \prod_{i=1}^n C(\overline{\Delta}_i)$，$f \in C_\Delta$由$n$个分量$f_i \in C(\overline{\Delta}_i)$所组成。$f$是逐段连续函数，在分划点$t_i$处的左值与右值可能不同．范数$\|\cdot\|_\Delta$定义为$\|f\|_\Delta = \max_i \|f_i\|_\infty$，$C_\Delta$为 Banach 空间。由于$f \in C_\Delta$，$\|f\|_\Delta = \|f\|_\infty$，所以$C_\Delta \subset L^2(0,1)$。

对于正数α，我们定义更一般的C_Δ^α，$C_\Delta^\alpha := \prod_{i=1}^n C^\alpha(\overline{\Delta}_i)$。$f_i \in C^\alpha(\overline{\Delta}_i)$当且仅当第$\alpha$阶导数$f_i^{(\alpha)}$在$\overline{\Delta}_i$上是连续的。

对于$f \in \mathbb{P}_{r,\Delta}$，若在$t_i^-$处的值是按照连续性定义的，则$\mathbb{P}_{r,\Delta} \subset C_\Delta$，并且投影$\pi_n$是定义为$C_\Delta$到$\mathbb{P}_{r,\Delta}$上，$f = (f_1, \cdots, f_n) \mapsto \pi_n f = (\pi f_1, \cdots, \pi f_n)$，其中$\pi f_i$是$f_i \in C(\overline{\Delta}_i)$在$\Delta_i$上次数小于$r+1$的多项式的投影。值得注意，现在定义在$C_\Delta$上的$\pi_n^2$是一个投影。

用$\|f_i\|_{p,\Delta_i}$表示f_i在$\overline{\Delta}_i$上的L^p范数，$1\leqslant p<\infty$。我们确立几个界，那里的常数与Δ无关，即与n无关。

2.2 x、φ、$\widetilde{x}_n$与$\widetilde{\varphi}_n$的性质

定理7.2 设T的核是关于t属于类$\mathfrak{S}(\alpha,\gamma)$，则

（i）若$f\in C^\alpha$，则（7.1）的解x（或（7.6）的解$\widetilde{x}_n$）是使得$x\in C^\alpha$（或$\widetilde{x}_n\in C^\alpha_\Delta$），

（ii）（7.3）的本征向量φ（或（7.7）的$\widetilde{\varphi}_n$）是使得$\varphi\in C^\alpha$（或$\widetilde{\varphi}_n\in C^\alpha_\Delta$）。而且，$M\subset C^\alpha$。

证明 （i）$x=(1/z)Tx-(1/z)f$，按照归纳法

$$x=\frac{1}{z^\alpha}T^\alpha x-\left[\frac{1}{z^\alpha}T^{\alpha-1}+\frac{1}{z^{\alpha-1}}T^{\alpha-2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{z}\right]f,$$

其中x中的两项属于C^α。这时$\widetilde{x}_n=(1/z)Tx_n+f$，$x_n\in\mathbb{P}_{r,\Delta}\subset C_\Delta$。于是，由定理4.1，$Tx_n\in C^\alpha_\Delta$。

（ii）$\lambda\varphi=T\varphi=(1/\lambda)T^2\varphi=(1/\lambda^{\alpha-1})T^\alpha\varphi$ 蕴涵$\varphi\in C^\alpha$。类似地，$\varphi_n\in\mathbb{P}_{r,\Delta}$蕴涵$\widetilde{\varphi}_n=(1/\lambda_n)T\varphi_n\in C^\alpha_\Delta$。现考虑$M=\{\varphi\in L^\infty(0,1):(T-\lambda)^m\varphi=0\}$，按照归纳法可以证明$M\subset C^\alpha$。类似地，若$k$关于$s$也属于类$\mathfrak{S}(\alpha,\gamma)$，则$M^*\subset C^\alpha$。 □

习题

7.1 若$f\in C^\alpha_\Delta$，则在定理7.2的假设下，$x=C^\alpha_\Delta$。

对于$f\in C^\alpha$。定义$\|x\|_{\alpha,p}:=\Sigma_{i=0}^\alpha\|x^{(i)}\|_p$，$1\leqslant p\leqslant\infty$.

命题7.3 设T的核关于t及s属于$\mathfrak{S}(\alpha,\gamma)$，$f$属于$C^\alpha$，则对于充分大的$n$，成立下面的界：

（i）$\|x\|_{\alpha,\infty}\leqslant c\|f\|_{\alpha,\infty}$，

（ii）对于$L^1(0,1)$中的任意y，成立

$$\|Py\|_{\alpha,\infty}\leqslant c\|y\|_1.$$

证明 (i) 由 $x=R(z)f$ 证明了 $\|x\|_\infty\leqslant c\|f\|_\infty$。由定理7.2的证明，得到 $\|x^\alpha\|_\infty\leqslant c(\|f\|_{\alpha,\infty}+\|x\|_\infty)$，从而 $\|x\|_{\alpha,\infty}\leqslant c\|f\|_{\alpha,\infty}$。

(ii) 设 $\{x_i\}_1^m$（或 $\{x_i^*\}_1^m$）是 M 的一个基（或 M^* 的伴随基）。P 是由 $P=\Sigma_{i=1}^m(\cdot,x_i^*)x_i$ 定义的有限秩积分算子，所以

$$(Px)(t)=\sum_{i=1}^m\left[\int_0^1\overline{x_i^*(s)}x(s)ds\right]x_i(t),$$

而且 P 是由退化核 $p(t,s):=\Sigma_{i=1}^m x_i(t)\overline{x^*(s)}$ 定义的，其中 p 是关于 t 和 s 具有连续性 α 的光滑核。我们推出，对于 $L^1(0,1)$ 中的任意 y，

$$\|Py\|_{\alpha,\infty}\leqslant\left(\sum_{i=1}^m\|x_i\|_{\alpha,\infty}\|x_i^*\|_{\alpha,\infty}\right)\|y\|_1.\ \square$$

习题

7.2 证明：若 T 的核关于 t 与 s 属于 $\mathfrak{G}(\alpha,\gamma)$，则 $T^*(1-P^*)+\overline{\lambda}_nP^*$ 的核 $k_n^*(t,s)$ 关于 t 属于 $\mathfrak{G}(\alpha,\gamma)$，对 n 一致成立。

2.3 k_t、l_t 与 l_t^1 的性质

引理7.4 设 T 的核关于 t 与 s 属于类 $\mathfrak{G}(\alpha,\gamma)$。则函数 k_t、l_t 与 l_t^1，对于分划 Δ 中的任意 t，它们属于 C_Δ^α。对于 $t\notin\Delta$，且若 $\gamma\geqslant0$，则它们属于 C^γ。

证明 由 (7.8)，$t_i\in\Delta$ 时，$k_{t_i}\in C_\Delta^\alpha$ 与 $t\notin\Delta$，$\gamma\geqslant0$ 时，$k_t\in C^\gamma$。T^* 与 $T^*(1-P^*)+\overline{\lambda}_nP^*$ 的核关于 t 都属于 $\mathfrak{G}(\alpha,\gamma)$。这样，我们可以应用习题7.1到方程 $(T^*-\overline{z})l_t=\overline{k}_t$ 与 $(T^*-\overline{\lambda}_n)(1-P^*)l_t^1=(1-P^*)\overline{k}_t$。因为当 $n\to\infty$

时，$\lambda_n \to \lambda \neq 0$，所以$l_i^1$的结果是关于$n$一致．其实，$l_i^1$的确满足$l_i^1 = (1/\overline{\lambda}_n^a) T^{*a} l_i^1 - [(1/\overline{\lambda}_n^a) T^{*a-1} + \cdots + 1/\overline{\lambda}_n](1-P^*)\overline{k}_t$．且对于给定的$\varepsilon > 0$及充分大的$n$，$|\lambda_n| > |\lambda| - \varepsilon > 0$。 □

2.4 $\mathbb{P}_{r,\Delta}$的逼近性质

设$[a, b]$是给定在$\mathbb{R}$上的有界区间。对于$f \in C^a(a,b)$，我们定义

$$\beta := \min(\alpha, r+1)$$

对于$\beta \geq 1$，$\mathfrak{T}_\beta(f)$定义为

$$[\mathfrak{T}_\beta(f)](t) := \sum_{j=0}^{\beta-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^j$$

是f在点a关于$t \in [a, b]$的$\beta - 1$阶 Taylor 级数展开式.

定理7.5 若$f \in C^a(a,b)$，则对于$1 \leq p \leq \infty$，

$$\|f^{(j)} - \mathfrak{T}_\beta^{(j)}(f)\|_p \leq c(b-a)^{\beta-j}\|f^{(\beta)}\|_p,\quad 0 \leq j \leq \beta.$$

证明 证明是关于j用归纳法．$\|f^{(\beta)} - \mathfrak{T}_\beta^{(\beta)}(f)\|_p = \|f^{(\beta)}\|_p$．对于$\beta - 1$，

$$[f^{(\beta-1)} - \mathfrak{T}_\beta^{(\beta-1)}(f)](t) = \int_a^1 [f^{(\beta)} - \mathfrak{T}_\beta^{(\beta)}(f)](s)ds.$$

于是，根据Hölder不等式，得到

$$\|f^{(\beta-1)} - \mathfrak{T}_\beta^{(\beta-1)}(f)\|_\infty \leq (b-a)^{1/q}\|f^{(\beta)} - \mathfrak{T}_\beta^{(\beta)}(f)\|_p$$

其中$1/p + 1/q = 1$，而且

$$\|f^{(\beta-1)} - \mathfrak{T}_\beta^{(\beta-1)}(f)\|_p \leq (b-a)^{1/p}\|f^{(\beta-1)} - \mathfrak{T}_\beta^{(\beta-1)}(f)\|_\infty$$
$$\leq (b-a)\|f^{(\beta)}\|_p.$$

我们假设在$j+1$步成立不等式：

$$\|f^{(j+1)} - \mathfrak{T}_\beta^{(j+1)}(f)\|_p \leq (b-a)^{\beta-j-1}\|f^{(\beta)}\|_p.$$

于是

$$(f^{(j)} - \mathfrak{T}_\beta^{(j)}(f))(t) = \int_a^t [f^{(j+1)} - \mathfrak{T}_\beta^{(j+1)}(f)](s)ds,$$

$$\|f^{(j)} - \mathfrak{T}_\beta^{(j)}(f)\|_\infty \leqslant (b-a)^{1/q}\|f^{(j+1)} - \mathfrak{T}_\beta^{(j+1)}(f)\|_p,$$

$$\|f^{(j)} - \mathfrak{T}_\beta^{(j)}(f)\|_p \leqslant (b-a)^{1/p}\|f^{(j)} - \mathfrak{T}_\beta^{(j)}(f)\|_\infty.$$

最后的两个不等式蕴涵了

$$\|f^{(j)} - \mathfrak{T}_\beta^{(j)}(f)\|_p \leqslant (b-a)^{\beta-j}\|f^{(\beta)}\|_p. \qquad \square$$

推论7.6 设π_n是C_Δ到$\mathrm{P}_{r,\Delta}$上的投影，使得对n一致成立

$$\|\pi_n\|_p < \infty, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

则对C_Δ^α中的任意f

$$\|(1-\pi_n)f\|_p \leqslant ch^\beta\|f^{(\beta)}\|_p.$$

证明 在Δ_i上，根据定理7.5，

$$\begin{aligned}\|(1-\pi)f_i\|_{p,\Delta_i} &= \|(1-\pi)(f_i - \mathfrak{T}_\beta(f_i))\|_{p,\Delta_i}\\ &\leqslant c\|f_i - \mathfrak{T}_\beta(f_i)\|_{p,\Delta_i}\\ &\leqslant ch_i^\beta\|f_i^{(\beta)}\|_{p,\Delta_i}.\end{aligned}$$

首先假设$1 \leqslant p < \infty$，于是

$$(\|(1-\pi_n)f\|_p)^p = \sum_{i=1}^n (\|(1-\pi)f_i\|_{p,\Delta_i})^p.$$

所以

$$\sum_{i=1}^n (\|(1-\pi)f_i\|_{p,\Delta_i})^p \leqslant c\sum_{i=1}^n h_i^{p\beta}(\|f_i^{(\beta)}\|_{p,\Delta_i})^p$$

$$\leqslant c\left(\max_i h_i\right)^{p\beta}\sum_{i=1}^n (\|f_i^{(\beta)}\|_{p,\Delta_i})^p.$$

对于$p=\infty$，

$$\|(1-\pi_n)f\|_\infty = \max_i\|(1-\pi)f_i\|_{\infty,\Delta_i}$$

且

$$\|(1-\pi)f_i\|_{\infty,\Delta_i}\leqslant ch_i^{\beta}\|f_i^{(\beta)}\|_{\infty,\Delta_i}$$

证得

$$\|(1-\pi_n)f\|_{\infty}\leqslant ch^{\beta}\|f^{(\beta)}\|_{\infty}. \quad \square$$

我们定义 $\beta_1:=\min(\beta,\ \gamma+1)\geqslant 0$.

推论7.7 设核k_t属于类 $\mathfrak{S}(\alpha,\ \gamma)$. 则对于 $1\leqslant p\leqslant\infty$,

$$\|(1-\pi_n)k_t\|_p=O(h^{\beta}),\quad t\in\Delta,$$

且

$$\|(1-\pi_n)k_t\|_p=O(h^{\beta_1}),\quad t\notin\Delta,$$

其中 $\beta=\min(\alpha,\ r+1)$ 及 $\beta_1=\min(\beta,\ \gamma+1)$.

证明 对于 $t\in\Delta$, 由引理7.4, $k_t\in C_{\Delta}^{\alpha}$. 对于 $1\leqslant p<\infty$, 应用推论 7.6 中的证明得到

$$\|(1-\pi_n)k_t\|_p\leqslant ch^{\beta}\left[(\|k_{1t}^{(\beta)}\|_{p,[0,t]})^p+(\|k_{2t}^{(\beta)}\|_{p,[t,1]})^p\right]^{1/p}$$

且

$$\|(1-\pi_n)k_t\|_{\infty}\leqslant ch^{\beta}\max(\|k_{1t}^{(\beta)}\|_{\infty,[0,t]},\ \|k_{2t}^{(\beta)}\|_{\infty,[t,1]}).$$

对于 $t\notin\Delta$, 我们假定 $t\in(t_{i-1},\ t_i)$. 对于 $s<t$ 或 $s>t$, k_t在 s 点有直到 α 阶的连续导数. 而对于 $s=t$, $\gamma\geqslant 0$, $(k_t)^{(\gamma)}$ 是连续的. 于是对于 $1\leqslant p<\infty$, 得到

$$(\|(1-\pi_n)k_t\|_p)^p=\underbrace{\left[\sum_{j\neq i}(\|(1-\pi)(k_t)_j\|_{p,\Delta_j})^p\right]}_{A}+(\|(1-\pi)(k_t)_i\|_{p,\Delta_i})^p.$$

如上所述, 可以容易地用 h^{β} 来确定和 $A^{1/p}$ 的界. 在Δ_i 上有

$$(\|(1-\pi)(k_t)_i\|_p)^p\leqslant(\|k_t-\mathfrak{T}_{\gamma+1}(k_{1t})\|_{p,[t_{i-1},t]})^p+(\|k_t-\mathfrak{T}_{\gamma+1}(k_{2t})\|_{p,[t,t_i]})^p.$$

明显地, 对于满足$t_{i-1}<\theta_t<t$ 的某个θ_t

$$(k_t - \mathfrak{T}_{\gamma+1}(k_{1t}))(s) = \frac{1}{(\gamma+1)!} k_1^{(\gamma+1)}(t, \theta_s)(s-t)^{\gamma+1}$$

连同 $[t, t_i]$ 上类似的等式一起，这就证明了 $\|(1-\pi)(k_t)_i\|_{p,\Delta}$ 的界可以用 $h_i^{\gamma+1}$ 来确定。得到整体的阶为 $\beta_1 = \min(\beta, \gamma+1)$。当 $\gamma = -1$，$\beta_1 = 0$，结果是显然的。对于 $p = \infty$，证明是类似的。

引为注意，当 k_s 属于类 $\mathfrak{S}(\alpha, \gamma)$ 时，推论7.7也适用于 l_t 及 l_t^1（引理7.4）。

3. ⊥—Galerkin法的超收敛结果

在本节中，$X = L^2(0, 1)$，π_n^1 是在 $\mathbb{P}_{\gamma,\Delta}$ 的正交投影，$\beta^*: \min(\beta, \gamma+2) \geqslant 1$。我们从下面的引理开始。

引理7.8 若 k_t 属于 $\mathfrak{S}(\alpha, \gamma)$，$x \in C^\alpha$，则当 $t \notin \Delta$ 时，

$$|(k_t, (1-\pi_n^1)x)| = O(h^{\beta+\beta^*}),$$

其中 $\beta := \min(\alpha, r+1)$ 及 $\beta^* = \min(\beta, \gamma+2)$。

证明　由 π_n^1 的正交性得

$$(k_t, (1-\pi_n^1)x) = ((1-\pi_n^1)k_t, (1-\pi_n^1)x).$$

我们首先注意到，若用推论7.7，则仅能得到阶 $\beta+\beta_1$，写为

$$|(k_t, (1-\pi_n^1)x)| \leqslant \|(1-\pi_n^1)k_t\|_2 \|(1-\pi_n^1)x\|_2 \leqslant ch^{\beta_1+\beta}.$$

对于 $x \in C_\Delta$，只要小心地使用下面的界于 $\overline{\Delta}_i (i=1, \cdots, n)$ 上，就可重新获得更好的阶 $\beta+\beta^*$：

$$\|x_i\|_{2,\Delta_i} \leqslant h_i^{1/2} \|x_i\|_{\infty,\Delta_i} \leqslant h_i^{1/2} \|x\|_\infty;$$

$$|(k_t, (1-\pi_n^1)x)| \leqslant \sum_{i=1}^n |((k_t)_i, (1-\pi^1)x_i)|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n [\|(1-\pi^1)(k_t)_i\|_{2,\Delta_i} \|(1-\pi^1)x_i\|_{2,\Delta_i}].$$

对于 $i=1,\cdots,n$，

$$\|(1-\pi^1)x_i\|_{2,\Delta_i}\leqslant ch_i^\beta\|x_i^{(\beta)}\|_{2,\Delta_i}\leqslant ch_i^{\beta+1/2}\|x^{(\beta)}\|_\infty.$$

对于 $t\notin\Delta$，设 $t\in(t_{i-1},t_i)$，则当 $j\neq i$，$(k_t)_j\in C^\alpha(\overline{\Delta}_j)$，且当 $\gamma\geqslant 0$，$(k_t)_i\in C^\gamma(\overline{\Delta}_i)$。于是

$$\begin{aligned}\|(1-\pi^1)(k_t)_j\|_{2,\Delta_j}&\leqslant ch_j^\beta\max(\|(k_{1t})_j^{(\beta)}\|_{2,\Delta_j},\\&\quad\|(k_{2t})^{(\beta)}\|_{2,\Delta_j})\\&\leqslant ch_j^{\beta+1/2}\max(\|k_{1t}^{(\beta)}\|_\infty,\ \|k_{2t}^{(\beta)}\|_\infty),\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\|(1-\pi^1)(k_t)_i\|_{2,\Delta_i}&\leqslant ch_i^{(\beta_1)}[(\|k_{1t}^{(\beta_1)}\|_{2,[t_{i-1},t]})^2+\\&\quad(\|k_{2t}^{(\beta_1)}\|_{2,[t,t_i]})^2]^{1/2}\\&\leqslant ch_i^{\beta_1+1/2}[(\|k_{1t}^{(\beta_1)}\|_\infty)^2+(\|k_{2t}^{(\beta_1)}\|_\infty)^2]^{1/2}.\end{aligned}$$

注意到 $\min(2\beta,\ \beta+\beta_1+1)=\beta+\beta^*$，引理即可证得。 □

3.1 $\widetilde{x}_n$与$\widetilde{\varphi}_n$的超收敛

定理7.9 若 T 的核关于 t 和 s 属于类 $\mathfrak{G}(\alpha,\ \gamma)$，$f\in C^\alpha$，则对充分大的 n，

(i) $\max(\|x-x_n\|_2,\ \Theta_2(M,\ M_n),\ \|(1-P)\varphi_n\|_2=O(h^\beta)$，

(ii) $\max(\|x-\widetilde{x}_n\|_2,\ \Theta_2(M,\widetilde{M}_n),\ \|(1-P)\widetilde{\varphi}_n\|_2)=O(h^{\beta+\beta^*})$，

(iii) $\max(|(x-\widetilde{x}_n)(t_i)|,\ |[(1-P)\widetilde{\varphi}_n(t_i)]|)=O(h^{2\beta})$，$i=0,\cdots,n$，

(iV) $\max(\|x_n-\widetilde{x}_n\|_\infty,\ \|(1-P)\widetilde{\varphi}_n\|_\infty)=O(h^{\beta+\beta^*})$，

其中 $\beta=\min(\alpha,\ r+1)$及 $\beta^*=\min(\beta,\ \gamma+2)$。

证明 (i) 因为 $x\in C^\alpha$ 及 $M\subset C^\alpha$，于是，由推论7.6

$$\|(1-\pi_n^1)x\|_2\leqslant ch^\beta\|x^{(\beta)}\|_2$$

且

$$\|(1-\pi_n^1)P\|_2 \leqslant ch^\beta \max_{\psi\in M}(\|\psi^{(\beta)}\|_2,\ \|\psi\|_2=1).$$

由（7.9）即可得到结果。

(ii) $\|T(1-\pi_n^1)x\|_2 \leqslant \|T(1-\pi_n^1)x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}|(k_t,$

$$(1-\pi_n^1)x)|.$$

应用引理 7.8 证得

$$\|T(1-\pi_n^1)x\| \leqslant ch^{\beta+\beta*}\|x^{(\beta)}\|_\infty.$$

因而可以确定$\|T(1-\pi_n^1)P\|_\infty$的界。由（7.10）即得所要证的。

为了证明（iii）与（iV），对[0，1]中固定的 t 写出

$$((1-\pi_n^1)\widetilde{x}_n, l_t) = ((1-\pi_n^1)[(\widetilde{x}_n - x)+x],\ (1-\pi_n^1)l_t),$$

$$((1-\pi_n^1)\widetilde{\varphi}_n,\ l_t^1) =$$

$$((1-\pi_n^1)[(1-P)\widetilde{\varphi}_n + P\widetilde{\varphi}_n]\ (-\pi_n^1)l_t^1).$$

由推论（7.7），对于$t\in\Delta$，$\|(1-\pi_n^1)l_t\|_2$与$\|(1-\pi_n^1)l_t^1\|_2$两者均有阶 β，如同量

$$\|\widetilde{x}_n - x\|_2,\quad \|(1-\pi_n^1)x\|_2,\quad \|(1-P)\widetilde{\varphi}_n\|_2$$

及

$$\|(1-\pi_n^1)P\widetilde{\varphi}_n\|_2$$

一样，由（i）与(ii)，它们至少有阶 β。这就证明了(iii)。现对 $t\notin\Delta$，利用引理 7.8 及

$$\|(P\widetilde{\varphi}_n)^{(\beta)}\|_\infty \leqslant c\,\|\widetilde{\varphi}_n\|_\infty \leqslant c$$

的一致有界，得到$((1-\pi_n^1)x,\ l_t)$与$((1-\pi_n^1)P\widetilde{\varphi}_n,\ l_t^1)$都具有阶 $\beta+\beta^*$。至于剩下的内积，可从推论 7.7 推出

$$\max(\|(1-\pi_n^1)l_t\|_2,\ \|(1-\pi_n^1)l_t^1\|_2) \leqslant ch^{\beta_1}.$$

因为$\beta_1 \geqslant 0$，所以

$$|(\widetilde{x}_n - x,\ (1-\pi_n^1)l_t)| \leqslant ch^{\beta_1}\|\widetilde{x}_n - x\|_2 \leqslant ch^{\beta+\beta*},$$

$$|((1-P)\widetilde{\varphi}_n,\ (1-\pi_n^1)l_i^1)| \leqslant ch^{\beta_1}\|(1-P)\widetilde{\varphi}_n\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant ch^{\beta+\beta*}. \quad \square$$

习题

7.3 利用习题 6.3 证明：对$\widetilde{M}_n$中的任意$\widetilde{\psi}_n$，在定理 7.9 的假设下，有

$$[(1-P)\widetilde{\psi}_n](t_i)=O(h^{2\beta})$$

及
$$\mathrm{dit}\ (\widetilde{\psi}_n,\ M)=O(h^{\beta+\beta*}).$$

3.2 $\hat{\lambda}_n$的超收敛

定理7.10 若T的核关于t和s属于$\mathfrak{S}(\alpha,\ \gamma)$，则对于充分大的$n$，

$$|\lambda-\hat{\lambda}_n|=O(h^{2\beta}).$$

证明 我们从恒等式（7.11）开始。令$y_{in}:=P_{(n)}^{-1}x_i\in \mathscr{P}_{r,\Delta}$，$i=1,\cdots,m$。问题是给出内积

$$((1-\pi_n^1)Ty_{in},\ x_i^*)=((1-\pi_n^1)T[(y_{in}-x_i)+x_i],\ x_i^*)$$

的阶，其中

$$y_{in}\in M_n,\quad x_i^*\in C^\alpha.$$

不等式

$$\|y_{in}-x_i\|_2\leqslant c\|(1-\pi_n^1)P\|_2$$

表明$\|y_{in}-x_i\|_2$是$\beta=\min(\alpha,r+1)$阶的。应用推论7.6于$p=2$，显然$((1-\pi_n^1)Tx_i,\ x_i^*)$具有阶$2\beta$。剩下的是讨论$((1-\pi_n^1)T(y_{in}-x_i),\ x_i^*)$。其阶为$2\beta$可从

$$|((1-\pi_n^1)T(y_{in}-x_i),x_i^*)|\leqslant c\|y_{in}-x_i\|_2\|(1-\pi_n^1)x_i^*\|_2$$

立即得到。

3.3 $\lambda-\lambda_n$与$\mathrm{dist}_\infty(\widetilde{\varphi}_n,E)$的收敛速率

当本征值λ是半单的（$l=1$），$\lambda-\lambda_n$与$\mathrm{dist}_\infty(\widetilde{\varphi}_n,E)$的收敛速率早已建立：它们分别具有$\lambda-\hat{\lambda}_n$与$\mathrm{dist}_\infty(\widetilde{\varphi}_n,M)$的阶。当$l>1$时，我们有下面的命题。

命题7.11 若T的核是关于t和s属于类$\mathfrak{S}(\alpha, \gamma)$，则对充分大的$n$及$l>1$，$|\lambda-\lambda_n|$与$\text{dist}_\infty(\widetilde{\varphi}_n, E)$都具有阶$2\beta/l$。

证明留给读者（见习题6.12）.

习题

7.4 证明 $\min_i|\lambda-\mu_{in}|O(h^{2\beta g/m})$。

3.4 注记

对于 ⊥—Galerkin法，我们无须限制利用整数$\alpha>0$，$-1\leqslant\gamma\leqslant\alpha$，建立了比$\beta=\min(\alpha, r+1)$更高阶的收敛速率。实际上，当$\alpha\geqslant1$选取$r$使得$r+1\leqslant\alpha$具有$\mathbb{P}_{r,\Delta}$中的函数精度的全部有利条件。所以，$\beta=r+1$。对于光滑的核$(\gamma=\alpha\geqslant r+1)$，$\widetilde{x}_n$与$\widetilde{\varphi}_n$在$[0,1]$的任意点上达到双倍精度$h^{2r+2}$。当核不是充分光滑的$(-1\leqslant\gamma<r-1)$，在分划点上保持着双倍精度$h^{2r+2}$，而且在$[0,1]$的任意一个点上，我们得到阶$r+\gamma+3$.值得注意，$\lambda-\hat{\lambda}_n$在两种情形中都达到双倍精度。

4. ⊥—Galerkin法与配置法之间的联系

我们引入下面的定义与记号．给定区间$[a,b]$的$r+1$Gauss点$\{\tau_i\}_1^{r+1}$，对于$f\in C(a,b)$，设$\pi^2 f$是在$r+1$个点$\{\tau_i\}$处次数小于$r+1$的Lagrange插值多项式。$\pi^1 f$是在$[a,b]$上次数小于$r+1$的最小二乘多项式。我们定义Lagrange多项式v：$s\in[a,b]\mapsto v(s)=\prod_{i=1}^{r+1}(s-\tau_i)$。给定函数$f$，在$\{\tau_i\}$处为零，它在点$\{\tau_i\}$的第$r+1$均差记为$\delta[\tau_1,\cdots,\tau_{r+1},\cdot]f$，简单记为$\delta^{(r+1)}f$。我们有

$f(s)=v(s)\delta[\tau_1,\cdots,\tau_{r+1},s]f, s\notin\{\tau_i\}_1^{r+1}$，$s\in\{\tau_i\}$的值是按连续性定义的。

引理 7.12 对于$C[a,b]$中的f与g

$$((1-\pi^2)f, g)=(v,(1-\pi^1)g\overline{\delta^{(r+1)}f}).$$

证明 按照定义 $(1-\pi^2)f$ 在 $\{\tau_i\}$ 处等于零，$\pi^2 f\in\mathbb{P}_r$ 且 $\delta^{(r+1)}\pi^2 f=0$。于是

$$(1-\pi^2)f=v\delta^{(r+1)}((1-\pi^2)f)=v\delta^{(r+1)}f。$$

所以

$$((1-\pi^2)f,g)=(v,g\delta^{(r+1)}\overline{f})。$$

因为 $\{\tau_i\}_1^{r+1}$ 是 $[a,b]$ 上的 $r+1$ 个 Gauss 点，对于任意次数小于 $r+1$ 的多项式 p

$$\int_a^b v(s)p(s)ds=0。$$

v 是与 $\mathbb{P}_r$ 正交的，即 $\pi^1 v=0$ 或

$$((1-\pi^2)f,g)=((1-\pi^1)v,(1-\pi^1)g\delta^{(r+1)}\overline{f}).\quad\square$$

推论 7.13 设 η 是非负整数. 若 $g\in C^{\eta}(a,b)$，$f\in C^{\eta+r+1}(a,b)$，则

$$|((1-\pi^2)f,g)|\leqslant c(b-a)^{r+1+\beta'+1}\|g\|_{\beta',\infty}\|f\|_{\beta'+r+1,\infty},$$

其中 $\beta'=\min(\eta,\ r+1)$，

证明 由引理 7.12,

$$|((1-\pi^2)f,\ g)|\leqslant\|(1-\pi^1)v\|_2\|(1-\pi^1)g\sigma^{(r+1)}\overline{f}\|_2.$$

因为 $v\in\mathbb{P}_{r+1}$，

$$\|(1-\pi^1)v\|_2\leqslant(b-a)^{r+1}\|v^{(r+1)}\|_2\leqslant(b-a)^{r+1+1/2}\|v\|_\infty.$$

类似地，

$$\|(1-\pi^1)g\delta^{(r+1)}\overline{f}\|_2\leqslant(b-a)^{\beta'}\|(g\delta^{(r+1)}\overline{f})^{(\beta')}\|_2$$
$$\leqslant(b-a)^{\beta'+1/2}\|g\|_{\beta',\infty}\|f\|_{\beta'+r+1,\infty}.\quad\square$$

引理 7.12 表明上—Galerkin 法与 Gauss 点处配置法之间的关系。这可以与工程文献中的事实相联系，在Gauss 点的配置被十分恰当地称为正交配置（见 Prenter，1975）。

根据均差 $\delta^{(r+1)}\overline{f}$ 的存在，引理 7.12 说明了 f 与 g 起着不对称的作用。由推论 7.13 所表述的结论，要求 f 更光滑.

π^1是关于 f 与 g 对称：若 f，$g \in C^{\alpha}(a,b)$，则

$$|((1-\pi^1)f,g)| \leqslant c(b-a)^{2\beta+1}\|f^{(\beta)}\|_{\infty}\|g^{(\beta)}\|_{\infty},$$

其中 $\beta = \min(\alpha, r+1)$（参见推论 7.6 与引理 7.8）. 如果我们写出 π^1 的相应的界，就可以把不对称强调出来。作为另一结论，仅当 $\alpha \geqslant r+1$，我们得到$\tilde{x}_n$与$\tilde{\varphi}_n$关于在Gauss 点的配置的更高阶收敛结果。与⊥—Galerkin 法所出现的情形相反，那里对 α 不加以限制。仅当$\eta \geqslant r+1$，即当 $\alpha \geqslant 2r+2$ 时，在情形（b）中，我们将得到双倍精度h^{2r+2}，而在情形（a）中，对于$\alpha \geqslant r+1$，它已得到了。

5. 在Gauss点的配置法的超收敛结果

现在，我们考虑定义于 C_{Δ} 的配置法（b）。选取配置点$\{\tau_j^i\}$使得$\{\tau_j^i\}_{j=1}^{r+1}$为每个 Δ_i（$i=1,\cdots,n$）上的$r+1$ 个Gauss 点。π_n^1（或 π_n^2）是在 $\mathbb{P}_{r,\Delta}$上的正交（或插值）投影。

当我们论及L^2内积与伴随算子时，函数被作为 L^2 的元素来考虑。我们容易得到以下的结果。

命题 7.14 若T的核是关于 t 与 s 属于类$\mathfrak{S}(\alpha,\gamma)$，$f \in C^{\alpha}$，则$\|x-x_n\|$，$\|(1-P)\varphi_n\|_{\infty}$及$\Theta_{\infty}(M,M_n)$都具有阶 $\beta = \min(\alpha, r+1)$。

若假设$\alpha \geqslant r+1$，则 $\beta = r+1$，而且我们在$\overline{\Delta}_i$（$i=1,\cdots,n$）上利用推论7.13可以证明定理7.16中关于$\tilde{x}_n$和$\tilde{\varphi}_n$的超收敛结果。在证明这个主要结果之前，需要一些预备知识。我们回忆一下，次数小于 $r+1$ 的Markov不等式，在Δ_i上写为

$\|q\|_{r,\infty,\Delta_i} \leqslant ch^{-r}\|q\|_{\infty,\Delta_i}$，$q \in \mathbb{P}_r(\Delta_i)$（de Boor和Swartz，1973）。

引理7.15 在命题 7.14 的假设下，若$\alpha \geqslant r+1$，则

$$\|x-x_n\|_{r,\infty,\Delta_i} \leqslant c(h/h_i)^r h\|x\|_{r+1,\infty} \quad i=1,\cdots,n,$$

$$\|(1-P)\varphi_n\|_{r,\infty,\Delta_i} \leqslant c(h/h_i)^r h\|x\|_{r+1,\infty} \quad i=1,\cdots,n.$$

证明　由于不会使意义不明确，我们去掉函数定义在 Δ_i 上的角标 i .

因为 $\alpha \geqslant r+1$，x 至少有连续的第 r 阶导数. 在 $\overline{\Delta}_i$ 上我们确定 x 的 r 次 Taylor 展式，$\mathfrak{T}_{r+1}(x) \in \mathbb{P}_r(\overline{\Delta}_i)$：

$\|x-x_n\|_{r,\infty,\Delta_i} \leqslant \|x-\mathfrak{T}_{r+1}(x)\|_{r,\infty,\Delta_i} + \|\mathfrak{T}_{r+1}(x)-x_n\|_{r,\infty,\Delta_i}$. 应用 Markov 不等式于 $\mathfrak{T}_{r+1}(x)-x_n$，得到

$$\|\mathfrak{T}_{r+1}(x)-x_n\|_{r,\infty,\Delta_i} \leqslant ch_i^{-r}\|\mathfrak{T}_{r+1}(x)-x_n\|_{\infty,\Delta_i},$$

$\|\mathfrak{T}_{r+1}(x)-x_n\|_{\infty,\Delta_i} \leqslant \|\mathfrak{T}_{r+1}(x)-x\|_{\infty,\Delta_i} + \|x-x_n\|_{\infty,\Delta_i}$.

由命题 7.14，$\|x-x_n\|_{\infty,\Delta_i} \leqslant ch^{r+1}\|x\|_{r+1,\infty}$. 利用定理7.5，$\|x-\mathfrak{T}_{r+1}(x)\|_{r,\infty,\Delta_i} \leqslant \|x-\mathfrak{T}_{r+1}(x)\|_{\infty,\Delta_i} + ch^{r+1}\|x\|_{r+1,\infty}$，从而得到 $\|x-x_n\|_{r,\infty,\Delta_i}$ 要求的界. 关于 $\varphi_n - P\varphi_n$ 的证明是十分类似的，通过写出

$$\varphi_n - P\varphi_n = \varphi_n - \mathfrak{T}_{r+1}(P\varphi_n) + \mathfrak{T}_{r+1}(P\varphi_n) - P\varphi_n$$

且由于 $\alpha \geqslant r+1$，利用 $\|P\varphi_n\|_{r+1,\infty} < c$. □

5.1 $\widetilde{x}_n$ 与 $\widetilde{\varphi}_n$ 的超收敛

因为 $\alpha \geqslant r+1$，于是可写 $\alpha = \eta + r + 1$，其中 η 是非负整数. 我们定义

$\beta' := \min(\eta, r+1)$，$\beta_1' := \min(\beta', \gamma+1)$，$\beta'^* := \min(\beta', \gamma+2)$.

定理7.16　T 的核关于 t 与 s 属于类 $\mathfrak{S}(\alpha,\gamma)$，其中 $\alpha \geqslant r+1$，若 $f \in C^\alpha$，则对于充分大的 n，

(i) $\max(\|x-\widetilde{x}_n\|_\infty, \Theta_\infty(M,\widetilde{M}_n), \|(1-P)\widetilde{\varphi}_n\|_\infty)$
$= O(h^{r+1+\beta'^*})$，

(ii) $\max(|(x-\widetilde{x}_n)(t_i)|, |[(1-P)\widetilde{\varphi}_n](t_i)|)$
$= O(h^{r+1+\beta'})$，$i = 0,\cdots,n$.

证明 (i) 由 (7.10)，

$\|x-\widetilde{x}_n\|_\infty \leqslant c\|T(1-\pi_n^2)x\|_\infty$，$\|(1-P)\widetilde{\varphi}_n\|_\infty \leqslant c\|T(1-$

$\pi_n^2)P\|_\infty$，其中：对于 $t=t_i\in\Delta$，$\overline{k}_t\in c_\Delta^\alpha$，

$$\|T(1-\pi_n^2)x\|_\infty=\sup_{t\in[0,1]}|((1-\pi_n^2)x,\overline{k}_t)|.$$

所以，在 Δ_j $(j=1,\cdots,n)$上，由推论7.13得到

$$|((1-\pi^2)x_j,\overline{k}_t)_{\Delta j}|\leqslant ch_j^{r+1+\beta'+1}\|(k_t)_j\|_{\beta',\cdot,\Delta_j}$$
$$\|x_j\|_{\beta'+r+1,\cdot,\Delta_j}.$$

关于 j 求和，

$$|((1-\pi_n^2)x,\overline{k}_t)|\leqslant ch^{r+1+\beta'}\|x\|_{\beta'+r+1,\cdot}.$$

对于$t\notin\Delta$，设$t\in(t_{i-1},t_i)$。对于所有 $j\neq i$，上面的界在 Δ_j 上成立。在 Δ_i 上，对于 $s\in[t_{i-1},t]$ 与 $s\in[t,t_{i+1}]$，$(\overline{k}_t)_i\in C^{\gamma+1}$，

$$|((1-\pi^2)x,\overline{k}_t)_{\Delta i}|\leqslant ch_i^{r+1+\beta_1'+1}\|x_i\|_{\beta_1'+r+1,\infty,\nabla_i}.$$

对于 j 求和，

$$|((1-\pi_n^2)x,\overline{k}_t)|\leqslant ch^{r+1+\min(\beta',\beta_1'+1)}.$$

阶 $r+1+\beta^*$ 是从 $\min(\beta',\beta_1'+1)=\beta^*$ 得到的．

$\|T(1-\pi_n^2P\|_\infty$ 是以同样的方法处理。

（ii）我们首先研究 $x-\widetilde{x}_n$．对于$t=t_i\in\Delta$，由(7.12)可写

$$(x-\widetilde{x}_n)(t)=((1-\pi_n^2)\widetilde{x}_n,l_t)$$
$$=((1-\pi_n^2)x,l_t)+((1-\pi_n^2)(\widetilde{x}_n-x),l_t)$$
$$=((1-\pi_n^2)x,l_t)+\sum_{j=1}^{n}((1-\pi^2)(\widetilde{x}_n-x),l_t)_{\Delta j}.$$

第一个内积如同$((1-\pi_n^2)x,\overline{k}_t)$具有相同的阶，即$r+1+\beta'$．至于第二个，

$$|((1-\pi^2)(\widetilde{x}_n-x)_j,(l_t)_j)|\leqslant ch_j^{r+1+\beta'+1}\|(l_t)_j\|_{\beta',\infty,\Delta j}\|$$

$\|(\widetilde{x}_n - x)_j\|_{\beta'+r+1,\infty,\Delta_j}$.

剩下的是论证当$\beta'+r+1\leqslant\alpha$，$\|\widetilde{x}_n - x\|_{\beta'+r+1,\infty}$的界关于$n$是一致的．首先，注意到$\widetilde{x}_n - x_n = (1/z)T(x_n - x)$。于是

$$\|\widetilde{x}_n - x\|_{\beta'+r+1,\infty,\Delta_j}\leqslant c[\|x-x_n\|_\infty+\|x_n - x\|_{\beta'+r,\infty,\Delta_j}].$$

$\|x-x_n\|_\infty = O(h^{r+1})$是有界的，且在$\Delta_j$上的$x_n$是次数小于$r+1$的多项式。所以，

$$\|x-x_n\|_{\beta'+r,\infty,\Delta j}\leqslant\|x\|_{\beta'+r,\infty,\Delta j}+\|x_n - x\|_{r,\infty,\Delta j}.$$

应用引理7.15，对$j=1,\cdots,n$，可以写出

$$(h/h_j)^r h\leqslant(h/h_j)^{r+1}$$

与

$$|((1-\pi^2)(\widetilde{x}_n - x),\ l_t)_{\Delta j}|\leqslant ch_j^{r+1+\beta'+1}(h/h_j)^{r+1}$$

$$\|x\|_{\beta'+r+1,\infty,\Delta j}.$$

对j求和得

$$|((1-\pi_n^2)(\widetilde{x}_n - x), l_t)|\leqslant ch^{r+1+\beta'}\|x\|_{\beta'+r+1,\infty}.$$

对$(1-P)\widetilde{\varphi}_n$的分析与$x-\widetilde{x}_n$类似：

$$[(1-P)\widetilde{\varphi}_n](t) = ((1-\pi_n^2)P\widetilde{\varphi}_n, l_t^1)+$$

$$((1-\pi_n^2)(1-P)\widetilde{\varphi}_n, l_t^1).$$

对于第一个内积，因为$\beta'+r+1\leqslant\alpha$，由命题7.3，$\|P\widetilde{\varphi}_n\|_{\beta'+r+1,\infty}$是关于$n$一致有界的。至于第二个内积，

$(1-P)\widetilde{\varphi}_n = \dfrac{1}{\lambda_n}T(1-P)\varphi_n$ 及 $\|((1-P)\varphi_n)_j\|_{\beta'+r,\infty,\Delta j}$

如对于解所作的那样，利用引理7.15就能得到它们的界．证毕。□

证明定理7.16的唯一不平凡部分是$\|\widetilde{x}_n - x\|_{\alpha,\infty}$（或$\|(1-P)\widetilde{\varphi}_n\|_{\alpha,\infty}$）关于$n$一致有界．它是利用了de Boor和Swartz (1973) 中所发展的技巧．应当注意到，就光滑核而论，当

$\gamma=a$，根据下面给出的引理7.17，$\|\widetilde{x}_n\|_{a,\infty}$（或$\|\widetilde{\varphi}_n\|_{a,\infty}$）是一致有界的。于是，定理 7.16 就变为可以直接证明。

引理7.17 若T的核是关于t与s具有连续性a的光滑核，则对于充分大的n，下面的界成立：

$$\|\widetilde{x}_n\|_{a,\infty}\leqslant c\|f\|_{a,\infty},\quad \|\widetilde{\varphi}_n\|_{a,\infty}\leqslant c\|\varphi_n\|_\infty.$$

证明 $\widetilde{x}_n=(1/z)Tx_n+f$。于是

$$\|\widetilde{x}_n\|_{a,\infty}\leqslant c(\|x_n\|_\infty+\|f\|_{a,\infty})\leqslant c\|f\|_{a,\infty}.$$

类似地，对于充分大的n，

$$\widetilde{\varphi}_n=\frac{1}{\lambda_n}T\varphi_n,\qquad \|\widetilde{\varphi}_n\|_{a,\infty}\leqslant\frac{c}{|\lambda_n|}\|\varphi_n\|_\infty,$$

及

$$\|\varphi_n\|_\infty=1,\quad |\lambda_n|>|\lambda|-\varepsilon.\ \square$$

5.2 $\lambda-\widetilde{\lambda}_n$、$\lambda-\lambda_n$与$\mathrm{dist}_\infty(\widetilde{\varphi}_n,E)$的收敛速率

对于本征值与本征向量，其收敛速率由如下命题给出。

命题7.18 若T的核关于t和s属于$a\geqslant r+1$的类$\mathfrak{S}(a,\gamma)$，则对充分大的n，

$$|\lambda-\widehat{\lambda}_n|=O(\varepsilon_n)\quad 及\quad \max(|\lambda-\lambda_n|,\mathrm{dist}_\infty(\widetilde{\varphi}_n,E))=O(\varepsilon_n^{1/l}),\ l>1.$$

其中$\varepsilon_n=h^{r+1+\beta'}$。

证明 证明类似于定理7.10与命题7.11。其附加部分是$T(y_{in}-x_i)$的所有直到$\beta'+r+1$阶的导数关于n一致有界，因为当$a\geqslant r+1$时，$\|y_{in}-x_i\|_\infty=O(h^{r+1})$，借助引理7.15，这是办得到的。运用定理7.16的证明，从而得到阶$r+1+\beta'$。 $\square$

5.3 数值的例

例 7.1 考虑第二类 Fredholm 方程

$$\int_0^1 k(t,s)x(s)ds - \frac{1}{4}x(t) = -\cosh(1), 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

其中

$$k(t,s) = \begin{cases} -t(1-s), & \text{当 } s \geqslant t, \\ -s(1-t), & \text{当 } s \leqslant t. \end{cases}$$

其精确解为 $x(t) = \cosh(2t-1)$.

我们选取均匀分划 $\Delta = \{i/5\}_0^5$, $h = \frac{1}{5}$, 在每个区间 Δ_i 上，有 $r+1 = 4$ Gauss 点. 在表 7.1 中，我们列出 $x - x_n$ 与 $x - \tilde{x}_n$ 在分划点 t_i ($i = 1,2,3,4$) 的值. 在图7.1中，我们画出误差函数的图形. 即配置误差

$$t \in \Delta_3 \mapsto (x - x_n)(t)$$

与迭代配置误差

$$t \in \Delta_3 \mapsto (x - \tilde{x}_n)(t)$$

的图形，其中 $\Delta_3 = [0.4, 0.6]$. 由于各值间的量的重大差异，所以我们仅仅作出两者的草图.

例7.2 研究f的光滑性质对计算收敛的阶的影响(Lebbar, 1981a). 其核如同例 7.1，右边选取 f 使得解为

(1) $\left(t - \frac{1}{2}\right)^4$,

(2) $\left|t - \frac{1}{2}\right|^{7/2}$,

(3) $\left|t - \frac{1}{2}\right|^{1/2}$.

首先在 $[0,1]$ 上选取均匀分划，$t_i = i/n$, $i = 0, \cdots, n$, $n = 2, 4, 8, 16$; n 是偶数致使分划总是包含有$\frac{1}{2}$. $\perp$-Galerkin 法与在三个Gauss 点的配置法都使用逐段二次多项式. 若误差

表 7.1

在分划点的误差值

i	$(x-x_n)(\overline{t_i})$	$(x-x_n)(t_i^+)$	$(x-\tilde{x}_n)(t_i)$
1	8×10^{-5}	7×10^{-5}	-5×10^{-12}
2	6×10^{-5}	6×10^{-5}	-7×10^{-12}
3	6×10^{-5}	6×10^{-5}	-7×10^{-12}
4	7×10^{-5}	8×10^{-5}	-5×10^{-12}

e_n以速率h^ω趋向于零，则当$n\to\infty$时，$\omega_n:=\log(e_n/e_{2n})/\log 2\to\omega$．我们计算三个误差：$a_n:=\|x-x_n\|_\infty$，$b_n:=\|x-\tilde{x}_n\|_\infty$及$c_n:=\max_i|(x-\tilde{x}_n)(t_i)|$．相应地计算得收敛的阶分别为$\omega_n^a$、$\omega_n^b$及$\omega_n^c$。对此，我们验算收敛于$\omega^a$、$\omega^b$及$\omega^c$。其结果列在表7.2、表7.3与表7.4中。当$f$光滑时，对于$c_n$，配置法给出比投影法更高的收敛阶．但当$f$不是足够光滑时，这就不再成立，如表7.3所示。

表7.2

f 在 [0，1] 上光滑

⊥-Galerkin				配置			
n	2	4	8	n	2	4	8
$\omega^a=3$	2.53	2.81	2.91	$\omega^a=3$	2.62	2.83	2.92
$\omega^b\geqslant5$	4.11	4.35	4.83	$\omega^b\geqslant5$	4.59	4.83	4.92
$\omega^c\geqslant6$	6.01	6.00	6.00	$\omega^c\geqslant6$	7.99	7.99	7.98

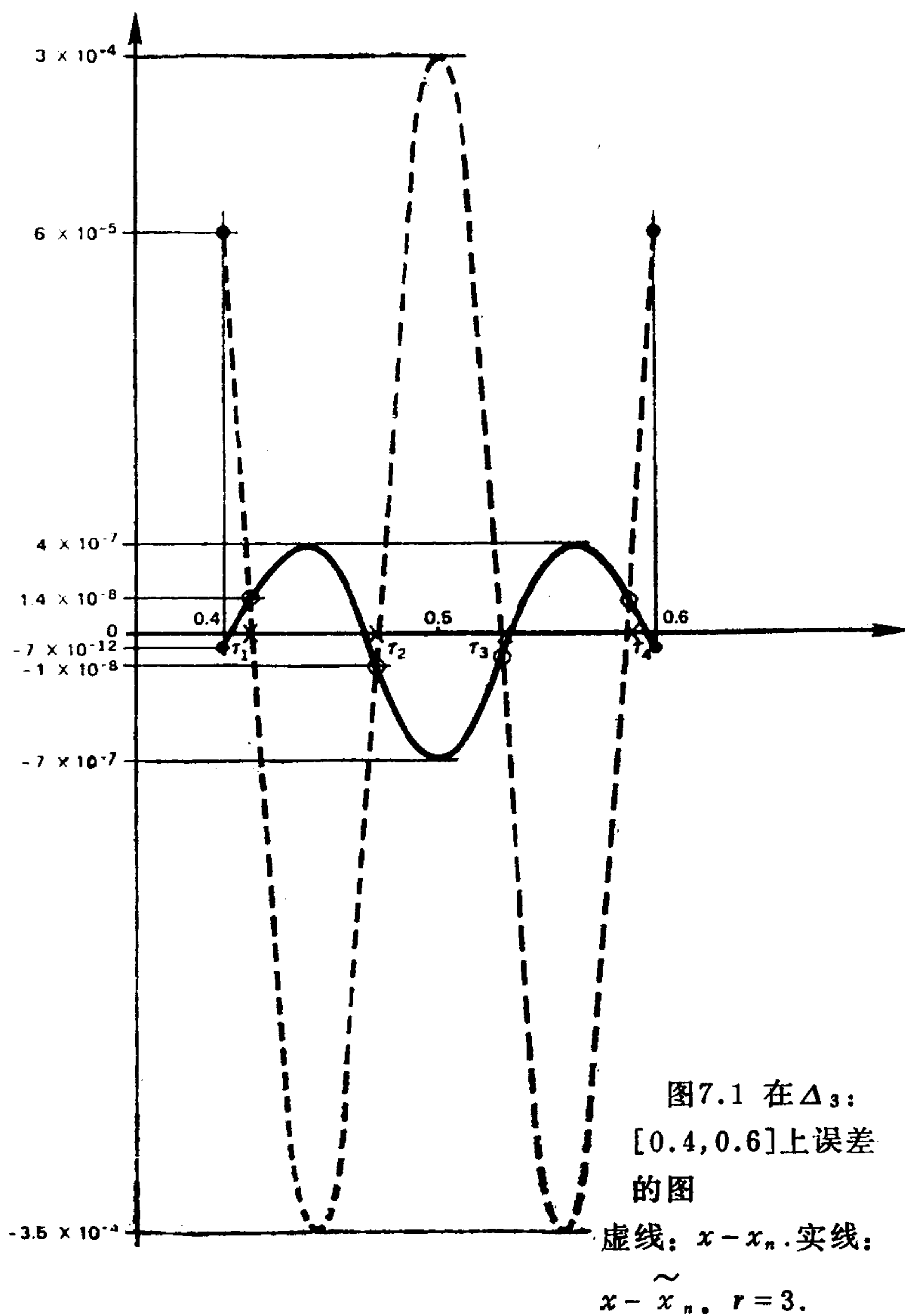


图7.1 在Δ_3：[0.4,0.6]上误差的图

虚线：$x-x_n$.实线：$x-\tilde{x}_n$。$r=3$.

表 7.3

对于配置在$t=1/2$处f不是“足够”光滑

⊥-Galerkin				配置			
n	2	4	8	n	2	4	8
$\omega^a=3$	2.75	2.89	2.96	$\omega^a=3$	2.79	2.92	2.96
$\omega^b\geqslant 5$	4.35	4.66	4.89	$\omega^b\geqslant 3.5$	4.78	4.56	4.52
$\omega^c\geqslant 6$	6.05	6.01	6.00	$\omega^c\geqslant 3.5$	4.61	4.71	4.67

表 7.4 列出了或者应用均匀分划或者应用围绕$\frac{1}{2}$的等级网格的Galerkin法的结果（Rice,1969）．这样一个网格$\{S_i\}_0^n$，n为偶数，是由实数$q>1$按以下方式定义

$$s_i=\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{2}{n}i\right)^q\right],\quad 0\leqslant i\leqslant\frac{n}{2},$$

及

$$s_i=\frac{1}{2}\left[1+\left(1-\frac{2}{n}i\right)^q\right],\quad \frac{n}{2}\leqslant i\leqslant n.$$

表 7.4

f在$t=\frac{1}{2}$是“弱”奇异

$q=1$				$q=1.555$				$q=2$			
n	2	4	8	n	2	4	8	n	2	4	8
$\omega^a=0.5$	0.5	0.5	0.5	$\omega^a=0.77$	0.77	0.77	0.78	$\omega^a=1$	1.00	1.00	0.99
$\omega^b\geq 2.5$	2.54	2.51	2.50	$\omega^b\geq 3.86$	3.91	3.91	3.89	$\omega^b\geq 5$	4.89	4.89	4.99
$\omega^c\geq 3.5$	4.41	4.46	4.47	$\omega^c\geq 6$	5.67	5.83	5.91	$\omega^c\geq 6$	4.70	5.79	5.95

均匀网格　　　等级网格

这些点在 x 处于病态的 $\frac{1}{2}$ 附近是密集的，而在 x 是良态的 0，1 两个端点附近是分散的．当增大 q 值，$q=7/4.5=1.555$，$q=2$ 与 $q=6$ 时，我们能够相应地重新得到值 $\omega^c\geqslant 6$、$\omega^b\geqslant 5$ 与 $\omega^a=3$（Lebbar，1982）．值得注意的是对于 q 的最小值，$\omega^c\geqslant 6$ 是第一次得到恢复．这意味着为得到 $\omega^b\geqslant 5$ 或 $\omega^a=3$，相应的等级网格不象通常要求的那样高度密集在 $\frac{1}{2}$ 附近．这一事实有很大的实际价值．有关证明和细节，读者可参阅Lebbar（1982）．

5.4 文献注释

对于核是常微分方程的 Green 函数，迭代解的超收敛结果，主要参考 Chandler（1979）关于 ⊥—Galerkin 法与 de Boor和Swartz（1973，1980，1981a,b）关于 Gauss 点的配置法．数值求积的作用，也是在Chandler的文章中得到研究．对于核为足够光滑的Galerkin法，一个额外的 h（精度），可以在Gauss点处得到（见Richter，1978）．利用习题 6.3 的恒等式，Lebbar(1981b)证明了当 $\widetilde{\varphi}_n$ 是迭代不变子空间 $\widetilde{M}_n=TM_n$ 中的任意向量，$[(1-P)\widetilde{\varphi}_n](t)$ 的阶仍然成立．

对于弱奇异核，有些类似的超收敛结果是成立的．读者可参阅Graham（1980）关于迭代Galerkin法与Schneider(1979，1980，1981）关于迭代配置法及乘积积分法．

6. 常微分方程的逼近解在分划点的超收敛

我们考虑 p 阶线性微分方程

$$[\mathfrak{L}(u)](t)=u^{(p)}(t)-\sum_{i=0}^{p-1}a_i(t)u_i(t)=f(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

具有 p 个齐次边界条件，这曾在第四章第8.1节中描述过．它

可写为

$$Tu=f, \tag{7.13}$$

其中T为闭算子，其定义域$D\subset X$，后面论及的 Banach 空间还是L^2或L^∞。我们仍设$T^{-1}\in\mathscr{L}(X)$。由命题4.15及例4.17，(7.13) 分别等价于

$$u=Gx,\ (1-K)x=f, \tag{7.14}$$

或者对于给定的z，$0\neq -z\in\rho(T)$，等价于

$$u=A_z y,\ (1-zA_z)y=f. \tag{7.15}$$

引理7.19 若系数a_i属于C^α，$i=0,\cdots,p-1$，则

(i) K的核是关于t属于类$\mathfrak{G}(\alpha,-1)$，

(ii) Az的核是关于t属于类$\mathfrak{G}(\alpha+1,p-2)$。

证明　设G、K与$A=T^{-1}$的核分别为g、k、v，g_t属于类$\mathfrak{G}(\infty,p-2)$，核k是使得

$$k(t,s)=\sum_{i=0}^{p-1}a_i(t)\frac{\partial^i}{\partial t^i}g(t,s),$$

从而容易得到 (i)。至于核v，它是以下面的途径与g有关。对X中任意的f，方程$A(1-K)f=Gf$蕴涵对于$[0,1]$中的任意t，

$$\int_0^1 v(t,s)[(1-K)f](s)ds=\int_0^1 g(t,s)f(s)ds$$

由明确的定义可知v_t是$(1-K^*)v_t=g_t$的解。对于固定的t，$g(t)\in C^{p-2}(0,1)$，因而$v_t\in C^{p-2}(0,1)$。对于$s\neq t$，我们观察v_t在s处的更高阶导数；第l阶导数$v_t^{(l)}$满足

$$v_t^{(l)}=(K^*v_t)^{(l)}+g_t^{(l)},$$

其中

$$(K^*v_t)(s)=\int_0^1\sum_{i=0}^{p-1}\overline{a_i}(\tau)\frac{\partial^i}{\partial\tau^i}\overline{g(\tau,s)}v_t(\tau)d\tau,\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

对 $l=1$，

$$\frac{\partial}{\partial s}(K^* v_t)(s)=\int_0^1\sum_{i=0}^{p-1}\overline{a_i}(\tau)\frac{\partial^i}{\partial\tau^i}\ \frac{\partial}{\partial s}\overline{g}(\tau,s)v_t(\tau)d\tau$$

$$+\overline{a_{p-1}}(s)v_t(s)\left[\frac{\partial^{p-1}}{\partial\tau^{p-1}}\overline{g(}(\tau,s)\Big|_{\tau=s^+}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^{p-1}}{\partial\tau^{p-1}}\overline{g(}\tau,s)\Big|_{\tau=s^-}\right].$$

类似地，在s处的二阶导数将依赖于$\overline{a}_{p-1}^{(1)}(s)$、$\overline{a}_{p-1}(s)$、$\overline{a}_{p-2}(s)$与 $g_t^{(l)}(s)$。所以$v_t^{(l)}$在 $s\neq t$ 处，关于 l 直到 $\alpha+1$ 是连续的．由归纳法可证核v_t属于类 $\mathfrak{S}(\alpha+1,\ p-2)$．最后，我们指出$A$和$A_z$的核具有相同的光滑性质．□

（7.13）的解可用

$$\pi_n[Tu_n-f]=0 \tag{7.16}$$

的解u_n来逼近，当π_n是在 $\mathbb{P}_{r,\Delta}$的投影而且u_n属于$C^{p-1}(0,1)$的子集C_n．C_n是由满足边界条件且在每个Δ_i上次数小于$p+r+1$ 的多项式组成的函数．

选择 π_n^1引出矩法（情形(a)），选择 π_n^2引出了在Gauss点的配置法（情形(b)）．de Boor 和 Swartz（1973）曾首先指出，关于常微分方程选择Gauss 点作为配置点，在分划点的解u_n有比预期更高的精度．这一事实，往往在微分算子的框架中，以超收敛的名义流行．近期，已经发现积分算子关于迭代解$\tilde{x}_n$具有类似的性质（Sloan，1976a；Candler，1979）。如现在所见到的，两个结果是紧密相联的．

在第四章中，给出了关于（7.13）的投影方法的两种解释．第一种是借助于（7.4）的 Galerkin 法，而第二种则是借助于（7.15）的Petrov法。前面，我们分析了Galerkin 法，现用第一种解释来证明超收敛．

6.1 用于（7.14）的Galerkin法

要点是命题4.20中给出的恒等式（4.47）：

$$u-u_n=T^{-1}(1-\pi_n)\widetilde{x}_n,\ \text{其中}\widetilde{x}_n=Kx_n+f,$$

这与（7.12）是相同类型的，其中$\widetilde{x}_n$是K的迭代解。

引理7.20 若$a_i\in C^a$，$i=0,\cdots,p-1$，$f\in C^a,a\geqslant r+1$，则对充分大的n，关于矩法（或配置法）的如下收敛速率成立：

(i) $|(u-u_n)(t_i)|=O(h^{2(r+1)})(\text{或}h^{r+1+\beta'})$，$i=0,\cdots,n$，

(ii) $\|u-u_n\|_\infty=O(h^{r+1+\beta^*})(\text{或}h^{r+1+\beta'^*})$，

其中$\beta^*=\min(r+1,p)$，$\beta'=\min(a-r-1,\ r+1)$ 及$\beta'^*=\min(\beta',p)$。

证明 设v表示T^{-1}的核，v_t属于类$\mathfrak{G}(a+1,p-2)$。对于$[0,1]$中的任意t，

$$(u-u_n)(t)=((1-\pi_n)(\widetilde{x}_n-x),\ \overline{v_t})+((1-\pi_n)x,\overline{v_t}).$$

注意到由假设可得$\beta=\min(a,r+1)=r+1$。

（1）情形(a)：K有一个核属于$\mathfrak{G}(a,-1)$；所以由定理7.9，$\|\widetilde{x}_n-x\|_2$具有阶$r+2$。于是根据推论7.7，$|(\widetilde{x}_n-x,(1-\pi_n^1)\overline{v_t})|$具有阶

$$(r+2)+(r+1),\qquad t\in\Delta,$$
$$r+2+\min(r+1,p-1),\quad t\notin\Delta.$$

由引理7.8，$|((1-\pi_n^1)x,\ (1-\pi_n^1)\overline{v_t})|$具有阶

$$2(r+1),\qquad t\in\Delta,$$
$$r+1+\min(r+1,p),\quad t\notin\Delta.$$

从而得到所要证的阶。

（2）情形(b)：应用推论7.13及定理7.16，$|((1-\pi_n^2)x$

$\overline{v_t})|$ 具有阶

$$\beta' + r + 1, \quad t \in \Delta,$$
$$\beta'^{*} + r + 1, \quad t \notin \Delta.$$

至于内积 $|((1-\pi_n^2)(\widetilde{x_n} - x_n), \overline{v_t})|$，如同证明定理 7.16 所作的那样，把 T 换为 K，z 换为 1，对于 $t \in \Delta$（或对于 $t \notin \Delta$，$\|\widetilde{x_n} - x\|_{\min(\beta', p-1)+r+1, \infty}$），量

$$\|\widetilde{x_n} - x\|_{\beta'+r+1, \infty}$$

关于 n 是一致有界的。□

在分划点，收敛的阶为$2r+2$。对于矩法，当$a \geqslant r+1 > p$，以及对于配置法，当$a \geqslant 2r+2$ 且 $p < r+1$，它们的整体收敛的阶均为$r+1+p$。

6.2 用于（7.15）的Petrov法

对于第二种解释，恒等式（4.49）

$$u - u_n = (1/z)(y - \widetilde{y_n}), \text{其中} \widetilde{y_n} = zA_z y_n + f,$$

已在命题4.23中证明了。借助于定理7.20可以建立迭代Petrov解$\widetilde{y_n}$的超收敛。

习题

7.5 证明恒等式

$$y - \widetilde{y_n} = z(1 - zA_z)^{-1}A_z(\widetilde{y_n} - y_n)$$
$$= zA_z(1 - zA_z)^{-1}(1 - \pi_n)(\widetilde{y_n} - y_n).$$

7.6 证明

$$\widetilde{y_n} - y_n = \widetilde{x_n} - x_n.$$

7.7 利用（7.17）和习题7.5，直接证明$\widetilde{y_n}$的超收敛。

我们曾就 Galerkin 法和 Petrov 法给出了关于投影法用于（7.13）的两种解释，恒等式（7.17）表示了它们之间的联系。

7. 微分本征值问题的超收敛

相应于（7.13）的本征值问题是

$$T\psi=\lambda\psi. \tag{7.18}$$

我们假定$0\in\rho(T)$，P是相应于λ的谱投影.

7.1 简单的微分本征值问题

我们已在例4.26中看到，（7.18）是等价于广义本征值问题

$$\psi=G\varphi,\ (1-K)\varphi=\lambda G\varphi. \tag{7.19}$$

将投影法用于（7.18）等价于将Galerkin法用于（7.19）（习题4.67）.

引理7.21 下面的误差公式成立：

$(1-P)\psi_n=S(\lambda_n)(\pi_n-1)\widetilde{\varphi}_n$，其中$\widetilde{\varphi}_n=K\varphi_n+\lambda_n G\varphi_n$.

证明 设Q是关于$(1-K)\varphi=\lambda G\varphi$的谱投影：

$$Q=\frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma(1-K-zG)^{-1}Gdz\quad 且\ P=GQG^{-1}.$$

于是

$$\begin{aligned}(1-P)\psi_n&=G(1-Q)\varphi_n\\&=G(1-K-\lambda_nG)^{-1}G(1-Q)G^{-1}(1-K-\lambda_nG)\varphi_n\\&=(T-\lambda_n)^{-1}(1-P)(\varphi_n-\widetilde{\varphi}_n)=S(\lambda_n)(\varphi_n-\widetilde{\varphi}_n).\end{aligned}$$

由$\pi_n\widetilde{\varphi}_n=\varphi_n$得到所要证的结果. □

正象我们所要看到的，误差公式是类似于（7.11）的，且是推出$(1-P)\psi_n$的收敛的阶的关键. 由于我们不得不讨论广义本征值问题（7.19），这个推导就不象（7.13）的解那样直接地进行. 所以，我们需要某些预备知识. 若令$U:=(1-K)^{-1}G$，则

$$(1-K)\varphi=\lambda G\varphi\Longleftrightarrow\varphi=\lambda U\varphi,$$

而且Q是相应于$1/\lambda$的U的谱投影，按照假设$(1-K)^{-1}\in\mathscr{L}(X)$，且对充分大的$n$，$(1-\pi_nK)^{-1}$及$(1-K\pi_n)^{-1}$都在

$\mathscr{L}(X)$中．我们定义

$$U_n := (1-\pi_n K)^{-1}\pi_n G,\ \widetilde{U}_n := (1-K\pi_n)^{-1}G\pi_n.$$

习题

7.8 证明$\varphi_n = \lambda_n U_n \varphi_n$，$\pi_n \widetilde{\varphi}_n = \varphi_n$及$\widetilde{\varphi}_n = \lambda_n \widetilde{U}_n \widetilde{\varphi}_n$.

7.9 证明恒等式

$$U - U_n = (1-\pi_n K)^{-1}(1-\pi_n)U,$$

$$U - \widetilde{U}_n = (1-K\pi_n)^{-1}[K(1-\pi_n)U + G(1-\pi_n)].$$

7.10 研究收敛性$U_n \to U$及$\widetilde{U}_n \to U$.

7.11 证明

$$\|(U-U_n)Q\| \leqslant c\|(1-\pi_n)Q\|,$$

$$\|(U-\widetilde{U}_n)Q\| \leqslant c[\|K(1-\pi_n)Q\| + \|G(1-\pi_n)Q\|].$$

7.12 由习题7.11推导

$$\|(1-Q)\varphi_n\| \leqslant c\|(1-\pi_n)Q\|,$$

$$\|(1-Q)\widetilde{\varphi}_n\| \leqslant c[\|K(1-\pi_n)Q\| + \|G(1-\pi_n)Q\|].$$

7.13 设N_n（或$\widetilde{N}_n$）是相应收敛于$1/\lambda$的本征值的U_n（或$\widetilde{U}_n$）的不变子空间，验证$N_n \subset \mathbb{P}_{r,\Delta}$。给出$\Theta(N, N_n)$及$\Theta(N, \widetilde{N}_n)$的界.

7.14 证明择一公式

$$U - U_n = (1-K)^{-1}(1-\pi_n)(G + KU_n).$$

7.15 证明$\lambda - \widehat{\lambda}_n$具有阶

$$\left| \sum_{i=1}^{m} ((U-U_n)(Q_{\restriction N_n})^{-1}\varphi_i,\ \varphi_i^*) \right|,$$

其中φ_i（或φ_i^*）属于N（或$N^* = Q^*X^*$）.

引理7.22 若$a_i \in C^\alpha$，$i = 0, \cdots, p-1$，则Q有一个关于两个变量的具有连续性α的退化核。

证明　我们仅仅需要证明$N\subset C^{a}$（或$N^{*}\subset C^{a}$）。回顾$(1-K)^{-1}M=N$，其中$M=PX\subset C^{a+1}$（或$M^{*}\subset C^{a+1}$）。对于$f\in M$，$h\in N$是$(1-K)h=f$的解且$h\in C^{a}$。□

引理7.23　若$a_i\in C^{a}$，$i=0,\cdots,p-1$，则

$$(T-\lambda_n)^{-1}(1-P)$$

的核关于t属于类$\mathfrak{S}(a,p-2)$。

证明　设v^1是$(T-\lambda_n)^{-1}(1-P)$的核。对于X中的任意f，方程$(T-\lambda_n)u=(1-P)f$是等价于$u=Gx$与$x=(K+\lambda_nG)x+(1-P)f$。所以，对于X中的任意x，

$$\begin{aligned}u&=(T-\lambda_n)^{-1}(1-P)f\\&=(T-\lambda_n)^{-1}(1-P)(1-K-\lambda_nG)x\\&=(1-P)Gx=G(1-Q)x.\end{aligned}$$

我们推证对于X中的任意x和$[0,1]$中的t，$v^1(t,s)$是方程

$$\int_0^1 v^1(t,s)[(1-K-\lambda_nG)x](s)ds$$

$$=\int_0^1 g(t,s)[(1-Q)x](s)ds$$

的解。把上面方程改写为

$$(1-K^{*}-\overline{\lambda}_nG^{*})v_t^1=(1-Q^{*})g_t.$$

由于Q^{*}是相应于本征值问题$(1-K^{*})\varphi^{*}=\overline{\lambda}G^{*}\varphi^{*}$的谱投影，所以上面的方程有唯一的解。注意到$l$阶导数满足$v_t^{1(l)}=(K^{*}v_t^1)^{(l)}+\overline{\lambda}_n(G^{*}v_t^1)^{(l)}+g_t^{(l)}-(Q^{*}g_t)^{(l)}$，我们就可以利用引理7.19的证明推断出$v_t^1$属于类$\mathfrak{S}(a,p-2)$。□

定理7.24　在定理7.20的假设下，当n充分大时，对于

$$|[(1-p)\psi_n](t_i)|,\qquad i=0,\cdots,n.$$

与

$$\|(1-P)\psi_n\|_\infty$$

分别具有与定理7.20中（i）（ii）相同的收敛阶。

证明　根据引理7.23，约化预解式$S(\lambda_n)=(T-\lambda_n)^{-1}(1-P)$的核$v_t^1$属于类$\mathfrak{S}(\alpha,p-2)$，于是

$$
\begin{aligned}
[(1-P)\psi_n](t) &= ((\pi_n-1)\widetilde{\varphi}_n,\overline{v}_t^1)\\
&= ((\pi_n-1)Q\widetilde{\varphi}_n,\overline{v}_t^1)+((\pi_n-1)(1-Q)\widetilde{\varphi}_n,\overline{v}_t^1).
\end{aligned}
$$

（a）矩法　Q是具有连续性α，由引理7.8，显然$\|K(1-\pi_n^1)Q\|_2$具有阶$r+2$。应用定理7.20的证明，推出$\|(1-Q)\widetilde{\varphi}_n\|_2\leqslant ch^{r+2}$。

（b）配置法　证明是取自定理7.16的证明，但需要$\|(1-Q)\varphi_n\|_\infty\leqslant ch^{r+1}$，这可从习题7.12得到。

在定理7.20中，T^{-1}的核属于类$\mathfrak{S}(\alpha+1,p-2)$，然而，由于$\alpha\geqslant r+1$的假设，我们有$\min(\alpha+1,r+1)=\min(\alpha,r+1)=r+1$，因而得到$v_t$和$v_t^1$的阶是相同的。　□

定理7.25　在定理7.20的假设下，对于矩法（或配置法）有$|\lambda-\hat{\lambda}_n|=O(h^{2(r+1)})$（或$h^{r+1+\beta'}$）。

证明　令$Q_n:=Q\restriction_{N_n}$。我们利用习题7.15求得

$$
\left|\sum_{i=1}^{m}((U-U_n)Q_{(n)}^{-1}\varphi_i,\varphi_i^*)\right|
$$

$$
=\left|\sum_{i=1}^{m}((1-\pi_n)(G+KU_n)Q_{(n)}^{-1}\varphi_i,(1-K^*)\varphi_i^*)\right|
$$

的阶。$(1-K^*)\varphi_i^*\in M^*\subset C^{\alpha+1}$。令$\varphi_{in}:=Q_{(n)}^{-1}\varphi_i\in N_n\subset\mathbb{P}_{r,\Delta}$及$\eta_{in}:=\varphi_{in}-\varphi_i$。对$\nu=2$或$\infty$，
$\|\eta_{in}\|_\nu=\|(Q_{(n)}^{-1}Q-Q)\varphi_i\|_\nu\leqslant ch^{r+1}$。

我们首先讨论 $(1-\pi_n)G\varphi_{in}=(1-\pi_n)G(\varphi_i+\eta_{in})$。利用定理7.10的证明及命题7.18可直接得到结果。对于配置法，如同定理7.16的证明所作的那样，利用$\|\eta_{in}\|_\infty\leqslant ch^{r+1}$及$\eta_{in}=\varphi_{in}-\varphi_i$，$\varphi_{in}\in\mathbb{P}_{r,\Delta}$，$G\eta_{in}$直到$\beta'+r+1$阶的导数是关于$n$有界的。

这时 $(1-\pi_n)KU_n\varphi_{in}=(1-\pi_n)K(U_n\varphi_{in}-U\varphi_i)+(1-\pi_n)KJ\varphi_i$.

$$\psi_{in}:=U_n\varphi_{in}-U_{\varphi_i}=U_n\eta_{in}+(U_n-U)\varphi_i$$

及

$$U_n-U=(1-\pi_nK)^{-1}(1-\pi_n)U$$

可证对于$\nu=2$或∞，$\|\psi_{in}\|_\nu\leqslant ch^{r+1}$.

对于投影π_n^1，结论很快地得到；至于π_n^2，如前那样地进行，利用$\|\psi_{in}\|_\infty\leqslant ch^{r+1}$及$\psi_{in}=U_n\varphi_{in}-U\varphi_i$，$U_n\varphi_{in}\in N_n\subset\mathbb{P}_{r,\Delta}$，来确定$K\psi_{in}$的直到$\beta'+r-1$阶导数的界。□

至于第6节中的解，可以利用（7.19）的积分形式得到证明本征元的超收敛。因为（7.19）是一个广义本征值问题，积分本征值问题的结果是不能以直接进行的方式来使用的。然而，我们将要看到，不难置问题于这个理论可以应用的形式.

如果愿意直接研究单本征值问题，就可选取使

$$\psi=A\vartheta,\quad \vartheta=\lambda A\vartheta \tag{7.20}$$

为抉择积分形式来研究. 用于（7.18）的投影法是等价于用在（7.20）的Petrov法（习题4.70），而Petrov法又等价于关于$X_n'=TX_n$以$\pi_n'=(\pi_{n|X_n'})^{-1}\pi_n$为投影的Galerkin法。容易地写出用$1-\pi_n'$表示的误差界，这时，面临的问题是$\pi_n$与$\pi_n'$两者之间的关系问题，而这个问题是容易解决的，这是由于关于（7.20）的Petrov法与关于（7.19）的Galerkin法之间存在着密切的联系。

习题

7.16 利用习题4.71的恒等式 $(1-P)\psi_n=(1/\lambda_n)(1-P)\widetilde{\theta}_n$ 证明迭代Petrov本征向量 $\widetilde{\theta}_n$ 的超收敛性。

7.17 证明 $\theta_n-\widetilde{\theta}_n=\varphi_n-\widetilde{\varphi}_n$。

7.18 证明

$$
\begin{aligned}
(1-P)\widetilde{\theta}_n &= \lambda_n A(1-\lambda_n A)^{-1}(1-P)(\theta_n-\widetilde{\theta}_n) \\
&= \lambda_n A(1-\lambda_n A)^{-1}(1-P)(1-\pi_n)(\theta_n-\widetilde{\theta}_n).
\end{aligned}
$$

推导出 $\widetilde{\theta}_n$ 超收敛的一个直接证明.

7.19 证明 $\pi_n'=(1-K)(1-\pi_n K)^{-1}\pi_n$（提示：利用命题4.8的证明）。

对于本征向量，习题7.17的恒等式是类似于（7.17）式的。至于本征值，我们知道 $\lambda-\hat{\lambda}_n$ 具有阶

$$
\left|\sum_{i=1}^{m}((1-\pi_n')AP_{(n)}^{-1}\theta_i,\theta_i^*)\right|,
$$

其中 θ_i（或 θ_i^*）属于 M（或 M^*）。为了达到目的，我们研究 $(1-\pi_n')AP_{(n)}^{-1}$。首先，写出

$$
\begin{aligned}
AP_{(n)}^{-1} &= G[P_{(n)}(1-K)]^{-1}=G[(1-K)Q_{(n)}]^{-1} \\
&= GQ_{(n)}^{-1}(1-K)^{-1}.
\end{aligned}
$$

于是，由习题7.19，$\pi_n'=(1-K)(1-\pi_n K)^{-1}\pi_n$。所以，由习题7.14，

$$
\begin{aligned}
(1-\pi_n')G &= (1-K)[(1-K)^{-1}-(1-\pi_n K)^{-1}\pi_n]G \\
&= (1-K)(U-U_n)=(1-\pi_n)(G+KU_n),
\end{aligned}
$$

得出 $\lambda-\hat{\lambda}_n$ 具有阶

$$\left|\sum_{i=1}^{m}((1-\pi_n)(G+KU_n)Q_{(n)}^{-1}(1-K)^{-1}\theta_i,\theta_i^*)\right|,$$

其中向量 $(1-K)^{-1}\theta_i$ 属于 N（习题 7.20），然后应用定理 7.25。

习题

7.20 利用 $Q=(1-K)^{-1}P(1-K)$ 证明 $\theta\in M$ 蕴涵 $(1-K)^{-1}\theta\in N$ 及 $\theta^*\in M^*$ 蕴涵 $(1-K^*)\theta^*\in N^*$。

7.2 广义微分本征值问题

现在我们考虑至多 $p-1$ 阶的第二微分形式 $\mathfrak{N}$，

$$[\mathfrak{N}(u)](t)=\sum_{i=0}^{p-1}b_i(t)u^{(i)}(t),$$

及广义微分本征值问题

$$T\psi=\lambda\mathfrak{N}\psi. \tag{7.21}$$

(7.21) 与 (7.18) 之间的主要差异是与恒同算子 1 比较 $\mathfrak{N}$ 是不可逆的。于是，误差公式可用略微不同的方式而得到。

(7.21) 等价于

$$\psi=G\psi,\quad (1-K)\varphi=\lambda L\varphi,\quad L:=\mathfrak{N}G \tag{7.22}$$

且等价于

$$\xi=(1-K)\varphi,\qquad \xi=\lambda\mathfrak{N}A\xi,$$
$$\text{其中}\ \mathfrak{N}A=L(1-K)^{-1}. \tag{7.23}$$

对应于 (7.21)、(7.22) 及 (7.23) 的谱投影分别记为 P'、Q' 和 R。下面的关系是成立的：

$$Q'=G^{-1}P'G,\quad R=(1-K)Q'(1-K)^{-1}=TP'T^{-1}.$$

最后，相应于不变子空间 N 及 N_n，给出定义：

$$V:=(1-K)^{-1}L\quad \text{及}\quad V_n:=(1-\pi_nK)^{-1}\pi_nL.$$

习题

7.21 当 $\psi_n = G\varphi_n$ 是

$$\pi_n[T\psi_n - \lambda_n \mathfrak{N}\psi_n] = 0, \quad \psi_n \in C_n,$$

的解，证明 $\varphi = \lambda V\varphi$ 及 $\varphi_n = \lambda_n V_n \varphi_n$。

7.22 证明

$$V - V_n = (1-K)^{-1}(1-\pi_n)(L+KV_n)$$
$$= (1-\pi_n K)^{-1}(1-\pi_n)V.$$

引理7.26 下面的误差公式成立

$$(1-P')\psi_n = (T-\lambda_n \mathfrak{N})^{-1}(1-R)(\pi_n - 1)\widetilde{\varphi}_n,$$

其中 $\widetilde{\varphi}_n = K\varphi_n + \lambda_n L\varphi_n$。

证明

$$(1-P')\psi_n = G(1-Q')\varphi_n,$$
$$(1-Q')\varphi_n = (\lambda_n(1-K)^{-1}L-1)^{-1}(1-$$
$$-Q')(\lambda_n(1-K)^{-1}L-1)\varphi_n$$
$$=[\lambda_n L-(1-K)]^{-1}(1-K)(1-Q')(1-K)^{-1}$$
$$\times[\lambda_n L\varphi_n-(1-K)\varphi_n]$$
$$=(1-K)^{-1}(\lambda_n L(1-K)^{-1}-1)^{-1}(1-R)(\widetilde{\varphi}_n-$$
$$-\varphi),$$

与 $(\lambda_n \mathfrak{N}A-1)^{-1}(1-R)=\lambda_n S(\mathfrak{N}A, 1/\lambda_n)$，其中 $S(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathfrak{N}A$关于$1/\lambda$ 在点 $1/\lambda_n$ 的约化预解式。形式地写出

$$G(1-K)^{-1}(\lambda_n\mathfrak{N}A-1)^{-1}=[\lambda_n(\mathfrak{N}G(1-$$
$$K)^{-1}-1)(1-K)G^{-1}]^{-1}$$
$$=(\lambda_n\mathfrak{N}-T)^{-1},$$

并且得出

$$(1-P')\psi_n=(T-\lambda_n\mathfrak{N})^{-1}(1-R)(\varphi_n-\widetilde{\varphi}_n)$$
$$=(T-\lambda_n\mathfrak{N})^{-1}(1-R)(\pi_n-1)\widetilde{\varphi}_n,$$

其中 $(T-\lambda_n\mathfrak{N})^{-1}(1-R)=\lambda_n AS(\mathfrak{N}A, 1/\lambda_n)$ 通过预解式 $S(\cdot,\cdot)$ 明确地定义为A的积。□

习题

7.23 验证：当$\mathfrak{N}=1$，引理7.26的公式给出引理7.21的公式。

为了最终得到$(1-P)\psi_n$及$\lambda-\hat{\lambda}_n$的阶，仅剩下研究R、Q'、$(T-z\mathfrak{N})^{-1}$（其中z使得$(T-z\mathfrak{N})^{-1}\in\mathscr{L}(X)$）以及$(T-\lambda_n\mathfrak{N})^{-1}(1-R)$的核的性质。

引理7.27 若a_i，$b_i\in C^\alpha$，$i=0,\cdots,p-1$，则

（i）$(T-z\mathfrak{N})^{-1}$有一个核关于t属于类$\mathfrak{G}(\alpha+1,p-2)$，

（ii）L有一个核关于t属于类$\mathfrak{G}(\alpha,-1)$，

（iii）R和Q'有一个关于两个变量，具有连续性α的退化核，

（iv）$(T-\lambda_n\mathfrak{N})^{-1}(1-R)$有一个核关于$t$属于类$\mathfrak{G}(\alpha,p-2)$.

证明 （i）$(T-z\mathfrak{N})u=\mathfrak{L}u-z\mathfrak{N}u=u^{(p)}-\Sigma_{i=0}^{p-1}(a_i-zb_i)u^{(i)})$。于是，$(T-z\mathfrak{N})^{-1}$的核与引理7.19给出$T^{-1}$的核是同类的。

（ii）L的核是$\Sigma_{i=0}^{p-1}b_i(t)\partial^i g(t,s)/\partial t^i$.

（iii）我们首先讨论相应于$\mathfrak{N}A$的谱投影R．对任意整数$q\geqslant1$，设空间$X^{(q)}$定义为

$$X^{(q)}:=\{f\in C^{q-1}(0,1);\ f^{(q-1)}\text{是绝对连续的，}f^{(q)}\in X\}$$

其中X是L^2或C。

对于$q\leqslant\alpha$，A是$X^{(q)}\longrightarrow X^{(p+q)}$的算子．对于$q<\alpha$，$\mathfrak{N}A:X^{(q)}\longrightarrow X^{(q+1)}$．所以$\mathfrak{N}A$的任意不变函数$\xi$，亦即$(\mathfrak{N}A-\lambda)^m\xi=0$的解，属于$C^\alpha$。现在，$V$的不变函数$\varphi$是使得$\varphi=(1-K)^{-1}\xi$，这就证明了$\varphi\in C^\alpha$。

（iv）设v^2是$(T-\lambda_n\mathfrak{N})^{-1}(1-R)$的核．对$X$中的任意

一个f，方程 $(T-\lambda_n\mathfrak{N})u=(1-R)f$ 等价于 $u=Gx$，且

$$x=(K+\lambda_n L)x+(1-R)f$$

因此，如果证明了 $u=(1-P')u$，那么

$$u=(T-\lambda_n\mathfrak{N})^{-1}(1-R)(1-K-\lambda_n L)x$$
$$=(1-P')Gx=G(1-Q')x.$$

但$A(1-R)=(1-P')A$，因而

$$u=A(1-R)(1-\lambda_n\mathfrak{N}A)^{-1}(1-R)f$$
$$=(1-P')A(1-\lambda_n\mathfrak{N}A)^{-1}(1-R)f.$$

于是对X中的任意x及$[0,1]$中的任意t，我们得到

$$\int_0^1 v^2(t,s)[(1-K-\lambda_n L)x](s)ds$$

$$=\int_0^1 g(t,s)[(1-Q')x](s)ds,$$

或

$$(1-K^*-\overline{\lambda}_n L^*)v_t^2=(1-Q'^*)g_t.$$

根据（ii）和（iii），如同定理7.23所作的证明，即可得到结论。□

这时，当a_i，$b_i\in C^a$，$a\geqslant r+1$，$i=0,\cdots,p-1$，可以直接地证明：

（i）定理7.24中给出的关于$[(1-P)\psi_n](t_i)$与$\|(1-P)\psi_n\|_\infty$的收敛的阶，

（ii）定理7.25中给出的关于$\lambda-\hat{\lambda}_n$的收敛的阶.

7.3 文献注释

de Boor和Swartz（1973，1980，1981 a，b）对Gauss点的配置法及Lobatto点的配置法（1981b）作过详尽的研究。关于微分方程的其它投影方法的超收敛结果，在Locker和Prenter（1983）中有最小二乘法，在Douglas和Dupont（1973，

1974）中有关于有限元法（亦可参见Hemker，1975；Ahués和Telias，1982a）。

B. 本征元的迭代加细

在这一部分中，我们感兴趣的是本征元的迭代加细计算．首先，研究积分算子的情形。

8. T是积分算子

计算积分算子T的逼近T_n的本征元λ_n，φ_n，要求解决一个满矩阵的本征值问题，这可能要多耗费机时与存贮．在某种条件下，当利用外推或迭代加细技巧，以相当小的附加工作，就可改善λ_n与φ_n的精度．如果要求的精度需要利用矩阵，而矩阵对于可用的计算机的容量又太大，这些方法就显得特别适宜。

8.1 外推

Baker（1971）指出在定理4.13的假设下，当T由Nystöm法来逼近时，序列$\{\lambda_n^N\}$与$\{\varphi_n^N\}$（N表示Nyström）能被外推．当核足够光滑时，这个技巧易于实现并且给出非常好的结果（Redont，1979b）．当核不光滑时，尚未从理论上建立起这一方法。

外推方法的研究已超出本书的范围，我们仅向读者提供一些有关的参考文献（Baker，1971，1977；Bulirsch和Stoer，1966；Lin Qun和Liu Jiaquan，1980；Stetter，1978）．

8.2 迭代加细：一个计算格式

在整个这一节中，假定本征值是单的．假设T是紧的，或用投影或用近似求积来逼近T，这就引出一致收敛或集体紧收敛．所以，在第五章中由公式（5.16）定义的序列，对充分大

的固定的 n 是收敛的.

公式 (5.16) 的计算可行性是以下面为基础的.

(1) 对于X中给定的 f, 若 Tf 不能按封闭形式计算, 则 Tf 用 $T_M f$ 来逼近, 其中 T_M 是比 T_n 更高阶的逼近 (第五章第6.42节).

(2) 由第四章第6.1节定理4.3及推论 4.4 给出的推论, T_n、P_n 及 S_n 与 $\mathscr{T}_n$、$\mathscr{D}_n$ 及 $\mathscr{S}_n$ 有关.

于是, 问题简化为 (比方说) 在 n 维子空间 X_n 中方程序列的解. 设在 X_n 中给定一个基 (及 X_n^* 的一个伴随基). $\mathscr{T}_n$ 是用矩阵 A_n 表示, I 是 $n\times n$ 单位矩阵. 在 $\mathbb{C}_n$ 中解

$$A_n u_n = \lambda_n u_n$$

及

$$(A_n^H - \overline{\lambda}_n I)v_n = 0, \quad v_n^H u_n = 1.$$

于是, 谱投影 $\mathscr{D}_n$ 表示为矩阵 $\mathbf{P}_n = u_n v_n^H$. 迭代格式是基于方程序列

$$(A_n - \lambda_n I)\xi_k = (I - \mathbf{P}_n)b_k, v_n^H\xi_k = 0, \quad k \geqslant 1, \tag{7.24}$$

在 $\mathbb{C}_n$ 中的分解, 其中 b_k 是已知的.

(7.24) 是具有秩 n 的 n 个未知数的 $n+1$ 个方程组. 它有唯一解 $\xi_k = \mathbf{S}_n(I - \mathbf{P}_n)b_k$; $\mathbf{S}_n$ 是在选定的基下, 表示 $\mathscr{S}_n$ 的矩阵.

要解 (7.24), 人们可以做 $(n+1)\times n$ 阶矩阵的部分 Gauss 主元素分解, 并相应计算右端. 然后, 去掉等于零的而得到 n 个方程 n 个未知数的正则方程组(见Kulkarni和Limaye, 1982).

习题

7.24 验证公式 (5.16) 的所有计算步骤并不要求已知

φ_n^*.

7.25 方程组（7.24）的条件依赖于$\|S_n\|_2$和$\|v_n\|_2$，其中$\|\cdot\|_2$是$\mathbb{C}^n$中的欧几里得范数。

8.3 投影法的特殊情形

人们可以把迭代T_n选为T_n^P，T_n^G或T_n^S，其迭代之间存在着特殊的联系．在第六章中，我们已经看到

$$\lambda_n = \lambda^{0G} = \lambda^{1G} \qquad \text{（习题5.52）}$$

$$\lambda^{1s} = \lambda^{1P} \qquad \text{（引理6.17），}$$

$$= \lambda^{2G} \qquad \text{（习题6.27），}$$

$$\varphi^{0S} = \varphi^{1G}.$$

用归纳法可证

$$\lambda^{kP} = \lambda^{KS},\quad \varphi^{kS} = (1/\lambda_n)T\varphi^{kP} \qquad k \geqslant 1.$$

这留给读者来完成。

值得注意，T_n^S和T_n^P引出了相同的迭代本征值。

8.4 收敛速率

如推论5.36所证的，级数λ_n^k（或φ_n^k）是由公比为q（或q'）的几何级数所控制．在$\|T-T_n\|\to 0$（或$T_n \xrightarrow{CC} T$）的假设下，能够证明更特殊的结果（见Redont，1979*a*；Kulkarni 和 Limaye，1983a，b）．集体紧收敛的情形是很有趣的：因为对于任意的有界算子U及V，$\|(T-T_n)U(T-T_n)V\|\to 0$，人们可以证明“交错的”或“锯齿状的”收敛也就受到公比为q（或q'）的几何级数的全面控制。例7.3给出的数值试验，由开始的几步迭代就非常清楚地显示了这种现象。

例7.3 我们转述Redont（1979a）给出的一些数值试验．在$X = C(0,\ 1)$中，考虑由以下四种核定义的积分算子：

k_1和k_2如第六章第4.4节所定义的；

$$k_3(s, t) = \begin{cases} s(1-t), & \text{当 } s \leqslant t, \\ t(1-s), & \text{当 } t \leqslant s. \end{cases}$$

$$k_4(s, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}|s-t|, & \text{当 } s \leqslant t, \\ 2|s-t|, & \text{当 } t \leqslant s. \end{cases}$$

k_1，k_2及k_3关于 s 与 t 是对称的；k_1是光滑的，k_2，k_3，k_4有不连续的一阶导数。

相应于k_1与k_2的本征值已在第六章第4.4 节中给出。由 k_3 和k_4定义的积分算子的第一和第三的主本征值，对于k_3为

$$\lambda_1 = 1/\pi^2 = 0.101321,$$
$$\lambda_3 = 1/9\pi^2 = 0.001257.$$

对于k_4为

$$\lambda_1 = 0.360319,$$
$$\lambda_3 = -0.100387.$$

逼近算子 为T_n^P与 T_n^N，其中投影与求积公式已在第六章 第 4.4 节中给出其定义。我们回 忆$\|T_n^P - T\|_\infty \to 0$ 及 $T_n^N \xrightarrow{cc} T$。当T 由核k_1 定义时，则在C_*^∞中

$$\|\|T_n^N - T\|\| \to 0\ .$$

结果列在表7.5、表7.6及表7.7中，其中

$$\alpha = \lambda - \lambda^k, \quad \beta = |\lambda - \lambda^k| / |\lambda - \lambda^{k-1}|,$$
$$\nu = \|\phi - \varphi^k\|_2, \quad \delta = \|\phi - \varphi^k\|_2 / \|\phi - \varphi^{k-1}\|_2.$$

当收敛$T_n \to T$在某种范数下一致时，表7.5 和表7.6 及图7.2清楚地表明了级数 λ^k 和 φ^k的几何收敛性。

当 $T_n \xrightarrow{cc} T$，级数λ^k 与φ^k 的第一项的交错收敛在表 7.7 与图 7.3 中显现出来。人们可以注意到各步的斜度减少了。而且，第一个迭代本征向量φ^1 改善了φ_n，而第一个迭代本征 值

表 7.5

T_n^P的迭代

$k(s,t)$	ν	i		k 0	1	2
k_1	6	1	$\|x\|$	2.0×10^{-3}	8.0×10^{-8}	1.2×10^{-10}
			β	–	4.0×10^{-5}	1.5×10^{-3}
		3	$\|x\|$	6.4×10^{-6}	2.2×10^{-8}	9.4×10^{-11}
			β	–	3.4×10^{-3}	4.3×10^{-3}
	10	1	$\|x\|$	6.0×10^{-4}	1.0×10^{-8}	4.6×10^{-12}
			β	–	1.7×10^{-3}	4.6×10^{-4}
		3	$\|x\|$	3.3×10^{-7}	3.1×10^{-10}	7.5×10^{-14}
			β	–	0.9×10^{-3}	4.6×10^{-4}
	16	1	$\|x\|$	2.2×10^{-4}	1.4×10^{-9}	2.2×10^{-13}
			β	–	6.4×10^{-4}	1.6×10^{-4}
		3	$\|x\|$	3.6×10^{-7}	1.0×10^{-11}	1.6×10^{-14}
			β	–	2.8×10^{-3}	1.6×10^{-3}
k_2	6	1	$\|x\|$	3.0×10^{-3}	2.0×10^{-4}	1.5×10^{-4}
			β	–	6.7×10^{-2}	0.75
	10	1	$\|x\|$	9.6×10^{-4}	5.0×10^{-5}	3.5×10^{-5}
			β	–	5.2×10^{-2}	0.7
	16	1	$\|x\|$	3.5×10^{-4}	2.0×10^{-5}	8.2×10^{-6}
			β	–	5.7×10^{-2}	4.1×10^{-1}

λ^1却不能改善λ_n.

在所有的情形中，由于方程（7.24）的条件，当本征值的秩增加时，改善的速率减慢了. 对于适当的n，从λ_n、φ_n迭代加细而得到的λ、φ的逼近与λ_n、φ_n的逼近有相同的精度，对于几个主本征元可以得到10～20的节时因子.

级数λ^k与φ^k的收敛性，在n充分大的条件下，已在第五章定理5.35得到证明. 我们在例7.4中研究这个条件的影响.

表 7.6

T_n^N的迭代

$k(s,t)$		i		k			
				0	1	2	3
k_1	6	1	$\lvert\alpha\rvert$	1.3×10^{-5}	4.6×10^{-9}	3.7×10^{-13}	4.4×10^{-16}
			β		3.5×10^{-4}	8×10^{-5}	1.2×10^{-3}
			γ	8.1×10^{-6}	1.6×10^{-9}	1.2×10^{-13}	8.3×10^{-16}
			δ		2.0×10^{-4}	0.75×10^{-4}	6.9×10^{-3}
		3	$\lvert\alpha\rvert$	6.2×10^{-3}	1.1×10^{-7}	3.0×10^{-9}	3.8×10^{-11}
			β		1.8×10^{-3}	2.7×10^{-2}	1.3×10^{-2}
			γ	2.5×10^{-3}	3.1×10^{-5}	4.2×10^{-7}	3.7×10^{-9}
			δ		1.2×10^{-2}	1.4×10^{-2}	0.9×10^{-2}

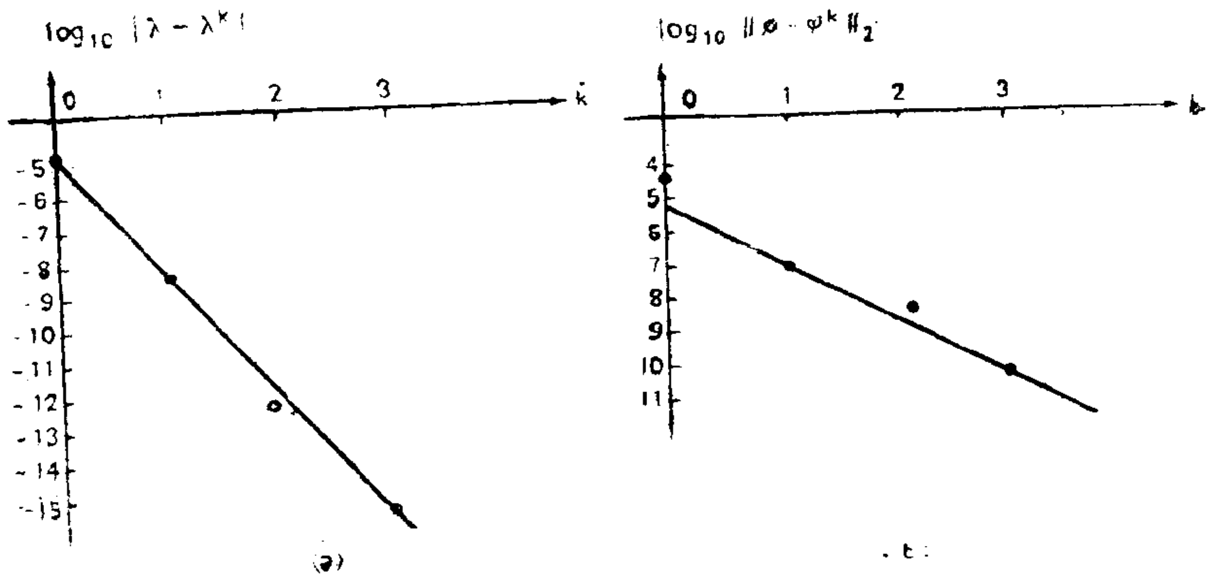


图 7.2

当$\|T_n-T\|\to0$时的几何收敛．T_n^N的迭代，这里T_n^N是由k_1定义的T的 Nyström 逼近，(a)主本征值λ_1的结果，(b)与λ_1相应的本征向量ϕ_1。

表 7.7

T_n^N的迭代

$k(s,t)$	v	i		k = 0	1	2	3	4	5
k_3	16	1	α	9.0×10^{-5}	-1.1×10^{-4}	-2.5×10^{-7}	1.2×10^{-7}	9.3×10^{-10}	-2.6×10^{-10}
			β		1.2	2.2×10^{-3}	0.49	7.8×10^{-3}	0.28
			γ	7.2×10^{-4}	2.0×10^{-6}	7.8×10^{-7}	6.9×10^{-9}	1.7×10^{-9}	2.6×10^{-11}
			δ	—	2.8×10^{-3}	0.39	8.9×10^{-3}	0.24	1.5×10^{-2}
		3	α	9.1×10^{-5}	-1.1×10^{-4}	-2.2×10^{-6}	1.0×10^{-6}	7.2×10^{-8}	-1.6×10^{-8}
			β	—	1.2	2.0×10^{-2}	0.46	2.2×10^{-2}	0.23
			γ	6.8×10^{-3}	1.7×10^{-4}	6.0×10^{-6}	5.0×10^{-7}	9.6×10^{-7}	
			δ	—	2.5×10^{-2}	0.36	8.3×10^{-2}	0.19	
k_4	30	1	α	-1.6×10^{-3}	1.6×10^{-3}	-1.6×10^{-5}	7.1×10^{-6}	-2.4×10^{-7}	6.7×10^{-8}
			β	—	1	1.0×10^{-2}	0.45	3.4×10^{-2}	0.28
			γ	3.5×10^{-3}	4.5×10^{-5}	1.6×10^{-5}	5.8×10^{-7}	1.5×10^{-7}	9.1×10^{-9}
			δ	—	1.2×10^{-2}	0.40	3.6×10^{-2}	0.26	6.9×10^{-2}
		3	α	-1.6×10^{-3}	1.5×10^{-3}	5.6×10^{-5}	-2.1×10^{-5}		
			β	—	0.95	3.6×10^{-2}	0.38		
			γ	1.4×10^{-2}	5.9×10^{-4}	2.3×10^{-4}			
			δ	—	4.1×10^{-2}	0.38			

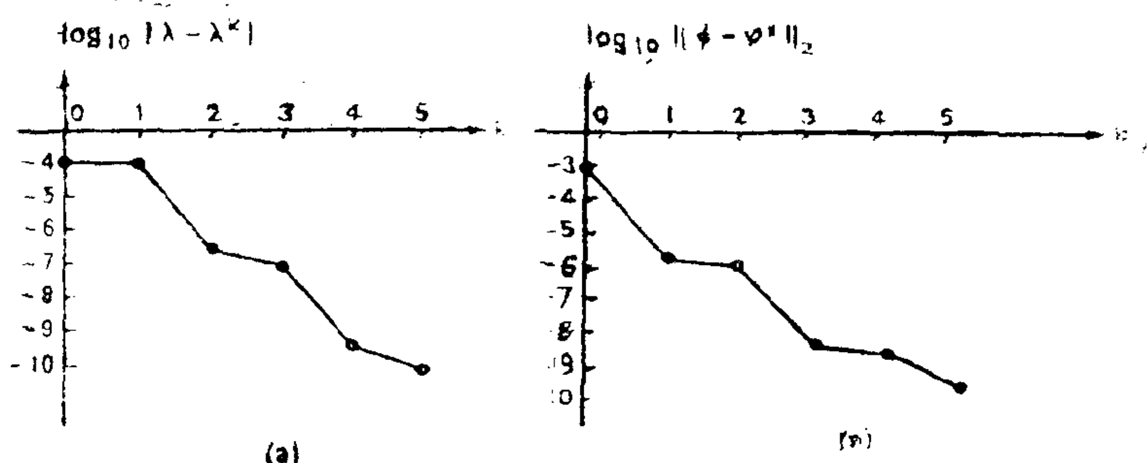


图 7.3

当 $T_n \xrightarrow{cc} T$ 时的"交错"收敛．T_n^N 的迭代，这里 T_n^N 是由 k_3 定义的 T 的Nystöm逼近．(a)主本征值的结果，(b)与 λ_1 相应的本征向量 ϕ_1．

例7.4 我们讨论位势为 $gr^{-(s+2)}$，$-2\leqslant s\leqslant 0$，$g<0$ 的Schrödinger算子的数值谱．由Dumont—Lepage等（1980）的方法，并运用变量分离法及两种积分变换(Fourier—Fock)，得到 l^2 中的本征值问题

$$(1-\lambda T)\varphi=0,\quad 0\neq\varphi\in l^2.$$

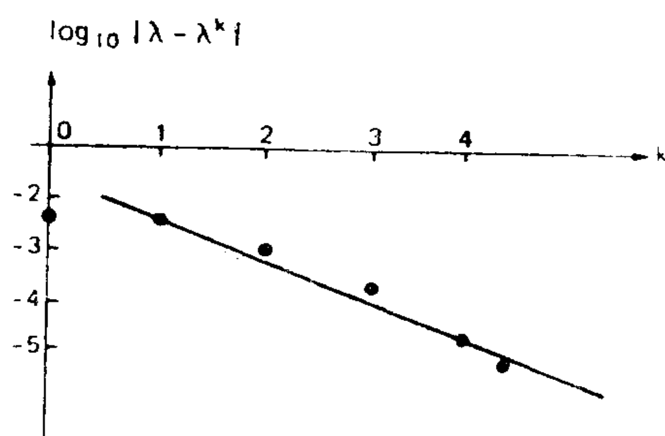
算子 T 依赖于参数 s 与 l，非负整数 l 为角动量．在 l^2 的典范基 $\{e_i\}_{\mathbb{N}}$ 下，T 表示无穷矩阵 A．A 的系数不计常数因子外等于

$$a_{ij}(s,l)=\frac{(-1)^{i+j}}{[(i+l)(j+l)]^{1/2}}\left(\frac{(i-1)!(j-1)!}{(i+2l)!(j+2l)!}\right)^{1/2}$$

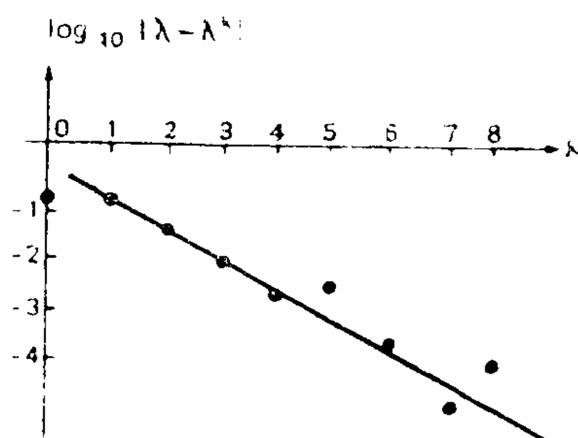
$$\times\sum_{\sigma=1}^{i}\left(\frac{(2l+1-s)_{\sigma-1}}{(\sigma-1)!}\ \frac{(s+1)_{i-\sigma}}{(i-\sigma)!}\ \frac{(s+1)_{j-\sigma}}{(j-\sigma)!}\right)$$

其中 $(a)_n:=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ (Pochhammer符号)，i，$j\in\mathbb{N}$．

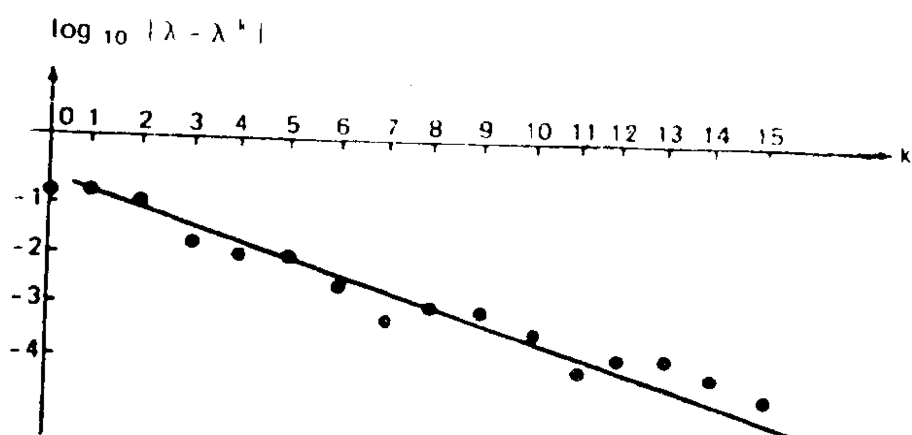
对于 $-2<s<0$，算子 T 是紧的与自伴的，而对于 $s=$



(a)



(b)



(c)

图 7.4

λ^k的收敛性。（a）$n=15$，$s=-0.5$，（b）$n=30$，$s=-0.05$，（c）$n=30$，$s=-0.01$。

-2或$s=0$，T不再是紧的。

我们转述 Kulkarni和Limaye（1982）中给出的一些数值的例．T是用定义于$\{e_i\}_1^n$张成的子空间上的⊥—Galerkin法来逼近。

图 7.4 表示了涉及主本征值迭代加细的结果。在计算中，Tx是用阶数为100 的截断矩阵且 l 取为零而赋值的．对于$s=-0.5$，得到$n=15$的收敛性是好的。而对于$s=-0.05$与$s=-0.01$，得到$n=30$的收敛性是不能令人满意的。当紧算子T太接近于非紧算子时，$n=30$是太小了。

8.5 文献注释

不同的作者提出了改善积分算子的本征元的值：Chu 和 Spence（1981），Linz(1970，1972)，Rakotch(1975，1978)，Spence（1978，1979a）．Atkinson（1973，1976a）曾研究解的迭代加细。

有关本征值问题，提出了许多建立在亏损校正基础上的其它迭代（Ahués和Chatelin，1983；Ahués等，1983a）．对于第二类积分方程的多重网格法，读者可参阅Hackbusch(1981)及Hemker和Schippers（1981）．

9. T是微分算子

对于投影方法，我们借助适用于使积分形式的公式(5.24)，可以定义迭代加细。考虑第四章第8节中所引入的椭圆型偏微分方程（4.41）．设T是与定义在$V\times V$上的有界强制形式$a(\cdot,\cdot)$相应的微分算子。本征值问题

$$T\psi=\lambda\psi,\quad 0\neq\psi\in V,$$

是等价于

$$\psi=\lambda A\psi,\quad A=T^{-1},\quad 当\lambda\neq0.$$

且设$\lambda\neq0$是单的。

设V_n是V的子空间，ψ的有限元逼近定义为

$$a(\psi_n, v)=\lambda_n(\psi_n, v)_H \qquad 对所有 v\in V_n.$$

并设π_n^a是椭圆型投影．假定A是紧的（即从V到H中的单射是紧的）．于是，$\|(\pi_n^a-1)A\|_H\to 0$．令$P_n=(\cdot, \psi_n^*)_H\psi_n$是相应于$1/\lambda_n$的$\pi_n^aA$的谱投影．

序列$\{\mu^k\}$与$\{u^k\}$定义为

$$\mu^0=\lambda_n,\ \mu^{k+1}=1/(Au^k, \psi_n^*)_H, \qquad k\geqslant 0,$$

$$u^0=\psi_n,\quad P_nu^k=\psi_n,\quad \hat{u}^k=\mu^{k+1}Au^k,\ u^{k+1}=\hat{u}^k+r^k,\ k\geqslant 0,$$

其中r^k是

$$(\lambda_n\pi_n^aA-1)r^k=\lambda_n\pi_n^aA(u^k-\hat{u}^k),\ P_nr^k=0.$$

的唯一解，根据习题5.38，至少是按照公比为$\|(1-\pi_n^a)A\|_H$的几何级数收敛于λ、ψ（由$P_n\psi=\varphi_n$而正规化的）．为了得到μ^k与u^k，计算需要什么？

令$v^k:=Au^k$，v^k是

$$Tv^k=u^k$$

或

$$a(v^k, v)=(u^k, v),\quad 对所有 v\in V_n, \tag{7.25}$$

的解。然后计算$(v_n^k, \psi_n^*)_H$与$\hat{u}^k=\mu^{k+1}v^k$．r^k是

$$a(r^k, v)-\lambda_n(r^k, v)_H=\lambda_n(u^k-\hat{u}^k, v)_H \quad 对所有\ v\in V_n,$$

$$P_nr^k=0. \tag{7.26}$$

在V_n中的唯一解．在积分算子T的情形下所要求的赋值Tu^k，此处是代之以求解微分方程（7.25）．可以用具有高次元的有限元方法得到v^k的一个逼近．

类似于公式（5.24），上面的公式要求关于P_n，即关于ψ_n和ψ_n^*的知识．这并不是必要的，而可以在$\{\psi_n\}$上使用H一正交投影（参见下面的习题7.26）．

习题

7.26 对于问题$\psi=\lambda A\psi$，证明以下类似于习题5.38的描述，其中μ^k与u^k是

$$\mu^0=\lambda_n,\quad \mu^{k+1}=1/(Au^k,\ \psi_n)_H,$$

$$u^0=\psi_n,\quad (u^k,\ \psi_n)_H=1,\quad \hat{u}^k=\mu^{k+1}Au^k,\quad u^{k+1}=\hat{u}^k+r^k,$$

具有

$$(\lambda_n\pi_n^a A-1)r^k=\lambda_n\pi_n^a A(u^k-\hat{u}^k),\quad (r^k,\ \psi_n)_H=0$$

的解. μ^k（或u^k）收敛于λ（或按照$(\psi,\ \psi_n)_H=1$而正规化的ψ）。其收敛速率由下式给出

$$|\mu^k-\lambda|+\|u^k-\psi\|_H\leqslant c\,\|(1-\pi_n^a)A\|_H^{k+1},\quad k\geqslant 1.$$

例7.5 考虑在$\mathbb{R}^n$的有界域Ω中的Dirichlet本征值问题

$$\begin{aligned}-\Delta\psi&=\lambda\psi &&\text{在}\Omega\text{内}\\ \psi&=0 &&\text{在}\partial\Omega\text{上}\end{aligned}\tag{7.27}$$

$H=L^2(\Omega)$，$V=H_0^1(\Omega)$，而且$a(u,v)=(\nabla u,\nabla v)_H$。(7.27)的变分形式为$a(\psi,\ v)=\lambda(\psi,\ v)_H$，$\forall v\in V$。

设λ、ψ是一对精确的本征元。λ_n与ψ_n是相应的逐段线性有限元逼近。h是三角剖分直径。众所周知。

$$|\lambda-\lambda_n|+\|\psi-\psi_n\|_H+h\|\psi-\psi_n\|_V=O(h^2),$$

其中ψ、ψ_n是按照$\|\psi_n\|_H=(\psi,\ \psi_n)_H=1$而正规化的。

对于$k\geqslant 0$，迭代加细要求如下：

（1）解 Dirichlet 方程

$$\begin{aligned}-\Delta v^k&=u^k &&\text{在}\Omega\text{内，}\\ v^k&=0 &&\text{在}\partial\Omega\text{上。}\end{aligned}\tag{7.28}$$

（2）计算$\mu^{k+1}=1/(v^k,\ \psi_n)_H$与$u^k=\mu^{k+1}v^k$。

（3）在逐段线性有限元的集合V_n中解方程

$$a(r^k,\ v)-\lambda_n(r^k,\ v)_H=\lambda_n(u^k-\hat{u}^k,v)_H\quad \text{对所有 } v\in V_n,$$

$$(r^k, \psi_n)_H = 0.$$

（4）计算 $u^{k+1} = u^k + r^k$.

留给读者证明

$$|\mu^k - \lambda| + \|\psi - u^k\|_H \leqslant c\,(h^2)^{k+1},\quad k \geqslant 1,$$

(7.28) 的解 v^k 能够用较高阶有限元（例如，逐段二次元）来逼近。Lin Qun 和 Xie Ganquan已用数值试验过，现予转述 (Lin Qun, 1980)。

设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 内的正方形 $(0,1)\times(0,1)$，具有图7.5所示的三角剖分。设 λ 是 (7.27) 的最小本征值 $2\pi^2$：

$$\lambda = 19.739\cdots,\quad \lambda_n = 22.865,\quad \widetilde{\lambda}_n = \frac{(\nabla\widetilde{\psi}_n, \nabla\widetilde{\psi}_n)_H}{(\widetilde{\psi}_n, \widetilde{\psi}_n)_H} = 19.817.$$

其中 $\widetilde{\psi}_n$ 是

$$-\Delta\widetilde{\psi}_n = \lambda_n \psi_n,\quad 在\,\Omega\,内,$$

$$\widetilde{\psi}_n = 0,\quad 在\,\partial\Omega\,上,$$

的解。且 $\widetilde{\lambda}_n$ 是基于 $\widetilde{\psi}_n$ 的Rayleigh商。相对误差分别为0.16与 4×10^{-3}。这是上面提到的格式的一种变形。可以证明

$$|\lambda - \lambda_n| = O(h^4) \quad 及 \quad \|\psi - \widetilde{\psi}_n\|_V = O(h^2).$$

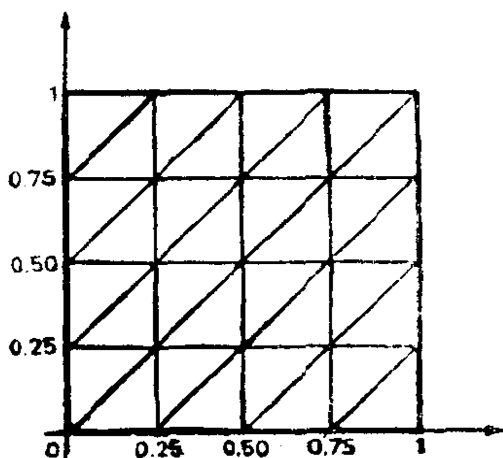


图 7.5 (0, 1)×(0, 1)的三角剖分

文献注释

对于与有限元法相联系的非线性本征值问题的一种迭代加细方法，是由 Lin Qun (1981a) 提出的。Ghemires (1979) 讨论了有限差分法（也可参阅McCormick, 1981; Nakamura, 1976)。用于非线性微分方程的加细技巧，读者可参阅 Brandt (1977), Hackbusch (1980b), Lin Qun (1982a), Muroya 1979) 与Stetter(1978); 也可参阅Oliveira Aleixo(1980)。

附　录
离 散 逼 近 论

在计算算子T的本征值的数值方法中，逼近不总是在X中或X的子空间X_n中定义的，它可以在一个与X不同的空间中定义。微分方程的有限差分法就是一个很好的例子，在那里逼近是在某个$\mathbb{C}^n$中定义的。离散逼近论的这一观点首先得到了发展，因为它对差分方法的研究是最自然的。我们在下面给出Stummel（1970，1972）与Vainikko（1974，1978a）的公理化描述的一个浏览。

1.　Banach空间的离散逼近

X与$\mathscr{X}_n(n\in\mathbb{N})$是Banach空间，分别赋以范数$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_n$.

记号　在下文中，拉丁字母x，y，…表示X的元素，希腊字母ξ，η，…表示$\mathscr{X}_n$的元素。

序列$\{\xi_n\}_\mathbb{N}$与$\{\eta_n\}_\mathbb{N}$是等价的，当且仅当

$$\|\xi_n-\eta_n\|_n\to 0,\quad 当\ n\to\infty.$$

等价关系记作$\{\xi_n\}\sim\{\eta_n\}$。

令$\mathscr{X}:=\Pi_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{X}_n$。$\sim$是空间$\mathscr{X}$上的一个等价关系，并把等价的有界序列的商空间记作$\mathscr{Y}$。

定义　空间序列$\{\mathscr{X}_n\}_\mathbb{N}$离散地逼近空间$X$，当且仅当存在线性映射$\mathscr{P}$：$X\to\mathscr{Y}$使得若

$$x\in X\quad 及\quad \{\xi_n\}_\mathbb{N}\in\mathscr{P}x$$

则当$n\to\infty$时，$\|\xi_n\|_n\to\|x\|$。

设$\mathscr{Y}$赋以商范数$\|\cdot\|_\mathscr{Y}$，定义为

$$\|\zeta\|_\mathscr{Y}=\inf_{\|\xi_n\|\in\zeta}\sup_{x\in\mathbb{N}}\|\xi_n\|_n,\qquad \zeta\in\mathscr{Y}.$$

因为对所有 $x \in X$，$\|x\| = \|\mathscr{D}x\|_{\mathscr{Y}}$，所以，如上定义的映射 $\mathscr{D}$ 是 X 到 $\mathscr{Y}$ 中的等距映射。

在每一个等价类 $\mathscr{D}x$ 中选出一个序列 $\{r_n(x)\}_N$，我们得到以下等价的定义：$\{\mathscr{X}_n\}_N$ 离散地逼近 X，当且仅当存在（可能地）非线性映射 $r_n: X \to \mathscr{X}_n$，$n \in \mathbb{N}$，使得

（i）对于任意一个 $x \in X$，当 $n \to \infty$ 时，$\|r_n(x)\|_n \to \|x\|$，

（ii）对于任意的 $x, y \in X$ 及 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，

$$\|r_n(\alpha x + \beta y) - \alpha r_n(x) - \beta r_n(y)\|_n \to 0.$$

r_n 称为限制算子。由映射 $\mathscr{D}$ 定义的算子 r_n 不是唯一的。若 $\{r_n\}$ 与 $\{r_n'\}$ 是对应于 $\mathscr{D}$ 的两组限制算子，则对任一 $x \in X$，当 $n \to \infty$ 时 $\|r_n(x) - r_n'(x)\|_n \to 0$。$r_n$ 不必线性，仅仅渐近于线性，即满足（ii）。

若 $r_n \in \mathscr{L}(X, \mathscr{X}_n)$，则 r_n 是一致有界的。但是，即使存在一个线性的 r_n，正如我们将在例A.2中所看到的，未必是最易于利用的一个。

例A.1 设 Ω 是 $\mathbb{R}^k$ 中的有界域，$X = C(\Omega)$。并设 Ω_n 是在 Ω 内的网格点 $\{t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \cdots, t_{N(n)}^{(n)}\}$ 的集合，使得任意 $t \in \Omega$ 到 Ω_n 的距离趋向于 0（当 $n \to \infty$）。我们定义 $\mathscr{X}_n = \mathbb{C}^{N(n)}$，赋以最大范数 $\|\cdot\|_n$，而且

$$r_n: x \in X \mapsto r_n x = (x(t_1^{(n)}), \cdots, x(t_{N(n)}^{(n)}))^T.$$

r_n 是在 X 上线性以及对于所有连续的 x，$\|r_n x\|_n \to \|x\|$。

例A.2 在实践中，常常存在着与离散化方法内在联系的十分"自然的"限制，它在稠密于 X 的子空间 X' 上线性，并且使得对于任一 $x \in X'$，成立 $\|r_n(x)\|_n \to \|x\|$。相应的映射 $\mathscr{D}$，它是 X' 到 $\mathscr{Y}$ 中的等距映射，而且能够唯一地延拓到 X 到 $\mathscr{Y}$ 中的

等距映射。然而，延拓的限制r_n通常仅是在X上渐近线性的。

我们以$X=L^2(\Omega)$给出一个例子。正如我们在例A.1所见到的，自然限制r_n作为象近似求积或有限差分那样的离散化方法来考虑，它是一个算子，把连续函数映到这个连续函数在网格点取值的向量。但是，r_n作为$L^2(\Omega)$中的算子不是有界的。

我们考虑$\mathscr{X}_n=\mathbb{C}^{N(n)}$，具有由下式定义的范数$\|\cdot\|_n$

$$\|\xi_n\|_n:=\left(\sum_{i=1}^{N(n)} w_{in}|\xi_{in}|^2\right)^{1/2},$$

它对于所有的连续函数x，与收敛于$\int_\Omega x(t)dt$的求积公式$\Sigma_{i=1}^{N(n)} W_{in}x(t_i^{(n)})$相联系。所以，对于$x\in C(\Omega)$，$\|r_n(x)\|_n\to\|x\|$，因而子空间$X'$是$C(\Omega)$。

正如已经指出的，对于$x\notin X'$，$r_n(x)$的值可以通过$\mathscr{D}$来定义，而对于$\mathscr{D}$也对应一个限制r_n'，r_n'在X上是线性的。设$\{\sigma_i^{(n)}\}_1^{N(n)}$是$\Omega$的基本子集，$t_i^{(n)}\in\sigma_i^{(n)}$。于是，

$$r_n':x\mapsto(r_n'x)_i=\frac{1}{\text{meas }\sigma_i^{(n)}}\int_{\sigma_i^{(n)}}x(t)dt,\quad i=1,\cdots,N(n).$$

可以证明：对$x\in L^2(\Omega)$，$\|r_n'x\|_n\to\|x\|$，以及对$x\in X'$，$\|r_n(x)-r_n'x\|_n\to 0$。所以，r_n及r_n'都相应于X'中相同的$\mathscr{D}$。而且

$$r_n'\in\mathscr{L}(X,\mathscr{X}_n).$$

对于$x\notin X'$，我们可以令$r_n(x):=r_n'x$。

例A.3 在Aubin (1972, P.5)中，一个略为不同的观点是不仅给出线性限制算子$r_n\in\mathscr{L}(X,\mathscr{X}_n)$的应用，而且也给出线性拓展算子$p_n\in\mathscr{L}(\mathscr{X}_n,X)$。$p_n$是从$\mathscr{X}_n$到$X$的闭子空间$X_n$的同构映射。$p_n$与$r_n$由性质

$$p_n r_n x \to x, \quad x \in X.$$

相联结.

作为一个例子，我们选取$X = C(a, b)$（参阅第三章例3.1）。把$[a, b]$分为$n-1$个区间，分点为$t_i^{(n)}$，$i=1, \cdots, n$，$t_1^{(n)} = a$，$t_n^{(n)} = b$。$\mathscr{X}_n = \mathbb{C}^n$赋以最大范数，定义

$$r_n: x \mapsto (x(t_1^{(n)}), x(t_2^{(n)}), \cdots, x(t_n^{(n)}))^T,$$

$$p_n: (x(t_i^{(n)})) \mapsto \text{在}(t_i, x(t_i^{(n)}))_1^n\text{处的逐段线性插值.}$$

若设$\max_{i=1,\ldots,n-1}|t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}| \to 0$，则对$X$中的所有$x$，$p_n r_n x \to x$。$p_n$是从$\mathbb{C}^n$到逐段线性连续函数的子空间$X_n$的同构映射。

例A.4 在例A.3中有性质$r_n p_n = 1_n$，其中1_n是$\mathscr{X}_n$上的恒同算子。因而$\pi_n = p_n r_n$是从X到$X_n = p_n \mathscr{X}_n$上的投影，使得在X中$\pi_n \to 1$逐点地成立。当空间$\mathscr{X}_n$是有限维时，子空间X_n也是有限维的，这就对应于第三章中所给出的离散逼近论的特殊框架。

2. 闭算子的离散逼近

序列$\{\xi_n\}_{\mathbb{N}}$（$\xi_n \in \mathscr{X}_n$）离散收敛（简短写为d—收敛）于$x \in X$，当且仅当$n \to \infty$时，$\|r_n x - \xi_n\|_n \to 0$，记作$\xi_n \xrightarrow{d} x$。序列$\{\xi_n\}_{\mathbb{N}}(\xi_n \in \mathscr{X}_n)$是离散相对紧的（简短写为$d$—相对紧）、当且仅当每个子序列$\{\xi_n\}_{N_1 \subset \mathbb{N}}$有一个$d$—收敛子序列$\{\xi_n\}_{N_2 \subset N_1}$。

设T是X中的闭线性算子，其定义域$D \subseteq X$。为了简单起见，我们假定离散逼近X的子空间$\mathscr{X}_n (n \in \mathbb{N})$是有限维的。这几乎是实用中经常出现的情形。$\mathscr{T}_n$是从$\mathscr{X}_n$到其自身的线性算子，其定义域$\mathscr{D}_n \subseteq \mathscr{X}_n$。我们假定，对所有$n$，$r_n D \subseteq \mathscr{D}_n$。

若T（或$\mathscr{T}_n$）在X（或$\mathscr{X}_n$）上有界，则$D=X$（或$\mathscr{D}_n=X_n$）.

现在，我们定义$\{\mathscr{T}_n\}_{\mathbb{N}}$趋向于$T$的各种类型的收敛性，它们是：

离散逐点收敛$\mathscr{T}_n \xrightarrow{d-p} T$，当且仅当对$D$中所有的$x$，

$$\|r_n Tx-\mathscr{T}_n r_n x\|_n \to 0,\ 当\ n\to\infty.$$

离散稳定收敛$\mathscr{T}_n \xrightarrow{d-s} T$，当且仅当

（i）$\mathscr{T}_n \xrightarrow{d-p} T$，

（ii）$\exists N$：对$n>N$，$\mathscr{T}_n^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X}_n)$且$\|\mathscr{T}_n^{-1}\|\leqslant M$.

对于T是紧的，离散紧收敛$\mathscr{T}_n \xrightarrow{d-c} T$，当且仅当

（i）$\mathscr{T}_n \xrightarrow{d-p} T$，

（ii）对任意一个满足$\xi_n\in\mathscr{X}_n$且$|\xi_n|_n\leqslant C$的序列$\{\xi_n\}_{\mathbb{N}}$，序列$\{\mathscr{T}_n\xi_n\}_{\mathbb{N}}$是$d$-相对紧的.

离散正则收敛$\mathscr{T}_n \xrightarrow{d-r} T$，当且仅当

（i）$\mathscr{T}_n \xrightarrow{d-p} T$，

（ii）任意一个序列$\{\xi_n\}_{\mathbb{N}}$，其中$\xi_n\in\mathscr{D}_n$，$\|\xi_n\|_n\leqslant c$，且该序列使得对于$n\in N_1\subset\mathbb{N}$，$\mathscr{T}_n\xi_n\xrightarrow{d} y$，则这个序列自身，使得对于$n\in N_2\subset N_1$，$\xi_n\xrightarrow{d} x\in D$，且$Tx=y$.

在第三章中引入关于类$\mathfrak{D}$的逼近T_n的各种类型收敛性，显然是上面定义的特殊情形. 命题3.20与定理5.29所给出的两个基本特性，能够在本附录的更一般框架下，容易地得到证明.

有兴趣的读者，可以从第三章第6节与第五章第5.7节的文献注释中找到更多关于离散逼近论内容的研究. 其它最新的参考资料为Anselone和 Ansorge（1981）.

参考文献

Adams, R. A. (1975). *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York.

Ahlberg, J.H., and Ito, T. (1975). A collocation method for two-point boundary value problems. *Math. Comp.* 29, 761-776.

Ahués, M. (1982). Raffinement des éléments propres d'un opérateur compact sur un espace de Banach par des méthodes de type Newton à jacobien approché. Unpublished manuscript, Univ. de Grenoble.

Ahués, M., and Chatelin, F. (1983). The use of defect correction to refine the eigenelements of compact integral operators. *SIAM J. Numer. Anal.* (to appear).

Ahués, M., and Telias, M. (1982a). Petrov-Galerkin schemes for the steady state convection-diffusion equation. In *Finite Elements in Water Resources* (K. P. Holz, U. Meissner, W. Zulke, C. A. Brebbia, G. Pinder and W. Gray, eds.), pp. 2-3, 2-12. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Ahués, M., and Telias, M. (1982b). Quasi-Newton iterative refinement techniques for the eigenvalue problem of compact linear operators. R.R. IMAG No. 325. Univ. de Grenoble.

Ahués, M., d'Almeida, F., and Telias, M. (1982). On the defect correction method with applications to iterative refinement techniques. R.R. IMAG No. 324, Univ. de Grenoble.

Ahués, M., Chatelin, F., d'Almeida, F., and Telias, M. (1983a). Iterative refinement techniques for the eigenvalue problem of compact integral operators. In *Treatment of Integral Equations by Numerical Methods* (C. T. H. Baker and G. F. Miller, eds.), pp. 373-386. Academic Press, London.

Ahués, M., d'Almeida, F., and Telias, M. (1983b). Two defect correction methods for the eigenvalue problem of compact operators in Banach spaces. *J. Integral Equations* (submitted).

Ahués, M., d'Almeida, F., and Telias, M. (1983c). Iterative refinement for aproximate eigenelements of compact operators. *RAIRO Anal. Numér.* (to appear).

Albrecht, J., and Collatz, L., eds. (1980). *Numerical Treatment of Integral Equations.* Birkhaeuser, Basel.

Anderssen, R. S., and Prenter, P. M. (1981). A formal comparison of methods proposed for the numerical solution of first kind integral equations. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **22**, 491-503.

Anderssen, R. S., de Hoog, F. R., and Lukas, M. A., eds. (1980). *The Application and Numerical Solution of Integral Equations.* Sijthoff & Noordhoff, Alphen an den Rijn, The Netherlands.

Andrew, A. L. (1973). Eigenvectors of certain matrices. *Linear Algebra Appl.* **7**, 151-162.

Andrew, A. L. (1979). Iterative computation of derivatives of eigenvalues and eigenvectors. *J. Inst. Math. Appl.* **24**, 209-218.

Andrew, A. L., and Elton, G. C. (1971). Computation of eigenvectors corresponding to multiple eigenvalues. *Bull. Austral. Math. Soc.* **4**, 419-422.

Andrushkin, R. I. (1975). On the approximate solution of K-positive eigenvalue problems $Tu - \lambda Su = 0$ *J. Math. Anal. Appl.* **50**, 511-529.

Anselone, P. M. (1971). *Collectively Compact Operator Approximation Theory.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Anselone, P. M. (1976). Nonlinear operator approximation. In *Moderne Methoden der numerischen Mathematik,* (J. Albrecht and L. Collatz, eds.), pp. 17-24. Birkhaüser, Basel.

Anselone, P. M., and Ansorge, R. (1979). Compactness principle in nonlinear operator approximation theory. *Numer. Funct. Anal. Optim.* **1**, 589-618.

Anselone, P. M., and Ansorge, R. (1981). A unified framework for the discretization of nonlinear operator equations. Tech. Rep. 81/5, Angew. Math., Univ. Hamburg.

Anselone, P. M., and Gonzalez-Fernandez, M. J. (1965). Uniformly convergent approximate solutions of Fredholm integral equations. *J. Math. Anal. Appl.* **10**, 519-536.

Anselone, P. M., and Krabs, W. (1979). Approximate solution of weakly singular integral equations. *J. Integral Equations* **1**, 61-75.

Anselone, P. M., and Lee, J. W. (1974). Spectral properties of integral operators with non-negative kernels. *Linear Algebra Appl.* **9**, 67-87.

Anselone, P. M., and Lee, J. W. (1976). Double approximation methods for the solution of Fredholm integral equations. In *Numerische Methoden der Approximations Theorie,* (L. Collatz, H. Werner, and G. Meinardus, eds.), pp. 9-34. Birkhaeuser, Basel.

Arnold, D. N., and Wendland, W. L. (1982). On the asymptotic conver-

gence of collocation methods. Prepr. 665, Math., Techn. Hochschule Darmstadt.

Arnoldi, W. E. (1951). The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quart. Appl. math.* **9**, 17-29.

Astrakhantsev, G. P. (1971). An iterative method for solving elliptic net problems. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **11**, 439-448 [*U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys.* **11**, 439-448 171-182].

Astrakhantsev, G. P. (1976). The iterative improvement of eigenvalues. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **16**, 131-139 [*U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys.* **16**, 123-132].

Atkinson, K. E. (1967a). The numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind. *SIAM J. Numer. Anal.* **4**, 337-348.

Atkinson, K. E. (1967b). The numerical solution of the eigenvalue problem for compact integral operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* **129**, 458-465.

Atkinson, K. E. (1972). The numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind with singular kernels. *Numer. Math.* **19**, 248-259.

Atkinson, K. E. (1973). Iterative variants of the Nyström method for the numerical solution of integral equations. *Numer. Math.* **22**, 17-31.

Atkinson, K. E. (1975). Convergence rates for approximate eigenvalues of compact integral equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **12**, 213-222.

Atkinson, K. E. (1976a). *A Survey of Numerical Methods for the Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind.* SIAM, Philadelphia, Pennsylvania.

Atkinson, K. E. (1976b). An automatic program for linear Fredholm integral equations of the second kind. *ACM Trans. Math. Software* **2**, 154-171.

Atkinson, K. E., Graham, I. G., and Sloan, I. H. (1982). Piecewise continuous collocation for integral equations. Tech. Rep., Math., Univ. of New South Wales, Kensington.

Aubin, J. P. (1972). *Approximation of Elliptic Boundary Value Problems.* Wiley (Interscience), New York.

Aziz, A. K., ed. (1972). *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations.* Academic Press, New York.

Babuška, I. (1971). Error bounds for finite element method. *Numer. Math.* 16, 322-333.

Babuška, I. (1973). The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numer. Math.* **20**, 179-192.

Babuška, I., and Aziz, A. K. (1972). Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method. In *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations* (A. K. Aziz, ed.), pp. 5-359. Academic Press, New York.

Babuška, I., and Osborn, J. E. (1978). Numerical treatment of eigenvalue problems for differential equations with discontinuous coefficients. *Math. Comp.* **32**, 991-1023.

Babuška, I., and Rheinboldt, W. (1978). Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.* **15**, 736-754.

Baker, C. T. H. (1971). The deferred approach to the limit for eigenvalues of integral equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **8**, 1-10.

Baker, C. T. H. (1977). *The Numerical Treatment of Integral Equations.* Oxford Univ. Press (Clarendon), London and New York.

Baker, C. T. H., and Hodgson, G. S. (1971). Asymptotic expansions for integration formulae in one and more dimensions. *SIAM J. Numer. Anal.* **8**, 473-480.

Banach, S., and Steinhaus, H. (1927). Sur le principe de la condensation des singularités. *Fund. Math.* **9**, 51-57.

Bank, R. E. (1980). Analysis of a multilevel inverse iteration procedure for eigenvalue problems. Res. Rep. No. 199, Computer Science, Yale Univ., Connecticut.

Bank, R. E., and Rose, D. J. (1981). Analysis of a multilevel iterative method for nonlinear finite element equations. Res. Rep. No. 202, Computer Science, Yale Univ., Connecticut.

Bartels. R.H., and Stewart, G.W. (1972). Algorithm 432, solution of the matrix equation $AX+XB=C$. *Comm. ACM* **15**, 820-826.

Bathé, K.-J., and Wilson, E. L. (1972). Large eigenvalue problems in dynamic analysis. *ASCE J. Engrg. Mech. Div.* **98**, 1471-1485.

Bathé, K.-J., and Wilson, E. L. (1973a). Eigensolution of large structure systems with small band width. *ASCE J. Engrg. Mech. Div* **99**, 467-480.

Bathé, K.-J., and Wilson, E. L. (1973b). Solution methods for eigenvalue problems in structural mechanics. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **6**, 213-226.

Bathé, K.-J., and Wilson, E. L. (1976). *Numerical Methods in Finite Element Analysis.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Bathe, K.-J. and Ramaswamy, S. (1980). An accelerated subspace iteration method. *Comput. Methods Appl. Mech., Engrg.* **23**, 313-331.

Bauer, F. L. (1957). Das Verfahren der Treppeniteration und verwandte

Verfahren zur Lösung algebraisher Eigenwertprobleme. *Z. Angew. Math. Phys.* **8**, 214-235.

Bauer, F. L. (1958). On modern matrix iteration processes of Bernouilli and Graeffe type. *J. Assoc. Comput. Mach.* **5**, 246-257.

Bauer, F. L., and Fike, C. T. (1960). Norms and exclusion theorems. *Numer. Math.* **2**, 137-141.

Bavely, A. C., and Stewart, G. W. (1979). An algorithm for computing reducing subspaces by block diagonalization. *SIAM J. Numer. Anal.* **16**, 359-367.

Begis, D., and Perronnet, A. (1982). The Club MODULEF, a library of computer procedures for finite element analysis. Rep. INRIA-MODULEF 73, INRIA, Le Chesnay.

Berger, D., Gruber, R., and Troyon, F. (1976). A finite element approach to the computation of the magnetohydrodynamic spectrum of straight noncircular plasma equilibria. *Comput. Phys. Commun.* **11**, 313-323.

Berger, W. A., Miller, H. G., Kreuzer, K. G., and Dreizler, R. M. (1977). An iterative method for calculating low lying eigenvalues of an Hermitian operator. *J. Phys. A.* **10**, 1089-1095.

Berger, W. A., Kreuzer, K. G., and Miller, H. G. (1980). An algorithm for obtaining an optimalized projected Hamiltonian and its ground state. *Z. Physik. A* **298**, 11-12.

Birkhoff, G., and Gulati, S. (1974). Optimal few-point discretization. *SIAM J. Numer. Anal.* **11**, 700-728.

Birkhoff, G., de Boor, C., Swartz, B., and Wendroff, B. (1966). Rayleigh-Ritz approximation by piecewise polynomials. *SIAM J. Numer. Anal.* **3**, 188-203.

Björck, Å (1967a). Solving linear least squares problems by Gram-Schmidt orthogonalization. *BIT* **7**, 1-21.

Björck, Å. (1967b). Iterative refinement of linear least squares solution: I. *BIT* 7, 251-278.

Björck, Å (1968) Iterative refinement of linear least squares solution: II. *BIT* 8, 8-30.

Björck, Å., and Golub, G. H. (1973). Numerical methods for computing angles between linear subspaces. *Math. Comp.* **27**, 579-594.

Björck, Å., and Plemmons, R.J. (1980). *Large Scale Matrix Problems.* American Elsevier, New York.

Bland, S. (1970). The two-dimensional oscillating airfoil in a wind tunnel in subsonic flow. *SIAM J. Appl. Math.* **18**, 830-848.

Blum, E. K., and Geltner, P. B. (1978). Numerical solution of eigentuple-

eigenvector **problems in Hilbert space by a gradient** method. *Numer. Math.* 31, 231-246.

Bowdler, H., Martin, R.S., Reinsch, C., and Wilkinson, J. H. (1968). The QR and QL algorithms for symmetric matrices. *Numer. Math.* **11**, 293-306.

Brakhage, H. (1960). Über die numerische Behandlung von Integralgleichungen nach der Quadraturformelmethode. *Numer. Math.* **2**, 183-196.

Brakhage, H. (1961). Zur Fehlerabschätzung für die numerische Eigenwertbestimmung bei Integralgleichungen. *Numer. Math.* **3**, 174-179.

Bramble, J. H., and Osborn, J. E. (1973). Rate of convergence estimates for nonselfadjoint eigenvalue approximations. *Math. Comp.* **27**, 525-549.

Bramble, J. H., and Schatz, A. H. (1970). Rayleigh-Ritz-Galerkin methods for Dirichlet's problem using subspaces without boundary conditions. *Comm. Pure Appl. Math.* **23**, 653-675.

Brandt, A. (1977). Multilevel adaptive solutions to boundary value problems. *Math. Comp.* **31**, 333-390.

Brezinski, C. (1975). Computation of the eigenelements of a matrix by the ε-algorithm. *Linear Algebra Appl.* **11**, 7-20.

Brezzi, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. *RAIRO Anal. Numér.* 2, 129-151.

Brezzi, F. (1975). Sur la méthode des éléments finis hybrides pour le probléme biharmonique. *Numer. Math.* **24**, 103-131.

Browder, F. E. (1967). Approximation-solvability of nonlinear functional equations in normed linear spaces. *Arch. Rational Mech. Anal.* **26**, 33-42.

Browder, F. E., and Petryshyn, W. V. (1968). The topological degree and Galerkin approximations for noncompact operators in Banach spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **74**, 641-646.

Bruhn, G., and Wendland, W. L. (1967). Über die näherungweise Lösung von linearen Funktionalgleichungen. In *Funktionalanalysis Approximationstheorie Numerische Mathematik* (L. Collatz, G. Meinardus, and H. Unger, eds.), pp. 136-164. Birkhaeuser, Basel.

Brunner, H. (1981). The application of the variation of constants formulas in the numerical analysis of integral and integro-differential equations. *Utilitas Mathematica.* **19**, 255-290.

Buckner, H. (1952). Die Praktische Behandlung BITshr cmf shrmmb Springer-Verlag, Berlin and New York.

Bulirsch, R., and Stoer, J. (1966). Asymptotic upper and lower bounds for results of extrapolation methods. *Numer. Math.* **8**, 93-101.

Bunch, J. R., and Nielsen, C. P. (1978). Rank-one modification of the symmetric eigenproblem. *Numer. Math.* **31**, 31-48.

Butscher, W., and Kammer, W. E. (1976). Modification of Davidson's method for the calculation of eigenvalues and eigenvectors of large real symmetric matrices: "Root-homing procedure." *J. Comput. Phys.* **20**, 313-325.

Buurema, H. J. (1970). A geometric proof of convergence for the QR method. Ph. D. Thesis, Univ. of Groningen.

Cachard, F. (1981). Etude numérique de réseaux de file d'attente. Thèse Doct.-Ing., Univ. de Grenoble.

Canosa, J., and Gomes de Oliveira, R. (1970). A new method for the solution of the Schrödinger equation. *J. Comput. Phys.* **5**, 188-207

Canuto C. (1978). Eigenvalue approximations by mixed-methods. *RAIRO Anal. Numér.* **12**, 27-50.

Chan, S. P., Feldman, H., and Parlett, B. N. (1977). A program for computing the condition numbers of matrix eigenvalues without computing eigenvectors. *ACM Trans. Math. Software* **3**, 186-203.

Chan, T. F., and Keller, H. B. (1982). Arc-length continuation and multigrid techniques for nonlinear elliptic eigenvalue problems. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* **3**, 173-194.

Chandler, G. A. (1979). Superconvergence of numerical solutions of second kind integral equations. Ph. D. Thesis, Australia Natl. Univ., Canberra.

Chang, P. W., and Finlaysson, B. A. (1978). Orthogonal collocation on finite elements for elliptic equations. *Math. Comput. Simulation* 20, 83-92.

Chatelin,* F. (1970a). Méthodes d'approximation des valeurs propres d'opérateurs linéaires dans un espace de Banach. I. Critère de stabilité. *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci. Ser. A* **271**, 949-952.

Chatelin,* F. (1970b). II. Bornes d'erreur. *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci. Ser. A* **271**, 1006-1009.

Chatelin,* F. (1971a). Etude de la stabilité de méthodes d'approximation des éléments propres d'opérateurs linéaires. *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci. Ser. A* **272**, 673-675.

Chatelin, F. (1971b). Perturbation d'une matrice hermitienne ou normale. *Numer. Math.* **17**, 318-337.

Chatelin,* F. (1972a). Etude de la continuité du spectre d'un opérateur linéaire. *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci. Ser. A* **274**, 328-331.

Chatelin,* F. (1972b). Error bounds in QR and Jacobi algorithms applied to hermitian or normal matrices. In *Information Processing 71*, Vol. 2, pp. 1254-1257. North-Holland Publ., Amsterdam.

Chatelin, F. (1973). Convergence of approximate methods to compute eigenelements of linear operators. *SIAM J. Numer. Anal.* **10**, 959-948.

Chatelin,* F. (1975). La méthode de Galerkin. Ordre de convergence des éléments propres. *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci. Ser. A* **278**, 1213-1215.

Chatelin, F. (1978). Numerical computation of the eigenelements of linear integral operators by iterations. *SIAM J. Numer. Anal.* **15**, 1112-1124.

Chatelin, F. (1979). Sur les bornes d'erreur a posteriori pour les éléments propres d'opérateurs linéaires. *Numer. Math.* **32**, 233-246.

Chatelin, F. (1981). The spectral approximation of linear operators with applications to the computation of eigenelements of differential and integral operators. *SIAM Rev.* **23**, 459-522.

Chatelin, F. (1983). A posteriori bounds for the eigenvalues of matrices. *Computing* (to appear).

Chatelin, F., and Lebbar, R. (1981). The iterated projection solution for the Fredholm integral equation of second kind. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **22**, 443-455 (Special issue on integral equations).

Chatelin, F., and Lebbar, R. (1983). Superconvergence results for the iterated projection method applied to a second kind Fredholm integral equation and eigenvalue problem. *J. Integral Equations* (to appear).

Chatelin, F., and Lemordant, J. (1975). La méthode de Rayleigh-Ritz appliquée à des opérateurs différentiels elliptiques — ordres de convergence des éléments propres. *Numer. Math.* **23**, 215-222.

Chatelin, F., and Lemordant, J. (1978). Error bounds in the approximation of eigenvalues of differential and integral operators. *J. Math. Anal. Appl.* **62**, 257-271.

Chatelin, F., and Miranker, W. L. (1982). Acceleration by aggregation of successive approximation methods. *Linear Algebra Appl.* **43**, 17-47.

Chatelin, F., and Miranker, W. L. (1983). Aggregation/disaggregation for eigenvalue problems. *SIAM J. Numer. Anal.* (submitted).

Chen, N.-F. (1975). The Rayleigh quotient iteration for non-normal matrices. Ph. D. Thesis. Univ. of California, Berkeley.

Cheney, W. (1966). *Introduction to Approximation Theory.* McGraw-Hill, New York.

* Original publication under Chatelin-Laborde.

Cheung, L. M., and Bishop, D. M. (1977). The group-coordinate relaxation method for solving the generalized eigenvalue problem for large real symmetric matrices. *Comput. Phys. Commun.* **12**, 247-250.

Christiansen, S., and Hansen, E. B. (1978). Numerical solution of boundary value problems through integral equations. *Z. Angew. Math. Mech.* **58**, T14-T25.

Christiansen, J., and Russel, R. D. (1978). Error analysis for spline collocation methods with application to knot selection. *Math. Comp.* **32**, 415-419.

Chu, K. W., and Spence, A. (1981). Deferred correction for the integral equation eigenvalue problem. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **22**, 478-490.

Ciarlet, P. G. (1978). *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* North-Holland Publ., Amsterdam.

Ciarlet, P. G. (1982). *Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation.* Masson, Paris.

Ciarlet, P. G., and Raviart, P. A. (1972). General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods. *Arch. Rational. Mech. Anal.* **46**, 177-199.

Ciarlet, P. G., Schultz, M. H., and Varga, R. S. (1968). Numerical methods of high order accuracy for non-linear boundary value problems. III. Eigenvalue problems. *Numer. Math.* **12**, 120-133.

Cline, A. K., Golub, G. H., and Platzman, G. W. (1976). Calculation of normal modes of oceans using a Lanczos method. In *Sparse Matrix Computations* (J. R. Bunch and D. J. Rose, eds.), pp. 409-426. Academic Press, New York.

Cline, A. K., Moler, C. B., Stewart, G. W., and Wilkinson, J. H. (1979). An estimate for the condition number of a matrix. *SIAM J. Numer. Anal.* **16**, 368-375.

Clint, M., and Jennings, A. (1970). The evaluation of eigenvalues and eigenvectors of real symmetric matrices by simultaneous iterations. *Comput. J.* **13**, 76-80.

Clint, M., and Jennings, A. (1971). A simultaneous iteration method for the unsymmetric eigenvalue problem. *J. Inst. Math. Appl.* **8**, 111-121.

Cochran, J. A. (1972). *The Analysis of Linear Integral Equations.* McGraw-Hill, New York.

Coddington, E. A., and Levinson, N. (1955). *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw-Hill, New York.

Collatz, L. (1937). Konvergenzbeweis und Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren bei Eigenwertproblemen gewöhnlicher Differen-

tialgleichungen zweiter und vierte Ordnung. *Deutsche Math.* **2**, 189-215.

Collatz, L. (1966a). *The Numerical Treatment of Differential Equations*, 3rd ed. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Collatz, L. (1966b). *Functional Analysis and Numerical Mathematics.* Academic Press, New York.

Coope, J. A. R., and Sabo, D. W. (1977). A new approach to the determination of several eigenvectors of a large Hermitian matrix. *J. Comput. Phys.* **23**, 404-424.

Corr, R. B., and Jennings, A. (1973). Implementation of simultaneous iteration for vibration analysis. *Comput. & Structures* **3**, 497-507.

Corr, R. B., and Jennings, A. (1976). A simultaneous iteration algorithm for symmetric eigenvalue problems. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **10**, 647-663.

Courant, R., and Hilbert, D. (1953). *Methods of Mathematical Physics*, Vols. 1 and 2. Wiley (Interscience), New York.

Crandall, S. H. (1951). Iterative procedures related to relaxation methods for eigenvalue problems. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **207**, 416-423.

Cruickshank, D. M., and Wright. K. (1978). Computable error bounds for polynomial collocation methods. *SIAM J. Numer. Anal.* **15**, 134-151.

Cubillos, P. O. (1980). On the numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind. Ph. D. Thesis, Univ. of Iowa.

Cullum, J. (1978). The simultaneous computation of a few of the algebraically largest and smallest eigenvalues of a large, symmetric, sparse matrix. *BIT* **18**, 265-275.

Cullum, J., and Donath, W. E. (1974). A block Lanczos algorithm for computing the q algebraically largest eigenvalues and a corresponding eigenspace for large, sparse symmetric matrices. *Proc. IEEE Conf. Decision Contr., Phoenix, Ariz.*, 505-509.

Cullum, J., and Willoughby, R. (1977). The equivalence of the Lanczos and the conjugate gradient algorithms. Tech. Rep. RC 6903, IBM Research Center, Yorktown Heights.

Cullum, J., and Willoughby, R. (1978). The Lanczos tridiagonalization and the conjugate gradient with local ε-orthogonality of the Lanczos vectors. Tech. Rep. RC 7152, IBM Research Center, Yorktown Heights.

Cullum, J., and Willoughby, R. A. (1979a). Fast modal analysis of large, sparse but unstructured symmetric matrices. *Proc. IEEE Conf. Decision Contr., San Diego, Calif.*, 45-53.

Cullum, J., and Willoughby, R. A. (1979b). Lanczos and the computation

in specified intervals of the spectrum of large, sparse real symmetric matrices. In *Sparse Matrix Proceedings 1978* (I. S. Duff and G. W. Stewart, eds.), pp. 220-225. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania.

Cullum, J., and Willoughby, R. A. (1980a). The Lanczos phenomenon — an interpretation based upon conjugate gradient optimization. *Linear Algebra Appl.* **29**, 63-90.

Cullum, J., and Willoughby, R. A. (1980b). Computing eigenvectors (and eigenvalues) of large, symmetric matrices using Lanczos tridiagonalization. *Proc. Numerical Analysis Conf.* (G. A. Watson, ed.), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 773, pp. 46-63. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Dahlquist, G., and Björck, Å. (1974). *Numerical Methods.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Dahmen, W. (1980). On multivariate B-splines. *SIAM J. Numer. Anal.* **17**, 179-191.

d'Almeida, F. (1980). Etude numérique de la stabilité dynamique des modèles macroéconomiques — Logiciel pour MODULECO. Thèse 3ème Cycle, Univ. de Grenoble.

Daniel, J. W., Gragg, W. B., Kaufman, L., and Stewart, G.W. (1976). Reorthogonalization and stable algorithms for updating the Gram-Schmidt QR factorization. *Math. Comp.* **30**, 772-795.

Davidson, E. R. (1975). The iterative calculation of a few of the lowest eigenvalues and corresponding eigenvectors of large real symmetric matrices. *J. Comput. Phys.* **17**, 87-94.

Davis, C. (1963). The rotation of eigenvectors by a perturbation. I. *J. Math. Anal. Appl.* **6**, 159-173.

Davis, C. (1965). The rotation of eigenvectors by a perturbation. II, *J. Math. Anal. Appl.* **11**, 10-27.

Davis, C., and Kahan, W. (1968). The rotation of eigenvectors by a perturbation. III. *SIAM J. Numer. Anal.* **7**, 1-46.

Davis, C., Kahan, W., and Weinberger, H. (1982). Norm preserving dilations and their applications to optimal error bounds. *SIAM J. Numer. Anal.* **19**, 445-469.

Davis, G. J., and Moler, C. B. (1978). Sensitivity of matrix eigenvalues. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **12**- 1367-1373.

Davis, P. J., and Rabinowitz, P. (1974). *Methods of Numerical Integration.* Academic Press, New York.

Day, W. B. (1974). More bounds for eigenvalues. *J. Math. Anal. Appl.* **46**, 523-532.

Dean, P. (1956). The spectral distribution of a Jacobian matrix. *Proc.*

Cambridge Phil. Soc. **52**, 752-755.

Dean, P. (1960). Vibrational spectra of diatomic chains. *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **254**, 507-521.

Dean, P. (1964). Vibrations of glass-like disordered chains. *Proc. Phys. Soc.* **84**, 727-744.

Dean, P. (1966). The constrained quantum mechanical harmonic oscillator. *Proc. Phys. Soc.* 62, 277-286.

Dean, P. (1967). Atomic vibrations in solids. *J. Inst. Math. Appl.* **3**, 98-165.

Dean, P. (1972). The vibrational properties of disordered systems: numerical studies. *Rev. Modern Phys.* **44**, 127-168.

de Boor, C. (1968). On uniform approximation by splines. *J. Approx. Theory* **1**, 219-235.

de Boor, C. (1972). On calculating with *B*-splines. *J. Approx. Theory* 6, 50-62.

de Boor, C. (1976). A bound on the L_∞ -norm of L_2-approximation by splines in terms of a global mesh ratio. *Math. Comp.* **30**, 765-771

de Boor, C., and Rice, J. R. (1979). An adaptive algorithm for multivariate approximation giving optimal convergence rates. *J. Approx. Theory* **25**, 337-359.

de Boor, C., and Swartz, B. (1973). Collocation at Gaussian points. *SIAM J. Numer. Anal.* **10**, 582-606.

de Boor, C., and Swartz, B. (1977). Comments on the comparison of global methods for linear two-point boundary value problems. *Math. Comp.* **31**, 916-921.

de Boor, C., and Swartz, B. (1980). Collocation approximation to eigenvalues of an ordinary differential equation: The principle of the thing. *Math. Comp.* **35**, 679-694.

de Boor, C., and Swartz, B. (1981a). Collocation approximation to eigenvalues of an ordinary differential equation: numerical illustrations. *Math. Comp.* **36**, 1-19.

de Boor, C., and Swartz, B. (1981b). Local piecewise polynomial projection methods for an ode which give high -order convergence at knots. *Math. Comp.* **36**, 21-33.

Dehesa, J. S. (1978). The asymptotic eigenvalue density of rational Jacobi matrices. I. *J. Phys. A* **9**, 223-226.

Dehesa, J. S. (1980). The eigenvalue density of rational Jacobi matrices. II. *Linear Algebra Appl.* **33**, 41-55.

de Hoog, F. R., and Weiss, R. (1973). Asymptotic expansions for product integration. Math. Comp. **27**, 295-306.

Delves, L. M., and Abd-Elal, L. F. (1977). The fast Galerkin algorithm for the solution of linear Fredholm equations, algorithm 97. *Comput. J.* **20**, 374-376.

Delves, L. M., and Walsh, J., eds. (1974). *Numerical Solution of Integral Equations.* Oxford Univ. Press (Clarendon), London and New York.

Delves, L. M., Abd-Elal, L. F., and Hendry, J. A. (1979). A fast Galerkin algorithm for singular kernel equations. *J. Inst. Math. Appl.* **23**, 139-166.

de Pree, J. D., and Higgins, J. A. (1970). Collectively compact sets of linear operators. *Math. Zeitschrift* **115**, 366-370.

de Pree, J. D., and Klein, H. S. (1974). Characterization of collectively compact sets of linear operators. *Pacif. J. Math.* **55**, 45-54.

Descloux, J. (1979). Error bounds for an isolated eigenvalue obtained by the Galerkin method. *J. Appl. Math. Phys.* **30**, 167-176.

Descloux, J. (1981). Essential numerical range of an operator with respect to a coercive form and the approximation of its spectrum by the Galerkin method. *SIAM J. Numer. Anal.* **18**, 1128-1133.

Descloux, J., and Geymonat G. (1979). On the essential spectrum of an operator relative to the stability of a plasma in toroidal geometry. Rep. Math. Dept., Ecole Polytechn. Féd. de Lausanne.

Descloux, J., and Nassif, N. R. (1982). Stability analysis with error estimates for the approximation of the spectrum of self-adjoint operators on unbounded domains by finite element and finite difference methods. Application to Schrödinger's equation. Rep. Math. Dept., Ecole Polytechn. Fed. de Lausanne.

Descloux, J., and Tolley, M. D. (1981). Approximation of the Poisson problem and of the eigenvalue problem for the Laplace operator by the method of the large singular finite elements. Res. Rep. No. 81-01, Angew. Math., Eidg. Techn. Hochschule Zürich.

Descloux, J., Nassif, N., and Rappaz, J. (1977). Various results on spectral approximation. Rep. Math. Dept., Ecole Polytechn. Féd. de Lausanne.

Descloux, J., Nassif, N., and Rappaz, J. (1978a). On spectral approximation. Part 1. The problem of convergence. *RAIRO Anal. Numér.* **12**, 97-112.

Descloux, J., Nassif, N., and Rappaz, J. (1978b). Part 2, Error estimates for the Galerkin method, *RAIRO Anal. Numér.* **12**, 113-119.

Descloux, J., Luskin, M., and Rappaz, J. (1981). Approximation of the spectrum of closed operators — The determination of normal modes of a rotating basin. *Math. Comp.* **36**, 137-154.

Diaz, J. B., and Metcalf, F. T. (1968). A functional equation for the Ray-

leigh quotient for eigenvalues, and some applications. *J. Math. Mech.* **17**, 623-630.

Dietrich, G. (1978). On the efficient and accurate solution of the skew-symmetric eigenvalue problem. An arrangement of new and already known algorithmic formulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **14**, 209-235.

Dieudonné, J. (1960). *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press, New York.

Domb, C., Maradudin, A. A., Montroll, E. W., and Weiss, G. H. (1959a). Vibration frequency of spectra of disordered lattices. I. Moments of the spectra for disordered linear chains. *Phys. Rev.* **115**, 18-24; II. Spectra of disordered one-dimensional lattices. *Phys. Rev.* **115**, 24-34.

Domb, C., Maradudin, A. A., Montroll, E. W., and Weiss, G. H. (1959b). The vibration spectra of disordered lattices. *J. Phys. Chem. Solids* **8**, 419-422.

Dongarra, J. J., Moler, C. B., Bunch, J. R., and Stewart, G. W. (1979). *LINPACK User's Guide.* SIAM, Philadelphia, Pennsylvania.

Dongarra, J. J., Moler, C. B., and Wilkinson, J. H. (1981). Improving the accuracy of computed eigenvalues and eigenvectors. Tech. Rep. ANL 81-43, Argonne Nat. Lab., Illinois.

Douglas, J., and Dupont, T. (1973). Superconvergence for Galerkin methods for the two point boundary problem via local projections. *Numer. Math.* **21**, 270-278.

Douglas, J., and Dupont, T. (1974). Galerkin approximations for the two point boundary problem using continuous piecewise polynomial spaces. *Numer. Math.* **22**, 99-109.

Douglas, J., Dupont, T., and Wheeler, M. F. (1974). An L^∞-estimate and a superconvergence result for a Galerkin method for elliptic equations based on tensor products of piecewise polynomials. *RAIRO Anal. Numér.* **2**, 61-66.

Douglas, J., Dupont, T., and Wahlbin, L. (1975). Optimal L_∞-error estimates for Galerkin approximations to solution of two-point boundary value problems. *Math. Comp.* **29**, 475-483.

Dowson, H. R. (1978). *Spectral Theory of Linear Operators.* Academic Press, New York.

Duff, I. S. (1977). A survey of sparse matrix research. *Proc. IEEE* **65**, 500-535.

Duff, I. S., ed. (1979). *Conjugate Gradient Methods and Similar Techniques.* Tech. Rep. R-9636, AERE Harwell.

Duff, I. S. (1980). Recent developments in the solution of large sparse linear equations. In *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering* (R. Glowinski and J.-L. Lions, eds.), pp. 407-426. North-Holland Publ., Amsterdam.

Duff, I. S. (1981). A sparse future. In *Sparse Matrices and Their Uses.* (I. S. Duff, ed.). Academic Press, New York.

Duff, I. S. (1982). A survey of sparse matrix software. Report CSS 21, AERE Harwell. To appear in *Sources and Development of Mathematical Software* (W. R. Cowell, ed.). Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Duff, I. S., and Reid, J. K. (1975). On the reduction of sparse matrices to condensed forms by similarity transformations. *J. Inst. Math. Appl.* 15, 217-224.

Duff, I. S., and Reid, J. K. (1979). Performance evaluation of codes for sparse matrix problems. In *Performance Evaluation of Numerical Software* (L. D. Fosdick, ed.), pp. 121-135. North-Holland Publ., Amsterdam.

Dumont-Lepage, M. C., Gani, N., Gazeau, J. P., and Ronveaux, A. (1980). Spectrum of potentials gr-(S+2) via SL(2, ℝ) acting on quaternions. *J. Phys. A* 13, 1243-1257.

Dunford, N., and Schwartz, J. T. (1958). *Linear Operators. Part I: General Theory.* Wiley (Interscience), New York.

Dunford, N., and Schwartz. J. T. (1963). *Linear Operators. Part II: Spectral Theory, Selfadjoint Operators in Hilbert Spaces.* Wiley (Interscience), New York.

Dupont, T. (1976). A unified theory of superconvergence for Galerkin methods for two-point boundary problems. *SIAM J. Numer. Anal.* 13, 362-368.

Edwards, J. T., Licciardello, D. C., and Thouless, D. J. (1979). Use of the Lanczos method for finding complete sets of eigenvalues of large sparse matrices. *J. Inst. Math. Appl.* 23, 277-283.

Eggermont, P. P. (1982a). Collocation as a projection method and superconvergence for Volterra integral equations of the first kind. Rep. Math. Dept., Univ. of Delaware.

Eggermont, P. P. (1982b). Collocation for Volterra integral equations of the first kind with iterated kernel. Rep. Math. Dept., Univ. of Delaware.

Einarsson, B. (1979). Bibliography on the evaluation of numerical software. *J. Comput. Appl. Math.* 5, 145-159.

Elman, H. (1982). Iterative methods for large, sparse nonsymmetric sys-

tems of linear equations. Res. Rep. No. 229. Computer Science Dept., Yale Univ., Connecticut.

Erdelyi, I. (1965). An iterative least square algorithm suitable for computing partial eigensystems, *SIAM J. Numer. Anal.* **2**, 421-436.

Erdös, P., and Feldheim, E. (1936). Sur le mode de convergence de l'interpolation de Lagrange. *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci.* **203**, 913-915.

Evequoz, H. (1980). Approximation spectrale liée à l'étude de la stabilité magnétohydrodynamique d'un plasma par une méthode d'éléments finis non conformes. Thèse Math. Dept., Ecole Polytechn. Péd. de Lausanne.

Evequoz, H., and Jaccard, Y. (1981). A nonconforming finite element method to compute the spectrum of an operator relative to the stability of a plasma in toroidal geometry. *Numer. Math.* **36**, 455-465.

Faddeev, D. K., and Faddeeva, V. N. (1963). *Computational Methods of Linear Algebra.* Freeman, San Francisco, California.

Fairweather, G. (1978). *Finite Element Galerkin Methods for Differential Equations.* Dekker, New York.

Fan, K. (1949). On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **35**, 652-655.

Feler, M. G. (1974). Calculation of eigenvectors of large matrices. *J. Comput. Phys.* **14**, 341-349.

Fennêr, T. I., and Loizou, G. (1974). Some new bounds on the condition numbers of optimally scaled matrices. *J. Assoc. Comput. Mach.* **21**, 514-524.

Fichera, G. (1978). *Numerical and Quantitative Analysis.* Pitman, London.

Fiedler, M., and Pták, V. (1964). Estimates and iteration procedures for proper values of almost decomposable matrices. *Czechoslovak Math. J.* **39**, 593-608.

Finlaysson, B. A. (1972). *The Method of Weighted Residuals.* Academic Press, New York.

Fix, G. J. (1972). Effects of quadrature errors in finite element approximation of steady state, eigenvalue and parabolic problems. In *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations* (A. K. Aziz, ed.), pp. 525-556. Academic Press, New York.

Fix, G. J. (1973). Eigenvalue approximation by the finite element method. *Adv. in Math.* **10**, 300-316.

Fix, G. J. (1976). Hybrid finite element methods. *SIAM Rev.* **18**, 460-484.

Fix, G. J., and Heiberger, R. (1972). An algorithm for the ill-conditioned generalized eigenvalue problem. *SIAM J. Numer. Anal.* **9**, 78-88.

Forsythe, G. E., and Henrici, P. (1960). The cyclic Jacobi method for computing the principal values of a complex matrix. *Trans. Amer. Math. Soc.* 94, 1-23.

Forsythe, G. E., and Wasow, W. (1960). *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations.* Wiley (Interscience), New York.

Fox, L., and Goodwin, E. T. (1953). The numerical solution of non singular linear integral equations. *Philos. Trans. Roy. Soc. London* 245, 501-534

Francis, J. G. F. (1961-1962). The QR transformation: a unitary analogue to the LR transformation. Parts I and II. *Comput. J.* **4**, 265-271, 332-345.

Frank, R., and Veberhuber, C. W. (1978). Iterated defect correction for differential equations. Part I: Theoretical results. *Computing* **20**, 207-228.

Fredholm, I. (1900). Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. *Kung. Vet.-Akad. Förh. Stockholm* pp. 39-46.

Fredholm, I. (1903). Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Math.* 27, 365-390.

Fromme, J., and Golberg, M. (1978). Unsteady two dimensional airloads acting on oscillating thin airfoils in subsonic ventilated wind tunnels. Rep. NASA Contract, Univ. of Nevada, Las Vegas.

Gantmacher, F. R. (1959). *The Theory of Matrices.* Chelsea, New York.

Garabedian, P. R. (1967). *Partial Differential Equations.* Wiley, New York.

Geier, E. (1977). Eigenvalue and eigenvector calculation by simultaneous vector iteration (in German). *Z. Angew. Math. Mech.* **57**, T279-T281.

Gekeler, E. (1974). On the eigenvectors of a finite-difference approximation to the Sturm-Liouville eigenvalue problem. *Math. Comp.* **28**, 973-979.

Georg, K. (1979). On the convergence of an inverse iteration method for nonlinear elliptic eigenvalue problems. *Numer. Math.* **32**, 69-74.

Geradin, M. (1971). Error bounds for eigenvalue analysis by elimination of variables. *J. Sound Vibr.* **19**, 111-132.

Geradin, M. (1979). On the Lanczos method for solving large structural eigenvalue problems. *Z. Angew. Math. Mech.* **59**, T127-T129.

Gerschgorin, S. (1931). On bounding the eigenvalues of a matrix (in German). *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **1**, 749-754.

Ghemires, T. (1979). Utilisation du quotient de Rayleigh dans la méthode aux différences finies. Thèse 3ème Cycle, Univ. de Grenoble.

Glazman, I., and Liubitch, Y. (1972). *Analyse Linéaire dans les Espaces de Dimensions Finies.* Mir, Moscow.

Godunov, S. K., and Propkopov, G. P. (1970). A method of minimal iterations for evaluating the eigenvalues of an elliptic operator (in Russian). *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **10**, 1180-1190.

Godunov, S. K., and Ryabenki. V. S. (1964). *Theory of Difference Schemes.* North-Holland Publ., Amsterdam.

Gohberg, I. C., and Krein. M. G. (1960). The basic propositions on defect numbers. root numbers and indices of linear operators. *Amer. Math. Soc. Transl.* **13**, 185-264.

Goldberg, S. (1966). *Unbounded Linear Operators: Theory and Applications.* McGraw-Hill, New York.

Goldberg, S. (1974). Perturbations of semi-Fredholm operators by operators converging to zero compactly. *Proc. Amer. Math. Soc.* **45**, 93-98.

Golub, G.H., and Plemmons, R. J. (1980). Large scale geodetic least squares adjustment by dissection and orthogonal decomposition. *Linear Algebra Appl.* 34, 3-27.

Golub, G. H., and Wilkinson, J. H. (1976). Ill-conditioned eigensystems and the computation of the Jordan canonical form. *SIAM Rev.* **18**, 578-619.

Golub, G. H., Nash, S., and Van Loan. C. (1979). A Hessenberg-Schur method for the problem $AX+XB=C$. *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-24**, 909-913.

Goos, G., and Hartmanis. J., eds. (1978). *EISPACK-Matrix Eigensystem Routines-Guide Extension*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 51. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Gordon, R. G. (1969). New method for constructing wave-functions for bound states and scattering. *J. Chem. Phys.* **51**, 14-25.

Gordon, R. G. (1971). Quantum scattering using piecewise analytic solutions. In *Methods in Computational Physics* (B. Adler, S. Fernbach, and M. Rottenberg, eds.), Vol. 10, pp. 81-109. Academic Press, New York.

Gose, G. (1979). The Jacobi method for $Ax=\lambda Bx$. *Z. Angew. Math. Mech.* **59**, 93-101.

Gower, J. C. (1980). A modified Leverrier-Faddeev algorithm for matrices with multiple eigenvalues. *Linear Algebra Appl.* **31**, 61-70.

Graham, I. G. (1980). The numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind. Ph. D. Thesis, Univ. of New South Wales, Kensington.

Graham, I. G. (1981). Collocation methods for two dimensional weakly singular integral equations. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **22**, 460-477.

Graham, I. G. (1982). Galerkin methods for second-kind integral equations with singularities. *Math. Comp.* **39**. 519-533.

Graham. I. G., and Sloan, I. H. (1979). On the compactness of certain integral operators. *J. Math. Anal. Appl.* **68**, 580-594.

Grégoire, J. P., Nedelec, J. C., and Planchard, J. (1976). A method of finding the eigenvalues and eigenfunctions of selfadjoint elliptic operators. *J. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **8**, 201-214.

Gregory, R. T., and Karney, D. L. (1969). *A Collection of Matrices for Testing Computational Algorithms.* Wiley (Interscience) New York.

Griffiths, D. F., and Lorenz, J. (1978). An analysis of the Petrov-Galerkin finite element method. *J. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 14, 65-92.

Grigorieff, R. D. (1970a). Die Konvergenz des Rand-und Eigenwertproblems linearer gewöhnlicher Differenzengleichungen. *Numer. Math.* **15**, 15-48.

Grigorieff, R. D. (1970b) Über die Koerzitivität gewöhnlicher Differenzenoperatoren und die Konvergenz des Mehrschrittverfahren. *Numer. Math.* **15, 196-218.**

Grigorieff, R.D. (1972). Über die Fredholm-Alternative bei linearen approximationsregulären Operatoren. *Applicable Anal.* **2**, 217-227.

Grigorieff, R. D. (1973). Zur Theorie linearer approximationsregulärer Operatoren I, II. *Math. Nachr.* 55, 233-249, 250-363.

Grigorieff, R. D. (1975a). Über diskrete Approximation nichtlinearer Gleichungen I. Art. *Math. Nachr.* **69**, 253-272.

Grigorieff, R. D. (1975b). Diskrete Approximation von Eigenwertproblemen. I. Qualitative Konvergenz. *Numer. Math.* **24**, 355-374.

Grigorieff, R. D. (1975c). Diskrete Approximation von Eigenwertproblemen. II. Konvergenzordnung. *Numer. Math.* **24**, 415-433.

Grigorieff, R. D. (1975d). Diskrete Approximation von Eigenwertproblemen. III. Asymptotische Entwicklung. *Numer. Math.* **25**, 79-97.

Grigorieff, R. D., and Jeggle, H. (1973). Approximation von Eigenwertproblemen bei nichtlinearer Parameterabhängigkeit. *Manuscripta Math.* **10**, 245-271.

Gruber, R. (1975). HYMMIA — band matrix package for solving eigenvalue problems. *Comput. Phys. Comm.* **10**, 30-41.

Gruber, R. (1978). Finite hybrid elements to compute the ideal magnetohydrodynamic spectrum of an axiasymmetric plasma. *J. Comput. Phys.* **26**, 378-388.

Gupta, K. K. (1973). Eigenproblem solution by a combined Sturm se-

quence and inverse iteration technique. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **7**, 17-42.

Gupta, K. K. (1974). Eigenproblem solution of damped structural systems. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **8**, 877-911.

Gupta, K. K. (1976a). On a finite dynamic element method for free vibration analysis of structures. *Comput. Method Appl. Mech. Engrg.* 9, 105-120.

Gupta, K. K. (1976b). On a numerical solution of the supersonic panel flutter eigenproblem. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **10**, 637-645.

Gupta, K. K. (1978a) On a numerical solution of the pastic buckling problem of structures. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **12**, 941-947.

Gupta, K. K. (1978b). Development of a finite dynamic element for free vibration analysis of two-dimensional structures. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **12**, 1311-1327.

Güssman, B. (1980). L_∞-bounds of L_2-projections on splines. In *Quantitative Approximation* (R. A. de Vore and K. Scherer, eds.), 153-162. Academic Press, New York.

Hackbusch, W. (1979). On the computation of approximate eigenvalue and eigenfunctions of elliptic operators by means of a multigrid method. *SIAM J. Numer. Anal.* **16**, 201-215.

Hackbusch, W. (1980). Multigrid solutions to linear and nonlinear eigenvalue problems for integral and differential equations. Rep. 80-3, Math. Inst., Univ. zu Köln.

Hackbusch, W. (1981a). On the convergence of multigrid iteratiens. *Beitr. Numer. Math.* **9**, 213-239.

Hackbusch, W. (1981b). Error analysis of the nonlinear multigird method of the second kind. *Appl. Matem.* **26**, 18-29.

Hacksbusch, W., and Holmann, G. (1980). Results of the eigenvalue problem for the plate equation. *Z. Angew. Math. Phys.* **31**, 730-739.

Hadamard, J. (1908). Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. *Memoires savants étrangers Acad. Sci. Paris* 33, 1-28.

Hämmerlin, G. (1976). Zur numerischen Behandlung von homogenen Fredholmschen Integralgelichungen 2. Art mit Splines. In *Spline Functions Karlsruhe 1975* (K. Böhmer, G. Meinardus, and W. Schempp, eds.) Lecture Notes in Mathematics, Vol. 501, pp. 92-93. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Hämmerlin, G., and Schumaker, L. L. (1979). Error bounds for the approximation of Green's kernels by splines. Numer. Math. 33, 17-22.

Hämmerlin, G., and Schumaker, L. L. (1980). Procedures for kernel approximation and solution of Fredholm integral equations of the second kind. *Numer. Math.* **34**, 125-141.

Hahn, H. (1948). *Reelle Funktionen. Punktfunktionen.* Chelsea, New York.

Hairer, E. (1978). On the order of iterated defect correction: An algebraic proof. *Numer. Math.* **29**, 409-443.

Hall, G. G. (1977). On the eigenvalues of molecular graphs. *Molecular Phys.* **33**, 551-557.

Halmos, P. H. (1950). Normal dilations and extensions of operators. *Summa Brasil. Math.* **2**, 125-134.

Hanson, R. J. (1972). Integral equations of immunology. *Comm. ACM* **15**, 883-890. *Harwell Subroutine Library Manual.* Harwell, Oxfordshire.

Hashimoto, M. (1970). A method of solving large matrix equations reduced from Fredholm equations of the second kind. *J. Assoc. Comput. Mach.* **17**, 629-636.

Hemker, P. W. (1975). Galerkin's method and Lobatto points. Rep. NW 24/75, Stichting Math. Cent., Amsterdam.

Hemker, P. W. (1982a). The defect correction principle. BAIL II short course lecture notes.

Hemker, P. W. (1982b). Extensions of the defect correction principle. BAIL II short couorse lecture notes.

Hemker, P. W., and Schippers, H. (1981). Multigrid methods for the solution of Fredholm equations of the second kind. *Math. Comp.* **36**, 215-232.

Hendershott, M. C. (1973). Ocean tides. *Trans. Amer. Geophys. Union* **54**, 76-86.

Henrici, P. (1962). Bounds for iterates, inverses, spectral variation and fields of values of non-normal matrices. *Numer. Math.* **4**, 24-40.

Henrici, P. (1963). Bounds for eigenvalues of certain tridiagonal matrices. *SIAM J. Appl. Math.* **11**, 289-290; **12**, 497.

Herbold, R. J., Schultz, M. H., and Varga, R. S. (1969). The effect of quadrature errors in the numerical solution of boundary value problems by variational techniques. *Aequationes Math.* **3**, 247-270.

Herman, H. (1975). Extension of Lanczos' method of fundamental eigenvalue approximation. *Trans. ASME Ser. E, J. Appl. Mech.* **42**, 484-489.

Hestenes, M. R., and Karush, W. (1951). A method of gradients for the calculation of the characteristic roots and vectors of a real symmetric matrix. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B.* **47**, 471-478.

Hestenes, M. R., and Stein, M. L. (1973). The solution of linear equations by minimization. *J. Optim. Theory Appl.* **11**, 335-359.

Hestenes, M. R., and Stiefel, E. (1952). Method of conjugate gradients for solving linear systems. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B.* **49**, 409-436.

Hirai, I., Yoshimura, T., and Takamura, K. (1973). On a direct eigenvalue analysis for locally modified structures. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **6**, 441-456.

Hodges, D. H. (1979a). A theoretical technique for analyzing aeroelastic stability of bearingless rotors. *AIAA J.* **17**, 400-407.

Hodges, D. H. (1979b). Vibration and responses of nonuniform rotating beams with discontinuities. *AIAA-ASME Dyn. Mater. Conf. St. Louis, Missouri*, 29-38.

Hodges, D. H. (1979c). Aeromechanical stability analysis for bearingless rotor helicopters. *J. Amer. Helicopter Soc.* **24**, 2-9.

Hodges, D. H. (1980). Torsion of pretwisted beams due to axial loading. *J. Appl. Mech.* **47**, 393-397.

Householder, A. S. (1964). *The Theory of Matrices in Numerical Analysis.* Ginn (Blaisdell), Boston, Massachusetts.

Householder, A. S., and Bauer, F. L. (1960). On certain iterative methods for solving linear systems. *Numer. Math.* **2**, 55-59.

Houstis, E. N., and Papatheodorou, T. S. (1978). A collocation method for Fredholm integral equation of the 2nd kind. *Math. Comp.* **32**, 159-173.

Houstis, E. N., Lynch, R. E., Rice, J. R., and Papatheodorov T. S. (1978). Evaluation of numerical methods for elliptic partial differential equations. *J. Comput. Phys.* **27**, 323-350.

Howson, W. P., and Williams, F. W. (1973). Natural frequencies of frames with axially loaded Timoshenko members. *J. Sound Vibration* **26**, 503-515.

Hsiao, G. C., and Wendland, W. L. (1977). A finite element method for some integral equations of the first kind. *J. Math. Anal. Appl.* **58**, 449-481.

Hsiao, G. C., and Wendland, W. L. (1981). The Aubin-Nitsche lemma for integral equations. *J. Integral Equations* **3**, 299-315.

Huang, L. (1978). Some perturbation problems for generalized eigenvalues (in Chinese). *Beijing Daxue Xuebao* **4**, 20-25.

Hubbard, B. E. (1962). Bounds for eigenvalues of the Sturm-Liouville problem by finite difference methods. *Arch. Rational Mech. Anal.* **28**, 171-179.

Hughes, T. J. R. (1976). Reduction scheme for some structural eigenvalue problems by a variational theorem. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **10**, 845-852.

Huseyin, K. (1976). Standard forms of eigenvalue problems associated with gyroscopic systems. *J. Sound Vibration* **45**, 29-37.

Huseyin, K., and Roorda, J. (1971). The loading-frequency relationship in multiple eigenvalue problems. *Trans. ASME Ser. E. J. Appl. Mech.* **38**, 1007-1011.

Ikebe, Y. (1972). The Galerkin method for the numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind. *SIAM Rev.* **14**, 465-491.

IMSL Library 3 Reference Manual (1975). Internat. Math. Statist. Libraries, Houston, Texas.

Irons, B. M. (1963). Eigenvalue economizers in vibration problems. *J. Roy. Aero. Soc.* **67**, 526-528.

Isaacson, E., and Keller, H. (1966). *Analysis of Numerical Methods.* Wiley, New York.

Ishihara, K. (1977). Convergence of the finite element method applied to the eigenvalue problem $\Delta u+\lambda u=0$. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **13**, 47-60.

Ishihara, K. (1978). A mixed finite element method for the biharmonic eigenvalue problems of plate bending. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **14**, 399-414.

Ishihara, K. (1979). On the mixed finite element approximation for the buckling of plates. *Numer. Math.* **33**, 195-210.

Ivanov, V. V. (1976). *The Theory of Approximate Methods and Their Application to the Numerical Solution of Singular Integral Equations.* Noordhoff, Groningen, The Netherlands.

Iwai, Z., and Kubo, Y. (1979). Determination of eigenvalues in Marshall's model reduction. *Internat. J. Control* **30**, 823-836.

Ixaru, L. G. (1972). The error analysis of the algebraic method for solving the Schrödinger equation. *J. Comput. Phys.* **9**, 159-163.

Jaccard, Y. (1980). Approximation spectrale par la méthode des éléments finis conformes d'une classe d'opérateurs non compacts et partiellement réguliers. Thèse Math. Dept., Ecole Polytechn. Féd. de Lausanne.

Jacobi, C. G. J. (1846). Über ein leichtes Verfahren die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen. *Crelle J. Reine Angew. Math.* **30**, 51-94.

James, R. L. (1971). Uniform convergence of positive operators. *Math. Z.* 120, 124-142.

Jeggle, H. (1972). Über die Approximation non linearen Gleichungen zweiter Art und Eigenwertprobleme in Banach-Räumen. *Math. Z.* **124**, 319-342.

Jeggle, H., and Wendland, W. L. (1977). On the discrete approximation of eigenvalue problems with holomorphic parameter dependence. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **78**, 1-29.

Jennings, A. (1973). Mass condensation and simultaneous iteration for vibration problems. *Internat. J. Num. Methods Engrg.* **6**, 543-552.

Jennings, A. (1977a). *Matrix Computations for Engineers and Scientists*, Wiley, New York.

Jennings, A. (1977b). Matrices. Ancient and modern. *Bull. Inst. Math. Appl.* **13**, 117-123.

Jennings, A. (1977c). Influence of the eigenvalue spectrum on the convergence rate of the conjugate gradient method. *J Inst. Math. Appl.* **20**, 61-72.

Jennings, A. (1980). Eigenvalue methods for vibration analysis. *Shock Vibration Digest* **12**, 3-19

Jennings, A. (1981). Eigenvalue methods and the analysis of structural vibrations. In *Sparse Matrices and Their Uses* (I. S. Duff, ed.), pp. 109-138. Academic Press, New York.

Jennings, A., and Agar, T. J. S. (1979). Progressive simultaneous inverse iteration for symmetric eigenvalue problems. CE Report, Queen's Univ., Belfast.

Jennings, A., and Orr, D. R. L. (1971). Application of the simultaneous iteration method to undamped vibration problems. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **3**, 13-24.

Jennings, A., and Stewart, W. J. (1975). Simultaneous iteration for partial eigensolution of real matrices. *J. Inst. Math. Appl.* **15**, 351-361.

Jennings, A., Halliday, J., and Cole, M. J. (1978). Solution of linear generalized eigenvalue problems containing singular matrices. *J. Inst. Math. Appl.* **22**, 401-410.

Jensen, P. S. (1972). The solution of large eigenproblems by sectioning. *SIAM J. Numer. Anal.* **9**, 534-545.

Jenssen, O. (1972). Eigenfunctions and spectrum of the hard-sphere collision operator. *Phys. Norveg.* **6**, 180-191.

Jespersen, D. (1978). Ritz-Galerkin methods for singular boundary value problems. *SIAM J. Numer. Anal.* **15**, 813-834.

Johnsen, T. L. (1975). On the computation of natural modes of an unsupported vibrating structure by simultaneous iterations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **2**, 305-322.

Johnsen, T. L. (1978). A numerical method for eigenreduction of nonsymmetric real matrices. *Comput. & Struct.* **3**, 399-402.

Kagiwada, H. H., Kalaba, R. E., and Vereeke, B. J. (1968). The invariant imbedding numerical method for Fredholm integral equations with degenerate kernels. *J. Approx. Theory* **1**, 355-364.

Kågström, B. (1977a). Methods for the numerical computation of matrix functions and the treatment of ill conditioned eigenvalue problems. Report UMINF-59. 77, Univ. of Umeå.

Kågström, B. (1977b). Bounds and perturbation bounds for the matrix exponential. *BIT* **17**, 39-57.

Kågström, B. (1981). How to compute the Jordan normal form — the choice between similarity transformations and methods using chain relations. Report UMINF-91. 81, Univ. of Umeå.

Kågström, B., and Ruhe, A (1980a). An algorithm for numerical computation of the Jordan normal form of a complex matrix. *ACM Trans. Math. Software* **6**, 398-421.

Kågström, B., and Ruhe, A. (1980b). Algorithm 560 JNF, an algorithm for numerical computation of the Jordan normal form of a complex matrix. *ACM Trans. Math. Software* **6**, 437-443.

Kahan, W., and Parlett, B. N. (1976). How far should you go with the Lanczos process? In *Sparse Matrix Computations* (J. R. Bunch and D. J. Rose, eds.), pp. 131-144. Academic Press, New York.

Kahan, W., Parlett, B. N., and Jiang, E. (1981). Residual bounds on approximate eigensystems of nonnormal matrices. *SIAM J. Numer. Anal.* **19**, 470-484.

Kaniel, S. (1966). Estimates for some computational techniques in linear algebra. *Math. Comp.* **20**, 369-378.

Kantorovitch, L. V. (1934). On a new method of approximate solution of partial differential equations (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **4**, 532-436.

Kantorovitch, L. V. (1948). Functional analysis and applied mathematics (in Russian). *Usp. Mat. Nauk* **3**, 89-185.

Kantorovitch, L. V., and Akilov, G. P. (1964). *Functoinal Analysis in Normed Spaces.* Pergamon, Oxford.

Kantorovitch, L. V., and Krylov, V. I. (1955). *Approximate Methods of Higher Analysis.* Wiley (Interscience), New York.

Karma, O. O. (1971). Asymptotic error estimations for characteristic values of holomorphic Fredholm operator functions (in Russian). *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **11**, 559-568.

Karpel, M., and Newman, M. (1975). Accelerated convergence for vibration modes using the substructure coupling method and fictitious coupling masses. *Israel J. Tech.* **13**, 55-62.

Karpilovskaia, E. B. (1953). On the convergence of an interpolation method for ordinary differential equations (in Russian). *Usp. Mat. Nauk* **8**, 111-118.

Karpilovskaia, E.B. (1963). On the convergence of the collocation method (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **151**, 766-769.

Karpilovskaia, E. B. (1965). On the convergence of the subregion method for integro-differential equations (in Russian) *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **5**, 124-132.

Kato, T. (1949). On the upper and lower bounds of eigenvalues. *J. Phys. Soc. Japan* **4**, 334-339.

Kato, T. (1958). Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators. *J. Analyse Math.* **6**, 261-322.

Kato, T. (1976). *Perturbation Theory for Linear Operators,* 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Kaucher, E., and Rump, S. M. (1982). E-methods for fixed point equations $f(x)=x$. *Computing* **28**, 31-42.

Keldyš, M. V. (1951). On the characteristic values and characteristic functions of certain classes of nonself-adjoint equations (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **77**, 11-14.

Keller, H. B. (1965). On the accuracy of finite difference approximations to the eigenvalues of differential and integral operators. *Numer. Math.* **7**, 412-419.

Keller, H. B. (1975). Approximation methods for nonlinear problems with application to two-point boundary value problems. *Math. Comp.* **29**, 464-474.

Kikuchi, F. (1980a). On a mixed finite element scheme for linear buckling analysis of plates. In *Computational Methods in Nonlinear Mechanics* (J. T. Oden, ed.), pp. 289-302. North-Holland Publ., Amsterdam.

Kikuchi, F. (1980b). Numerical analysis of a mixed finite element method for plate buckling problems. ISAS Rep. No. 584, Univ. of Tokyo, **45**, 165-190.

Kleinert, P. (1979). Cluster approximation for the spectral density of mixed diatomic systems. *Phys. Status Solidi (B)* **91**, 455-465.

Kolata, W. G. (1978). Approximation in variationally posed eigenvalue problems. *Numer. Math.* **29**, 159-171.

Kolata, W. G. (1979). Eigenvalue approximation by the finite element method: the method of Lagrange multipliers. *Math. Comp.* **33**, 63-76.

Kolata, W. G., and Osborn, J. E. (1979). Nonselfadjoint spectral approximation and the finite element method. In *Functional Analysis Methods in Numerical Analysis* (M. Z. Nashed, ed.), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 101, pp. 115-133. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Kondrashev, V. I. (1945). On some properties of functions of spaces *Lp* (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **48**, 563-566.

Krasnoselskii, M. A., Vainikko, G. M., Zabreiko, P. P., Rutitskii, Ya. B., and Stetsenko, V. Ya. (1972). *Approximate Solutions of Operator Equations.* Wolters-Noordhoff, Groningen, The Netherlands.

Krasnoselskii, M. A., Zabreiko, P. P., Pustilnik, E. I., and Sobolevskiy, P. E. (1976). *Integral Operators in Spaces of Summable Functions.* Noordhoff Int., Leyden, The Netherlands.

Kreiss, H. O. (1972). Difference approximation for boundary and eigenvalue problems for ordinary differential equations. *Math. Comp.* 26, 605-624.

Kreuzer, K. G., Miller, H. G., Dreizler, R. M., and Berger, W. A. (1980). Extension of an iterative method to obtain low-lying eigenstates of unbounded Hermitian operators. *J. Phys. A.* **13**, 2645-2652.

Kreuzer, K. G., Miller, H. G., and Berger, W. A. (1981). The Lanczos algorithm for self-adjoint operators. *Phys. Lett. A.*, 429-432.

Krylov, A. N. (1931). On the numerical solution of equations which in technical questions are determined by the frequency of small vibrations of material systems (in Russian). *Izv. Akad. Nauk SSSR Otd. Mat. Estest.* **1**, 491-539.

Krylov, V. I. (1962). *Approximate Calculation of Integrals.* Macmillan, New York.

Kublanovskaya, V. N. (1961). On some algorithms for the solution of the complete eigenvalue problem (in Russian). *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **1**, 555-570.

Kulkarni, R. P. (1982). Convergence and computation of approximate eigenelements. Ph. D. Thesis, Math. Dept., Indian Inst. Technology, Bombay.

Kulkarni, R. P., and Limaye, B. V. (1981). On error bounds in strong

approximations for eigenvalue problems. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **22**, 270-283.

Kulkarni, R. P., and Limaye, B. V. (1982). On Chatelin's algorithm for the computation of the eigenelements by iterations. Rep. Math. Dept., Indian Inst. Technol., Bombay.

Kulkarni, R. P., and Limaye, B. V. (1983a). On the steps of convergence of approximate eigenvectors in the Rayleigh-Schrödinger series. *Numer. Math.* (to appear).

Kulkarni, R. P., and Limaye, B. V. (1983b). Geometric and semi-geometric approximation of spectral projections. *J. Math. Anal. Appl.* (to appear).

Kulisch, U., and Miranker, W. L. (1981). *Computer Arithmetic in Theory and Practice.* Academic Press, New York.

Kuratowski, C. (1961). *Topologie,* 3rd ed. Polska Akad. Nauk. Warsaw.

Kuttler, J. R. (1972). Remarks on a Stekloff eigenvalue problem. *SIAM J. Numer. Anal.* **9**, 1-5.

Kuttler, J. R. (1979). Dirichlet eigenvalues. *SIAM J. Numer. Anal.* **16**, 332-338.

Kuttler, J. R., and Sigillito, V. G. (1968). Inequalities for membrane and Stekloff eigenvalues, *J. Math. Anal. Appl.* **23**, 148-160.

Laasonen, P. (1959). A Ritz method for simultaneous determination of several eigenvalues and eigenvectors of a big matrix. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A* I *Math.* **265**, 3-16.

Lanczos, C. (1950). An iterative method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B* **45**, 255-282.

Lanczos, C. (1952). Solution of systems of linear equations by minimized iterations. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B* **49**, 33-53.

Lanczos. C. (1961). *Linear Differential Operators.* Van Nostrand, New York.

Laurent, P. J. (1972). *Approximation et Optimisation.* Hermann, Paris.

Lebbar, R. (1981a). Sur les propriétés de superconvergence des solutions approchées de certaines équations intégrales et différentielles. Thèse 3ème Cycle, Univ. de Grenoble.

Lebbar, R. (1981b). Superconvergence at the knots for the generalized eigenvectors of differential and integral operators. R.R. IMAG No. 272, Univ. de Grenoble.

Lebbar, R. (1982). Superconvergence with adaptive mesh for weakly singular equations. Unpublished manuscript, Univ. de Grenoble.

Lebedev, V. I. (1977). An iterative method with Chebyshev parameters

for finding the maximum eigenvalue and corresponding eigenfunction. *U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys.* **17,** 92-101.

Lee, J. W., and Prenter, P. M. (1978). An analysis of the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind. *Numer. Math.* **30**, 1-23.

Lehmann, N. J. (1966). On optimal eigenvalue localization in the solution of symmetric matrix problems. *Numer. Math.* **8**, 42-55.

Lemordant, J. (1977). Localisation d'un groupe de valeurs propres. Note d'étude LA No. 46, Centre de Calcul Scientifique de l'Armement, CELAR, Bruz.

Lemordant, J. (1979). Etude de l'ensemble des schémas d'approximation spectrale stable d'un opérateur compact. Sém. Anal. Numér. No. 319, Univ. de Grenoble.

Lemordant, J. (1980) Localisation de valeurs propres et calcul de sous-espaces invariants. Thèse d'Etat, Univ. de Grenoble.

Lerou, R. J. L., and Dekker, H. (1981). Exact computation of high-order perturbational eigensolutions and its application to the analysis of a spectral degeneracy in a bistable diffusion process. *Phys. Lett. A* **83**, 371-375.

Lewis, J. G. (1977). Algorithms for sparse matrix eigenvalue problems. Ph. D. Thesis, Report CS-77-595, Computer Sci. Dept., Stanford Univ., Stanford, California.

Lewis, J. G., and Grimes, R. G. (1981). Practical Lanczos algorithms for solving structural engineering problems. In *Sparse Matrices and Their Uses* (I. S. Duff, ed.), pp. 349-355. Academic Press, New York.

Lin Qun (1979). Some problems about the approximate solution for operator equations (in Chinese). *Acta Math. Sinica* **22,** 219-230.

Lin Qun (1980). How to increase the accuracy of lower order elements in nonlinear finite element methods. In *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering* (R. Glowinski and J.-L. Lions, eds.), pp. 41-47. North-Holland Publ., Amsterdam.

Lin Qun (1981a). Iterative corrections for nonlinear eigenvalue problem of operator equations. Res. Rep. IMS-1, Institute of Mathematical Sciences, Chengdu Branch of Academia Sinica.

Lin Qun (1981b). Iterative corrections for nonlinear operator equations with applications to difference method. *J. Sys. Sci. Math. Sci.* **1,** 139-146.

Lin Qun (1981c). Deferred corrections for equations of the second kind. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **22,** 456-459.

Lin Qun (1982a). Iterative refinement of finite element approximations for elliptic problems. *RAIRO Anal. Numér.* **16**, 39-47.

Lin Qun (1982b). Personal communication.

Lin Qun, and Jang Li-Shang (1979). Investigation of the system $\Delta u_i = \sum_{j=1}^{n} U(\partial u_i/\partial x_j) + f_i$, $i=1, \ldots, n$. Tech. Rep., Inst. Math., Acad. Sinica, Beijing.

Lin Qun, and Liu Jiaquan (1980). Extrapolation method for Fredholm integral equations with non-smooth kernels. *Numer. Math* **35**, 459-464.

Linz, P. (1970). On the numerical computation of eigenvalues and eigenvectors of symmetric integral equations. *Math. Comp.* **24**, 905-909.

Linz, P. (1972). Error estimates for the computation of eigenvalues of selfadjoint operators. *BIT* **12**, 528-533.

Linz, P. (1977). A general theory for the approximate solution of operator equations of the 2nd kind. *SIAM J. Numer. Anal.* **14**, 543-554.

Linz, P. (1979). *Theoretical Numerical Analysis.* Wiley, New York.

Lions, J.-L., and Magenes, E. (1968). *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Vol. 1. Dunod, Paris.

Lo, W. S. (1973) Spectral approximation theorems for bounded linear operators. *Bull. Austral. Math. Soc.* **8**, 279-287.

Locker, J., and Prenter, P. M. (1978). Optimal L^2-and L^∞-error estimates for continuous and discrete least squares methods for boundary value problems. *SIAM J. Numer. Anal.* **15**, 1151-1160.

Locker, J., and Prenter, P. M. (1979). On least squares methods for linear two-point boundary value problems. In *Functional Analysis Methods in Numerical Analysis* (M. Z. Nashed, ed.), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 701, pp. 149-168. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Locker, J., and Prenter, P. M. (1980). Regularization with differential operators. I. General theory. *J. Math. Anal. Appl.* **74**, 504-529.

Locker, J., and Prenter, P. M. (1981). Regularization with differential operators. II. Weak least squares finite element solutions to first kind integral equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **17**, 247-267.

Locker, J., and Prenter, P. M. (1983). Representors and superconvergence of least squares finite element approximates. *Numer. Funct. Anal. Optim.* (to appear).

Longsine, D. E., and McCormick, S. F. (1980). Simultaneous Rayleigh quotient minimization methods for $Ax=\lambda Bx$. *Linear Algebra Appl.* **34**, 195-234.

Lorentz, G. G. (1966) *Approximation of Functions*. Holt, New York.

Luskin, M. (1979). Convergence of a finite element method for the approximation of normal modes of the oceans. *Math. Comp.* 33, 493-519.

Luthey, Z. A. (1974). Piecewise analytical solutions method for the radial Schrödinger equation. Ph. D. Thesis, Harvard Univ., Cambridge, Massachusetts.

McCormick, S. F (1980). Mesh refinement for integral equations. In *Numerical Treatment of Integral Equations* (J. Albrecht and L. Collatz, eds.), pp. 183-190. Birkhaeuser, Basel.

McCormick, S. F. (1981). A mesh refinement method for $Ax=\lambda Bx$. *Math. Comp* **36**, 485-498.

McCormick, S. F., and Noe, T. (1977). Simultaneous iteration for the matrix eigenvalue problem. *Linear Algebra Appl.* **16**, 43-56.

McLaurin, J. W. (1974). General coupled equation approach for solving the biharmonic boundary value problem. *SIAM J. Numer. Anal.* **11**, 14-33.

Marek, I. (1971). Approximations of the principal eigenelements in K-positive nonselfadjoint eigenvalue problems, *Math. Systems Theory* **5**, 204-215.

Marchuk, G. I., and Agoškov, V. I. (1977). The selection of coordinate functions in the generalized Bubnov-Galerkin method (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **232**, 1253-1256.

Masur, E. F. (1973). Bounds and error estimates in structural eigenvalue problems. *J. Struct. Mech.* 1, 417-438.

Mead, D. J., and Parthan, S. (1979). Free wave propagation in two-dimensional plates. *J. Sound Vibr.* **64**, 325-348.

Meirovitch, L. (1974). A new method of solution of the eigenvalue problem for gyroscopic systems. *AIAA J.* **12**, 1337-1342.

Mercier, B., and Rappaz, J. (1978). Eigenvalue approximation via nonconforming and hybrid finite element methods. Rep. No. 33, Math. Appl., École Polytechnique, Palaiseau.

Mercier, B., Osborn, J., Rappaz, J., and Raviart, P.-A. (1981). Eigenvalue approximation by mixed and hybrid methods. *Math. Comp.* **36**, 427-453.

Mérigot, M. (1974). Régularité des fonctions propres du laplacien dans un cône. *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci. Ser. A* **279**, 503-505.

Miesch, A. (1980). Scaling variables and interpretation of eigenvalues in principal component analysis of geologic data. *J. Internal. Assoc. Math. Geol.* **12**, 523-538.

Mika, J. (1971). Fundamental eigenvalues of the linear transport equation. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **11**, 879-891.

Mikhlin, S. G. (1964). *Integral Equations and Their Applications to Some Problems of Mechanics, Mathematical Physics and Engineering*, 2nd ed. Pergamon, Oxford.

Mikhlin, S. G. (1971). *The Numerical Performance of Variational Methods.* Wolters-Noordhoff, Groningen, The Netherlands.

Mikhlin, S. G., and Smolitskii, K. L. (1967). *Approximate Methods for Solutions of Differential and Integral Equations.* Amer. Elsevier, New York.

Miller, H. G., and Berger, W. A. (1979). An investigation of pseudoconvergence in an iterative method for calculating the low-lying eigenvectors of a Hermitian matrix. *J. Phys. A.* **12**, 1693-1698.

Mills, W. H. (1979a). The resolvent stability for spectral convergence with application to the finite element approximation of noncompact operators. *SIAM J. Numer. Anal.* **16**, 695-703.

Mills, W. H. (1979b). Optimal error estimates for the finite element spectral approximation of noncompact operators. *SIAM J. Numer. Anal.* **16**, 704-718.

Mills, W. H. (1979c). Finite element error estimates for singular variational eigenvalue problems. Res. Rep., Math. Dept., Pennsylvania State Univ., University Park.

Mills, W. H. (1980). Convergence and errors for projective finite element approximation of variational eigenvalue problems. Res. Rep. No. 8015, Math. Dept., Pennsylvania State Univ., University Park.

Mindlin, R. D. (1956). Simple modes of vibrations of crystals. *J. Appl. Phys.* **27**, 1462-1466.

Miranker, W. L. (1971). Galerkin approximations and the optimization of difference schemes for boundary value problems. *SIAM J. Numer. Anal.* **8**, 486-496.

Miyoshi, T. (1976) A mixed finite element method for the solution of the von Kármán equations. *Numer. Math.* **26**, 255-269.

Mock, M. S. (1976). Projection methods with different trial and test spaces. *Math. Comp.* **30**, 400-416.

Moiseiwitsch, B. L. (1977). *Integral Equations.* Longman, London.

Moler, C. B., and Stewart, G. W. (1973). An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems. *SIAM J. Numer. Anal.* **10**, 241-256.

Moore, E. H. (1919-1920). On the reciprocal of the generalized algebraic matrix (abstract). *Bull. Amer. Math. Soc.* **26**, 394.

Moro, G., and Freed, J. H. (1981). Calculation of ESR spectra and related

Fokker-Planck forms by the use of the Lanczos algorithm. *J. Chem. Phys.* **74**, 3757-3773.

Moszynski, K. (1980). On the approximation of the spectral density function of a self-adjoint operator. Rep. No. 206, Inst. Math., Polish Academy of Sciences.

Muda, Y. (1973). A new relaxation method for obtaining the lowest eigenvalue and eigenvector of a matrix equation. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **6**, 511-519.

Munteanu, M. J., and Schumaker, L. L. (1973). Direct and inverse theorems for multidimensional spline approximation. *Indiana Univ. Math. J.* **23**, 461-470.

Muroya, Y. (1979). On a posteriori error estimates for Galerkin approximations to the solutions of two-point boundary value problems. *Mem. School Sci. Engrg. Waseda Univ.* **43**, 163-169.

Mysovskih, I. P. (1957). Computation of the eigenvalues of integral equations by means of iterated kernels (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **115**, 45-48.

Mysovskih, I. P. (1964a). On error bounds for approximate methods of estimation of eigenvalues of hermitian kernels. *Amer. Math. Soc. Transl.* **35**, 237-250.

Mysovskih, I. P. (1964b). On error bounds for eigenvalues calculated by replacing the kernel by an approximating kernel. *Amer. Math. Soc. Transl.* **35**, 251-262.

NAG Library Reference Manual. Numerical Algorithms Group, Oxford.

Nakamura, S. (1976). Analysis of the coarse-mesh rebalancing effect on Chebyshev polynomial iterations. *Nuclear Sci. Engrg.* **61**, 98-106.

Nash, J. C. (1974). The Hermitian matrix eigenproblem $Hx=eSx$. *Comput. Phys. Comm.* **8**, 85-94.

Nash, J. C. (1979). *Compact Numerical Methods for Computers. Linear Algebra and Function Minimization.* Wiley, New York.

Nashed, M. Z., and Wahba, G. (1974). Convergence rates of approximate least-squares solutions of linear integral and operator equations of the first kind. *Math. Comp.* **28**, 69-80.

Natanson, I. P. (1964). *Theory of Functions of a Real Variable,* Vols. 1 and 2. Ungar, New York.

Natterer, F. (1977). Uniform convergence of Galerkin's method for splines on highly non uniform meshes. *Math. Comp.* **31**, 457-468.

Nau, R. W. (1976). Computation of upper and lower bounds to the frequencies of clamped cylindrical shells. *Internat. J. Earthquake Engrg. Struct. Dynam.* **4**, 553-559.

Nedelec, J. C. (1977). *Approximation des équations intégrales en mécanique et en physiqual.* Lecture Notes, Math. Appl., École Polytechnique, Palaiseau.

Nelson, P., and Elder, I. T. (1977). Calculation of eigenfunctions in the context of integration-to-blowup. *SIAM J. Numer. Anal.* **14**, 124-136.

Nemat-Masser, S., and Lang, K.-W. (1979). Eigenvalue problems for heat conduction in composite material. *Iranian J. Sci. Tech.* **7**, 243-269.

Nesbet, R. K. (1981). Large matrix techniques in quanfum chemistry and atomic physics. In *Sparse Matrices and Their Uses* (I. S. Duff, ed.). pp. 161-174. Academic Press, New York.

Nikolai, P. J. (1979). Algorithm 538 eigenvectors and eigenvalues of real generalized symmetric matrices by simultaneous iteration. *ACM Trans. Math. Software* **5**, 118-125.

Nikolskii, S. M. (1975). *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems.* Springer-Verlag, Berlin and New York.

Nisbet, R. M. (1972) Acceleration of the convergence in Nesbet's algorithm for eigenvalues and eigenvectors of large matrices. *J. Comput. Phys.* **10**, 614-619.

Nitsche, J. (1970). Über ein Variationprinzip zur Lösung von Dirichlet Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **36**, 9-15.

Nitsche, J. (1975). L_∞-convergence of finite element approximation. *Second Conf. Finite Elem., Rennes.*

Nitsche, J. (1977). On projection methods for the plate equation. In *Numerical Analysis* J. Descloux and J. Marti, eds.), pp. 49-61. Birkhaeuser, Basel.

Noble, B. (1971). A bibliography on "Methods for solving integral equations" Tech. Rep. 1176, 1177, MRC, Univ. of Wisconsin, Madison, Wisconsin.

Noble, B. (1973). Error analysis of collocation methods for solving Fredholm integral equations. In *Topics in Numerical Analysis* (J. J. H. Miller, ed.), pp. 211-232. Academic Press, London.

Nyström, E. J. (1930). Über die praktische Auflösung von Integralgleichungen mit Anwendungen auf Randwertaufgaben. *Acta Math.* 54, 185-204.

Oden, J. T., and Reddy, J. N. (1976). *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements.* Wiley (Interscience), New York.

Ojaiva, I. U., and Newman, M. (1970). Vibration modes of large structure by an automatic-matrix-reduction method. *AIAA J.* **8**, 1234-1239.

O'Leary, D. P., Stewart, G. W., and Vandergraft, J. S. (1979). Estimating the largest eigenvalue of a positive definite matrix. *Math. Comp.* **33**, 1289-1292.

Oliveira Aleixo, F. (1980). Collocation and residual correction. *Numer. Math.* **36**, 27-31.

Onega, R. J., and Karcher, K. E. (1976). Nonlinear dynamics of a pressurized water reactor core. *Nucl. Sci. Engrg.* **61**, 276-282.

Orbach, O., and Crowe, C. M. (1971). Convergence promotion in the simulation of chemical processes with recycle: The dominant eigenvalue method. *Canad. J. Chem. Engrg.* **49**, 509-513.

Ortega, J. M. (1972). *Numerical Analysis: A Second Course.* Academic Press, New York.

Ortega, J. M., and Rheinboldt, W. C. (1971). *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables.* Academic Press, New York.

Osborn, J. E. (1967). Approximation of the eigenvalues of a class of unbounded, nonselfadjoint operators. *SIAM J. Numer. Anal.* **4**, 45-54.

Osborn, J. E. (1975). Spectral approximation for compact operators. *Math. Comp.* **29**, 712-725.

Osborn, J. E. (1976). Approximation of the eigenvalues of a non selfadjoint operator arising in the study of the stability of stationary solutions of the Navier-Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **13**, 185-197.

Ostrowski, A. M. (1958-1959). On the convergence of the Rayleigh quotient iteration for the computation of the characteristic roots and vectors. *Arch. Rational Mech. Anal.* **1**, 233-241; **2**, 423-428; **3**, 325-340, 341-347, 472-481; **4**, 153-165.

Paige, C. C. (1970). Practical use of the symmetric Lanczos process with reorthogonalization. *BIT* **10** 183-195.

Paige, C. C. (1971). The computation of eigenvalues and eigenvectors of very large sparse matrices. Ph. D. Thesis. London Univ.

Paige, C. C. (1972). Computational variants of the Lanczos method for the eigenproblem. *J. Inst. Math. Appl.* **10**, 373-381.

Paige, C. C. (1974). Eigenvalues of perturbed Hermitian matrices. *Linear Algebra Appl.* **8**, 1-10.

Paige, C. C. (1980). Accuracy and effectiveness of the Lanczos algorithm for the symmetric eigenproblem. *Linear Algebra Appl.* **34**, 235-258.

Paige, C. C. (1981). Properties of numerical algorithms related to computing controllability. *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-26**, 130-138.

Paine, J. W., and Anderssen, R. S. (1980). Uuiformly valid approximation of eigenvalues of Sturm-Liouville problems in geophysics. *Geophys. J. R. Austral. Soc.* **63**, 441-465.

Palmer, T. W. (1969). Totally bounded sets of precompact linear operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* **20**, 101-106.

Papathomas, T., and Wing, O. (1976). Sparse Hessenberg reduction and the eigenvalue problem for large sparse matrices. *IEEE Trans. Circuits and Systems* **CAS-23**, 739-744.

Parlett, B. N. (1964). The origin and development of methods of LR type. *SIAM Rev.* **6**, 275-295.

Parlett, B. N. (1965). Convergence of the QR algorithm. *Numer. Math.* **7**, 187-193.

Parlett, B. N. (1968). Global convergence of the basic QR algorithm on Hessenberg matrices. *Math. Comp.* **22**, 803-817.

Parlett, B. N. (1973). Présentation géométrique des méthodes de calcul des valeurs propres. *Numer. Math.* **21**, 223-233.

Parlett, B. N. (1974). The Rayleigh quotient iteration and some generalizations for nonnormal matrices. *Math. Comp.* **28**, 679-693.

Parlett, B. N. (1980a). *The Symmetric Eigenvalue Problem.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Parlett, B. N. (1980b). A new look at the Lanczos algorithm for solving symmetric systems of linear equations. *Linear Algebra Appl.* **29**, 323-346.

Parlett, B. N. (1981). Comment résoudre $(K-\lambda M)z=0$? In *Méthodes Numériques pour les Sciences de l'Ingénieur* (E. Absi, R. Glowinski, P. Lascaux, and H. Veysseyre, eds.), Tome 1, pp. 97-106. Dunod, Paris.

Parlett, B. N., and Kahan, W. (1969). On the convergence of a practical QR algorithm. In *Information Processing* 68, Vol. 1, pp. 114-118. North-Holland Publ., Amsterdam.

Parlett, B. N., and Poole, W. G. (1973). A geometric theory for the QR, LU and power iterations. *SIAM J. Numer. Anal.* **10**, 389-412.

Parlett, B. N., and Reid, J. K. (1981). Tracking the progress of the Lanczos algorithm for large symmetric eigenproblems. *IMA J. Numer. Anal.* **2**, 135-156.

Parlett, B. N., and Reinsch, C. (1969). Balancing a matrix for calculation of eigenvalues and eigenvectors. *Numer. Math.* **13**, 293-304.

Parlett, B. N., and Scott, D. S. (1979). The Lanczos algorithm with selective orthogonalization. *Math. Comp.* **33**, 217, 238.

Parlett, B. N., and Taylor, D. (1981). A look ahead Lanczos algorithm

for unsymmetric matrices. Techn. Rep. PAM-43, Center for Pure and Appl. Math., Univ. of California, Berkeley.

Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **51**, 406-413.

Percell, P., and Wheeler, M. F. (1980). A C^1 finite element collocation method for elliptic equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 17, 605-622.

Pereyra, V., and Scherer, G. (1973). Eigenvalues of symmetric tridiagonal matrices: A fast, accurate and reliable algorithm. *J. Inst. Math. Appl.* **12**, 209-222.

Peters, G., and Wilkinson, J. H. (1970a). Eigenvectors of real and complex matrices by LR and QR triangularizations. *Numer. Math.* **16**, 181-204.

Peters, G., and Wilkinson, J. H. (1970b). The least squares problem and pseudoinverses. *Comput. J.* **13**, 309-316.

Peters, G., and Wilkinson, J. H. (1970c). $Ax=\lambda Bx$ and the generalized eigenproblem. *SIAM J. Numer. Anal.* **7**, 479-492.

Petryshyn, W. V. (1963). On a general iterative method for the approximate solution of linear operator equations. *Math. Comp.* 17, 1-10.

Petryshyn, W. V. (1967a). On the eigenvalue problem $Tu-\lambda Su=0$ with unbounded and non symmetric operators T and S. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **262**, 413-458.

Petryshyn, W. V. (1967b). Projection methods in nonlinear numerical functional analysis. *J. Math. Mech.* **17**, 353-372.

Petryshyn, W. V. (1968). On projectional-solvability and the Fredholm alternative for equations involving linear A-proper operators. *Arch. Rational Mech. Anal.* **30**, 270-284.

Pfeifer, E. (1979). Discrete convergence of multi-step methods in eigenvalue problems for ordinary second order differential equations. *U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys.* **19**, 64-73.

Phillips, J. L. (1972). The use of collocation as a projection method for solving linear operator equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **9**, 14-28.

Phillips, D. R. (1978). The existence of determining equations and their application for finding fixed points of nonlinear operators and error bounds for eigenvalues estimates of compact linear operators and finite matrices. Ph. D. Thesis, Univ. of Maryland, College Park.

Pitkäranta, J. (1979). On the differential properties of solutions to Fredholm equations with weakly singular kernels. *J. Inst. Math. Appl.* 24, 109-119.

Platzman, G. W. (1972a). North Atlantic ocean: Preliminary description of normal modes. *Science* **178**, 156-157.

Platzman, G. W. (1972b). Two dimensional free oscillations in natural basins. *J. Phys. Oceanogr.* **2**, 117-138.

Platzman, G. W. (1975). Normal modes of the Atlantic and Indian oceans. *J. Phys. Oceanogr.* 5, 201-221.

Platzman, G. W. (1978). Normal modes of the world ocean. Part I. Design of finite-element barotropic model. *J. Phys. Oceanogr.* 8, 323-343.

Platzman, G. W. (1979). A Kelvin wave in the eastern north Pacific ocean. *J. Geophys. Res.* **84**, 2525-2528.

Pokrzywa, A. (1978). On the asymptotical behaviour of spectra in the method of orthogonal projections. Rep. No. 161, Inst. Math., Polish Academy of Sciences.

Pokrzywa, A. (1979). Method of orthogonal projections and approximation of the spectrum of a bounded operator. *Studia Math.* **65**, 21-29.

Pokrzywa, A. (1980). Spectra of compressions of an operator with compact imaginary part *J. Operator Theory* 3, 151-158.

Polansky, O. E., and Gutman, I. (1979). On the calculation of the largest eigenvalue of molecular graph. *MATCH* 5, 149-159.

Polskii, N. I. (1962). Projection methods in applied mathematics. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **143**, 787-790 [*Soviet Math. Dolk.* **3**, 488-491].

Prenter, P. M. (1973). A collocation method for the numerical solution of integral equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **10**, 570- 581.

Prenter, P. M. (1975). *Splines and Variational Methods.* Wiley (Interscience), New York.

Prikazchikov, V. G. (1975). Strict estimate of convergence rate in an iterative method for calculation of eigenvalues. *U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.* **15**, 1330-1333.

Proskurowski, W. (1978). On the numerical solution of the eigenvalue problem of the Laplace operator by a capacity matrix method. *Computing* 20. 139-151.

Pruess, S. (1973a). Estimating the eigenvalues of Sturm-Liouville problems by approximating the differential equation. *SIAM J. Numer. Anal.* **10**, 55-68.

Pruess, S. (1973b) Solving linear boundary value problems by approximating the coefficients. *Math. Comp.* **27**, 551-561.

Pruess, S. (1975) High order approximation to Sturm-Liouville eigenvalues. *Numer. Math.* **24**, 241-247

Pták, V. (1976) Non discrete mathematical induction and iterative existence proofs. *Linear Algebra Appl.* **13**, 223-238.

Raffenetti, R. C. (1979). A simultaneous coordinate relaxation for large, sparse matrix eigenvalue problems. *J. Comput. Phys.* **32**, 403-419.

Raju, I. S., Rao, G. V., and Murthy, T. V. G. K. (1974). Eigenvalues and eigenvectors of large order banded matrices. *Comput. & Structures* **4**, 549-558.

Rakotch, E. (1975). Numerical solution for eigenvalues and eigenfunctions of a hermitian kernel and error estimates. *Math. Comp.* **29**, 794-805.

Rakotch, E. (1976). Numerical solution with large matrices of Fredholm's integral equation. *SIAM J. Numer. Anal.* **13**, 1-7.

Rakotch, E. (1978). Improved error estimates for numerical solutions of symmetric integral equations. *Math. Comp.* **32**, 399-404.

Rall, L. B. (1969). *Computational Solution of Nonlinear Operator Equations.* Wiley, New York.

Ramamurti, V. (1973). Application of simultaneous iteration method to torsional vibration problems. *J. Sound Vibr.* **29**, 331-340.

Ramaswamy, S. (1980). On the effectiveness of the Lanczos method for the solution of large eigenvalue problems. *J. Sound Vibr.* **73**, 405-418.

Ramsden, J. N., and Stoker, J. R. (1969). A semi-automatic method for reducing the size of vibration problems. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **1**, 339-349.

Rannacher, R. (1979). Nonconforming finite element methods for eigenvalue problems in linear plate theory. *Numer. Math.* **33**, 23-42.

Rao, C. R., and Mitra, S. K. (1971). *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications.* Wiley, New York.

Rappaz, J. (1977). Approximation of the spectrum of a noncompact operator given by the magnetohydrodynamic stability of a plasma. *Numer. Math.* **28**, 15-24.

Rappaz, J. (1982). Some properties on the stability related to the approximation of eigenvalue problems. In *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering* (R. Glowinski and J.-L. Lions, eds.), pp. 167-174. North-Holland Publ., Amsterdam.

Rayleigh, Lord (Strutt, J. W.) (1894-1896). *The Theory of Sound.* Vol. 1 and 2. Macmillan, London and New York

Rayleigh, Lord (1899). On the calculation of the frequency of vibration of a system in its gravest mode, with an example from hydrodynamics. *Philos. Mag.* **47**, 566-572.

Redont, P. (1979a). Application de la théorie de la perturbation des

opérateurs linéaires à l'obtention de bornes d'erreur sur les éléments propres et à leur calcul. Thèse Doct.-Ing., Univ. de Grenoble.

Redont, P. (1979b). Sur la convergence régulière d'opérateurs. Unpublished manuscript, Univ. de Grenoble.

Reed, M., and Simon, B. (1978). *Analysis of Operators.* Academic Press, New York.

Regińska, T. (1977). Approximate methods for solving differential equations on infinite intervals. *Apl. Mat.* **22**, 92-109.

Regińska, T. (1980). External approximation of eigenvalue problems. Rep. No. 229, Inst. Math., Polish Academy of Sciences.

Regińska, T. (1981). Eigenvalue approximation. In *Computational Mathematics.* Banach Center Publ., Vol. 10, Warzsaw.

Reid, J. K. (1976). A survey of sparse matrix computation. In *Sparse Matrix Techniques* (V. A. Barker, ed.), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 572, pp. 41-48. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Reid, J. K. (1980). A survey of sparse matrix computation. In *Electric Power Problems: The Mathematical Challenge* (A. M. Erisman, K. W. Neves, and M. H. Dwarakanath, eds.), pp. 41-69. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania.

Rellich, F. (1936-1942). Störungstheorie der Spektralzerlegung. *Math. Ann.* **113**, 600-619 (1936); **113**, 667-685 (1936); **116**, 555-570 (1939); **117**, 356-382 (1940); **118**, 462 484 (1942).

Rheinboldt, W. C. (1976). On measures of ill-conditioning for nonlinear equations. *Math. Comp.* **30**, 104-111.

Rheinboldt, W. C. (1980). On a theory of mesh-refinement processes. *SIAM J. Numer. Anal.* **17**, 766-778.

Rice, J. R. (1969). On the degree of convergence of non linear spline approximation. In *Approximation with Special Emphasis on Spline* Functions (I. J. Schoenberg, ed.), pp. 349-365. Academic Press, New York.

Richter, G. R. (1978). Superconvergence of piecewise polynomial Galerkin approximations, for Fredholm integral equations of the second kind. *Numer. Math.* **31**, 63-70.

Richtmyer, R. D., and Morton, K. W. (1967). *Difference Methods for Initial Value Problems*, 2nd ed. Wiley (Interscience), New York.

Riddell, I. J., and Delves, L. M. (1980). The comparison of routines for solving Fredholm integral equations of the second kind. *Comput. J.* **23**, 274-285.

Riehl, J. P., Diestler, D. J., and Wagner, A. F. (1974). Comparison of perturbative and direct numerical integration techniques for the

calculation of phase shifts for elastic scattering. *J. Comput. Phys.* **15**, 212-225.

Riesz, F., and Sz.-Nagy, B. (1955). *Lecons d'Analyse Fonctionnelle,* 3rd ed. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Ritz, W. (1909). Über eine neue Methode zur Lösung Gewisser Variationsprobleme der Mathematischen Physik. *J. Reine Angew. Math.* **135**, 1-61.

Rivlin, T. J. (1974). *The Chebychev Polynomials.* Wiley, New York.

Roark, A. L. (1971). On the eigenproblem for convolution integral equations. *Numer. Math.* **17**, 54-61.

Roark, A. L., and Shampine, L. F. (1965). On a paper of Roark and Wing. *Numer. Math.* **7**, 394-395.

Roark, A. L., and Wing, G. M. (1965). A method for computing the eigenvalues of certain integral equations. *Numer. Math.* **7**, 159-170.

Rodrigue, G. (1973). A gradient method for the matrix eigenvalue problem $Ax=\lambda Bx$. *Numer. Math.* **22**, 1-16.

Rothblum, U. G. (1975). Algebraic eigenspace of nonnegative matrices. *Linear Algebra Appl.* **12**, 281-292.

Ruge, J. (1981). Multigrid methods for differential eigenvalue and variational problems and multigrid simulation. Ph. D. Thesis, Math. Dept., Colorado State Univ., Fort Collins, Colorado.

Ruhe, A. (1970a). An algorithm for numerical determination of the structure of a general matrix. *BIT* **10**, 196-216.

Ruhe, A. (1970b). Perturbation bounds for means of eigenvalues and invariant subspaces *BIT* **10**, 343-354.

Ruhe, A. (1970c). Properties of a matrix with a very ill-conditioned eigenproblem. *Numer. Math.* **15**, 57-60.

Ruhe, A (1974a). SOR-methods for the eigenvalue problem with large sparse matrices. *Math. Comp.* **28**, 695-710.

Ruhe, A. (1974b). Iterative eigenvalue algorithms for large symmetric matrices. In *Eigenwerte Probleme* (L. Collatz, ed.), pp. 97-115. Birkhaeuser, Basel.

Ruhe, A. (1975). Iterative eigenvalue algorithms based on convergent splittings. *J. Comput. Phys.* **19**, 110-120.

Ruhe, A. (1977). Numerical methods for the solution of large sparse eigenvalue problems. In *Sparse Matrix Techniques* (V. A. Barker, ed.), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 572, pp. 130-184. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Ruhe, A. (1979a). Implementation aspects of band Lanczos algorithms for computation of eigenvalues of large sparse symmetric matrices. *Math. Comp.* **33**, 680-687.

Ruhe, A. (1979b). Eigenvalues in a APL environment, an algorithm based on Rayleigh quotient iteration. *APL. Quote Quad.* **10**, 29-30.

Ruhe, A. (1980). The relation between the Jacobi algorithm and inverse iteration and a Jacobi algorithm based on elementary reflections. *BIT* **20**, 88-96.

Ruhe, A., and Ericsson, T. (1980). The spectral transformation Lanczos method in the numerical solution of large, sparse, generalized symmetric eigenvalue problems. *Math. Comp.* 35, 1251-1268.

Ruhe, A., and Wiberg, T. (1972). The method of conjugate gradient used in inverse iteration. *BIT* **12**, 543-554.

Rump, S. M., and Böhm, H. (1982). Least significant bit evaluation of arithmetic expressions in single-precision. *Computing* (to appear).

Russel, R. D. (1974). Collocation for systems of boundary value problems. *Numer. Math.* **23**, 119-133.

Russel, R. D. (1977). A comparison of collocation and finite differences for two-point boundary value problems. *SIAM J. Numer. Anal.* **14**, 19-39.

Russel, R. D., and Shampine, L. F. (1972). A collocation method for boundary value problems. *Numer. Math.* **19**, 1-28.

Russel, R. D., and Varah, J. M. (1975). A comparison of global methods for linear two-point boundary value problems. *Math. Comp.* **29**, 1007-1019.

Rutishauser, H. (1958). Solution of eigenvalue problem with the LR-transformation. Appl. Math. Ser. Nat. Bur. Standards **49**, 47-81

Rutishauser, H. (1969). Computational aspects of F. L. Bauer's simultaneous iteration method. *Numer. Math.* **13**, 4-13.

Rutishauser, H. (1970). Simultaneous iteration method for symmetric matrices. *Numer. Math.* **16**, 205-223.

Saad, Y. (1975). Shifts of origin for the QR algorithm. In *Information Processing* 74, pp. 527-531. North-Holland Publ., Amsterdam.

Saad, Y. (1979a). Calcul de vecteurs propres d'une grande matrice creuse par la méthode de Lanczos. In *Méthodes Numériques pour les Sciences de l'Ingénieur* (E. Absi and R. Glowinski, eds.). Dunod. Paris.

Saad, Y. (1979b). Etude de la convergence du procédé d'Arnoldi pour le calcul des éléments propres de grandes matrices creuses non symétriques. Sém. Anal. Numér. No. 321, Univ. de Grenoble.

Saad, Y. (1980a). On the rates of convergence of the Lanczos and the block-Lanczos methods. *SIAM J. Numer. Anal.* **17**, 687-706.

Saad, Y. (1980b). Variations on Arnoldi's method for computing eigenelements of large unsymmetric matrices. *Linear Algebra Appl.* **34**, 269-295.

Saad, Y. (1981). Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems. *Math. Comp.* **37**, 105-126.

Saad, Y. (1982a). The Lanczos biorthogonalization algorithm and other oblique projection methods for solving large unsymmetric systems. *SIAM J. Numer. Anal.* **19**, 485-509.

Saad, Y. (1982b). Practical use of Krylov subspace methods for solving indefinite and unsymmetric linear systems. To appear in *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*

Saad, Y. (1982c). Projection methods for solving large sparse eigenvalue problems. Techn. Rep. No. 224, Computer Science, Yale Univ., Connecticut.

Sacks-Davis, R. (1975). Real norm-reducing Jacobi-type eigenvalue algorithm. *Austral. Comput. J.* **7**, 65-69.

Sakaguchi, R. L., and Tabarrok, B. (1970). Calculation of plate frequencies from complementary energy functions *Internal. J. Numer. Methods Engrg.* **2**, 283-293.

Sala, I. (1963). On the numerical solution of certain boundary value problems and eigenvalue problems of the 2nd and 4th order with the aid of integral equations. *Acta Polytech. Scand. Ser. D* **9**, 1-24.

Samet, A., Lermit, J., and Noh, K. (1975). On the intermediate eigenvalues of symmetric sparse matrices. *BIT* **15**, 185-191.

Schäfer, E. (1980). Spectral approximation for compact integral operators by degenerate kernel methods. *Numer. Funct. Anal. Optim.* **2**, 43-63.

Schippers, H. (1981). The automatic solution of Fredholm equation of the second kind. Techn. Rep., Stichting Math. Cent., Amsterdam.

Schlessinger, S. (1957). Approximating eigenvalues and eigenfunctions of symmetric kernels. *SIAM J. Appl. Math.* **5**, 1-14.

Schneider, C. (1979). Regularity of the solution of a class of weakly singular Fredholm integral equations of the second kind. *Integral Equations Operator Theory* **2**, 62-68.

Schneider, C. (1980). Produktintegration mit nichtäquidistanten Stützstellen. *Numer. Math.* **35**, 35-43.

Schneider, C. (1981). Product integration for weakly singular integral equations. *Math. Comp.* **36**, 207-213.

Schrödinger, E. (1926). Quantisierung als eigenwertproblem. IV. Störungtheorie mit Anwendung auf den Starkeffekt der Balmerlinien. *Ann. Physik* **80**, 437-490.

Schwarz, H. R. (1974a). The eigenvalue problem $(A\text{-}\lambda B)x=0$ for summetric matrices of high order. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **3**, 11-28.

Schwarz, H. R. (1974b). A method of coordinate overrelaxation for $(A-\lambda B)x=0$. *Numer. Math.* **23**, 135-151.

Schwarz, H. R. (1977). Two algorithms for treating $Ax=\lambda Bx$. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **12**, 181-199.

Scott, D. S. (1979). How to make the Lanczos algorithm converge slowly. *Math. Comp.* **33**, 239-247.

Scott, D. S. (1981a). Solving sparse symmetric generalized eigenvalue problems without factorization. *SIAM J. Numer. Anal.* **18**, 102-110.

Scott, D. S. (1981b). The Lanczos algorithm. In *Sparse Matrices and Their Uses* (I.S. Duff, ed.), pp. 139-159. Academic Press, New York.

Scott, R. (1976). Optimal L^{∞}-estimates for the finite element method on irregular meshes. *Math. Comp.* **30**, 681-697.

Sebe, T., and Nachamkin, J. (1969). Variational buildup of nuclear shell model bases. *Ann. Physics* **51**, 100-123.

Seneta, E. (1980). Computing the stationary distribution for infinite Markov chains. *Linear Algebra Appl.* **34**, 259-269.

Shavitt, I. (1970). Modification of Nesbet's algorithm for the iterative evaluation of eigenvalues and eigenvectors of large matrices *J. Comput. Phys.* **6**, 124-130.

Shavitt, I., Bender, C. F., Pipano, A., and Hosteny, R. P. (1973). The iterative calculation of several of the lowest or highest eigenvalues and corresponding eigenvectors of very large symmetric matrices. *J. Comput. Phys.* **11**, 90-108.

Simpson, A. (1973a). A generalization of Kron's eigenvalue procedure. *J. Sound Vibr.* **26**, 129-139.

Simpson, A. (1973b). Kron's method: a consequence of the minimization of the primitive Lagrangian in the presence of displacement constraints. *J. Sound Vibr.* **27**, 377-386.

Simpson, A. (1973c). Eigenvalue and vector sensitivities in Kron's method. *J. Sound Vibr.* **31**, 73-87.

Šindler, A. A. (1967). Certain theorems in the general theory of approximate methods of analysis and their application to the methods of collocation, moments and Galerkin. *Siberian Math. J.* **8**, 302-314.

Šindler, A. A. (1969). The rate of convergence of an enriched colloca-

tion method for ordinary differential equations. *Siberian Math. J.* **10**, 160-163.

Singh, S. R. (1976). Some convergence properties of the Bubnov-Galerkin method. *Pacific J. Math.* **65**, 217-221.

Sloan, I. H. (1976a). Convergence of degenerate-kernel methods. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **19**, 422-431.

Sloan, I. H. (1976b). Error analysis for a class of degenerate kernel methods. *Numer. Math.* **25**, 231-238.

Sloan, I. H. (1976c). Iterated Galerkin method for eigenvalue problems. *SIAM J. Numer. Anal.* **13**, 753-760.

Sloan, I. H. (1976d). Improvement by iteration for compact operator equations. *Math. Comp.* **30**, 758-764.

Sloan, I. H. (1978). On the numerical evaluation of singular integrals. *BIT* **19**, 91-102.

Sloan, I. H. (1980a). On choosing the points in product integration. *J. Math. Phys.* **21**, 1032-1039.

Sloan, I. H. (1980b). A review of numerical methods for Fredholm equations of the second kind. In *The Application and Numerical Solution of Integral Equations* (R. S. Anderssen, F. R. de Hoog, and M. A. Lukas, eds.), pp. 51-74. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn. The Netherlands.

Sloan, I. H. (1980c). The numerical solution of Fredholm equations of the second kind by polynomial interpolation. *J. Integral Equations* **2**, 265-279.

Sloan, I. H. (1981). Analysis of general quadrature methods for integral equations of the second kind. *Numer. Math.* **38**, 263-278.

Sloan, I. H. (1983). Superconvergence and the Galerkin method for integral equations of the second kind. In *Treatment of Integral Equations by Numerical Methods* (C. T. H. Baker and G. F. Miller, eds.), pp. 197-208, Academic Press, London.

Sloan, I. H., and Burn, B. J. (1979). Collocation with polynomials for integral equations of the second kind: a new approach to the theory. *J. Integral Equations* **1**, 77-94.

Sloan, I. H., Noussair, E., and Burn, B. J. (1979). Projection method for equations of the second kind. *J. Math. Anal. Appl.* **69**, 84-103.

Smith, B. T., Boyle, J. M., Garbow, B. S., Ikebe, Y., Klema, V. C., and Moler, C. B. (1976). *Matrix Eigensystem Routines — EISPACK Guide.* Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Smooke, M. D. (1978). Piecewise analytical perturbation series solutions of the radial Schrödinger equation. Ph. D. Thesis, Harvard Univ., Cambridge, Massachusetts.

Smooke, M. D. (1980a). Error estimates for piecewise analytical perturbation series solutions of the radial Schrödinger equation. I. One-dimensional case. Rep. SAND 80-8611, Sandia Livermore Lab., Livermore, California.

Smooke, M. D. (1980b). Error estimates for piecewise analytical perturbation series solutions of the radial Schrödinger equation. II. Multidimensional case. Rep. SAND 80-8610, Sandia Livermore Lab., Livermore California.

Sobolev, S. L. (1937). On a boundary problem for semi harmonic equations (in Russian). *Mat. Sb.* **2**, 467-500.

Sobolev, S. L. (1956). Some remarks on numerical solution of integral equations (in Russian). *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **20**, 413-436

Spence, A. (1975). On the convergence of the Nyström method for the integral equation eigenvalue problem. *Numer. Math.* **25**, 57-66

Spence, A. (1978-1979). Error bounds and estimates for eigenvalues of integral equations. *Numer. Math.* **29**, 133-147 (1978); **32**, 139-146 (1979).

Spence, A. (1979). Product integration for singular integrals and singular integral equations. In *Numerische Integration* (G. Hämmerlin, ed.), pp. 288-300. Birkhaeuser, Basel.

Spence, A., and Moore, G. (1980). A convergence analysis for turning points of nonlinear compact operator equations. In *Numerical Treatment of Integral Equations* (J. Albrecht and L. Collatz, eds.), pp. 203-212. Birkhaeuser, Basel.

Spence, D. A. (1972). An eigenvalue problem for elastic contact with finite friction. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **73**, 249-268.

Srinivasan, R. S., and Sankaran, S. (1975) Vibration of cantilever cylindrical shells *J. Sound. Vibr.* **40**, 425-430

Srivastava, B. P (1975) Calculation of bounds on the eigenvalue spectrum of anharmonic phonon collision operator. *Phys. Lett. A* **54**, 222-224.

Stetter, H. J. (1973). *Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Stetter, H. J. (1978). The defect correction principle and discretization methods. *Numer. Math.* **29**, 425-443.

Stewart. G. W. (1971). Error bounds for approximate invariant subspaces, of closed linear operators. *SIAM J. Numer. Anal.* **8**, 796-808.

Stewart, G. W. (1972). On the sensitivity of the eigenvalue problem $Ax=\lambda Bx$. *SIAM J. Numer. Anal.* **9**, 669-686.

Stewart, G. W. (1973a). *Introduction to Matrix Computations.* Academic Press, New York.

Stewart, G. W. (1973b). Error and perturbation bounds for subspaces associated with certain eigenvalue problems. *SIAM Rev.* **15**, 727-764.

Stewart, G. W. (1975a). The numerical treatment of large eigenvalue problems. In *Information Processing 74,* pp. 666-672. North-Holland Publ., Amsterdam.

Stewart, G. W. (1975b). The convergence of the method of conjugate gradients at isolated extreme points of the spectrum. *Numer. Math.* **24**, 85-93.

Stewart, G. W. (1975c). Gerschgorin theory for the generalized eigenvalue problem $Ax=\lambda Bx$. *Math. Comp.* **29**, 600-606.

Stewart, G. W. (1975d). Methods of simultaneous iteration for calculating eigenvectors of matrices. In *Topics in Numerical Analysis II* (J. J. H. Miller, ed.), pp. 185-196. Academic Press, New York.

Stewart, G. W. (1976a). Simultaneous iteration for computing invariant subspaces of non-Hermaian matrices. *Numer. Math.* **25**, 123-136.

Stewart, G. W. (1976b). A bibliographical tour of the large, sparse generalized eigenvalue problem. In *Sparse Matrix Computations* (J. R. Bunch and D. J. Rose, eds.), pp. 113-130. Academic Press, New York.

Stewart, G. W. (1979). Perturbation bounds for the definite generalized eigenvalue problem. *Linear Algebra Appl.* **23**, 69-85.

Stewart, W. J., and Jennings, A. (1981). A simultaneous iteration algorithm for real matrices. *ACM Trans. Math. Software* **7**, 184-198.

Stoer, J., and Bulirsch, R. (1980). *Introduction to Numerical Analysis.* Springer-Verlag, Berlin and New York.

Strakhovskaya, L. G. (1977). An iterative method for evaluating the first eigenvalue of an elliptic operator. *U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys.* **17**, 38-101.

Strang, G. (1972). Approximation in the finite element method. *Numer. Math.* **19**, 81-98.

Strang, G. (1976). *Linear Algebra and Its Applications.* Academic Press, New York.

Strang, G., and Fix, G. J. (1973). *An Analysis of the Finite Element Method.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Stroud, A. H. (1971). *Approximate Calculation of Multiple Integrals.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Strygin, V. V. (1973). Application of Bubnov-Galerkin method to find autooscillations (in Russian). *Prikl. Mat. Meh.* **37**, 1015-1019.

Strygin, V. V., and Cygankov, A. I. (1974). Application of collocation and difference method to find autooscillations of differential-difference equations (in Russian). *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **14**, 691-698.

Stummel, F. (1970). Diskrete Konvergenz linearer Operatoren. Part I. *Math. Ann.* **190**, 45-92.

Stummel, F. (1971). Diskrete Konvergenz linearer Operatoren Part II. *Math Z.* **120**, 231-264.

Stummel, F. (1972). Diskrete Konvergenz linearer Operatoren. Part III. In *Linear Operators and Approximation*, pp. 196-216. Birkhaeuser, Basel.

Stummel, F. (1973). Discrete convergence of mappings. In *Topics in Numerical Analysis* (J. J. H. Miller, ed.), pp. 285-310. Academic Press, New York.

Stummel, F. (1977). Approximation methods for eigenvalue problems in elliptic differential equations. In *Numerik und Anwendungen von Eigenwertaufgaben und Verzweigungsproblemen* (E. Bohl, L. Collatz, and K. P. Hadeler, eds.), pp. 133-165. Birkhaüser, Basel.

Stummel, F. (1980). Basic compactness properties of nonconforming and hybrid finite element spaces. *RAIRO Anal. Numér.* **14**, 81-115.

Swartz, B., and Wendroff, B. (1974). The relation between the Galerkin and collocation methods using smooth splines. *SIAM J. Numer. Anal.* **11**, 994-996.

Symm, H. J., and Wilkinson, J. H. (1980). Realistic bounds for a simple eigenvalue and its associated eigenvector. *Numer. Math.* **35**, 113-126

Symm, H. J., and Wilkinson, J. H. (1981). Error bounds for computed invariant subspaces. Res. Rep. No. 81-02, Angew. Math., Eidg. Techn Hochschule Zürich.

Szegö, G. (1975). *Orthogonal Polynomials*, Colloquium Publ. No. 23, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

Sz.-Nagy, B. (1946/47). Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert. *Comment. Math. Helv.* **19**, 347-366.

Sz.-Nagy, B. (1951). Perturbations des transformations linéaires fermées. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **14**, 125-137.

Sz.-Nagy, B., and Foias, C. (1967). Forme triangulaire d'une contraction et factorisation de la fonction caractéristique. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **28**, 201-212.

Sz.-Nagy, B., and Foias, C. (1970). *Harmonic analysis of operators on*

Hilbert space. Akadémiai Kiadó, Budapest and North-Holland Publ., Amsterdam.

Szyld, D. B., and Widlund, O. B. (1978). Applications of conjugate gradient type methods to eigenvalue calculations. Tech. Rep., Courant Inst., New York Univ.

Tamme, E. E. (1977). On regular convergence of difference approximations for Dirichlet problem (in Russian). *Eesti NSV Tead. Akad. Toimetised Füüs.-Mat.* **26**, 3-8.

Taylor, A. E. (1958). *Introduction to Functional Analysis.* Wiley, New York.

Temple, G. (1928). The computation of characteristic numbers and characteristic functions. *Proc. London Math. Soc.* **29**, 257-280.

Temple, G. (1952). The accuracy of Rayleigh's method of calculating the natural frequencies of vibrating systems. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **211**, 204-214.

Temple, G., and Bickley, W. G. (1933). *Rayleigh's Principle and Its Applications to Engineering.* Constable, London.

Tsunematsu, T., and Takeda, T. (1978). A new iterative method of solution of a large-scale generalized eigenvalue problem. *J. Comput. Phys.* **28**, 287-293.

Uebe, G., and Fisher, J. (1974). Computation of the eigenvalues of large econometric models. *Comput. and Oper. Res.* **1**, 313-339.

Underwood, R. (1975). An iterative block Lanczos method for the solution of large sparse symmetric eigenproblems. Ph. D. Thesis, Rep. STAN-CS-75-496, Comput. Sci. Dept., Stanford Univ., Stanford. California.

Urabe, M. A. (1967). Numerical solution of multi-point boundary value problems in Chebyshev series — Theory and the method. *Numer. Math.* **9**, 341-366.

Urabe, M. A. (1969). Numerical solution of boundary value problems in Chebyshev series — A method of computation and error estimation. In *Conference on the Numerical Solution of Differential Equations* (J. L. Morris, ed.), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 109, pp. 40-86. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Urabe, M. A. (1975). A posteriori componentwise error estimation of approximate solutions to non linear equations. In *Interval Mathematics* (K. Nickel, ed.), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 29, pp. 99-117. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Vainikko, G. M. (1964). Asymptotic error bounds for projection methods

in the eigenvalue problem. *U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys.* **4**, 9-36.

Vainikko, G. M. (1965a). On the convergence of Galerkin method (in Russian). *Tartu Riikl. Ül. Toimetised* **177**, 148-152.

Vainikko, G. M. (1965b). On the stability and convergence of the collocation method. *Differential Equations* **1**, 186-194.

Vainikko, G. M. (1966). The convergence of the collocation method for nonlinear differential equations. *U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys.* **6**, 35-42.

Vainikko, G. M. (1967a). Galerkin's perturbation method and the general theory of approximate methods for nonlinear equations (in Russian). *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **7**, 723-751.

Vainikko. G. M. (1967b). The rate of convergence of approximate methods in the problem of eigenvalues (in Russian). *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **7**, 977-987.

Vainikko, G. M. (1967c). Rapidity of convergence of approximation methods in the eigenvalue problem. *U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys.* **7**, 18-32.

Vainikko, G. M. (1968). On the convergence speed of the method of moments for ordinary differential equations (in Russian). *Sib. Mat. Ž.* **9**, 21-28.

Vainikko, G. M. (1969a). The compact approximation principle in the theory of approximation methods (in Russian). *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **9**, 739-761.

Vainikko, G. M. (1969b). A difference method for ordinary differential equations (in Russian). *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **9**, 1057-1074.

Vainikko, G. M. (1969c). The connection between mechanical quadrature and finite difference methods (in Russian. *Ž. Vyčisl. Mat. i. Mat. Fiz.* **9**, 259-270.

Vainikko, G. M. (1970a). On the rate of convergence of certain approximation methods of Galerkin type in an eigenvalue problem. *Amer. Math. Soc. Transl.* **36**, 249-259.

Vainikko, G. M. (1970b). On the convergence of collocation method for multidimensional integral equations (in Russian). *Tartu Riikl. Ül. Toimetised* **253**, 244-257.

Vainikko, G. M. (1971). On the stability of the collocation method (in Russian). *Tartu Riikl. Ül. Toimetised* **281**, 190-196.

Vainikko, G. M. (1974a). On the approximation of fixed points of compact operators (in Russian). *Tartu Riikl. Ül. Toimetised* **342**, 225-236.

Vainikko, G. M. (1974b). Discretely compact sequences (in Russian). *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **14**, 572-583.

Vainikko, G. M. (1975). Convergence of the difference method when seeking the periodic solutions of ordinary differential equations (in Russian). *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **15**, 87-100.

Vainikko, G. M. (1976a). *Analysis of Discretization Methods* (in Russian). Univ. of Tartu Publ., Estland.

Vainikko, G. M. (1976b). *Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden.* Teubner, Leipzig.

Vainikko, G. M. (1977a). Über die Konvergenz und Divergenz von Näherungsmethoden bei Eigenwertproblemen. *Math. Nachr.* **78**, 145-164.

Vainikko, G. M. (1977b). Über die Konvergenzbegriffe für lineare Operatoren in der Numerischen Mathematik. *Math. Nachr.* **78**, 165-183.

Vainikko, G. M. (1978a). Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem). *Nonlinear Anal., Theory, Method and Appl.* **2**, 647-687.

Vainikko, G. M. (1978b). Foundations of finite difference method for eigenvalue problems. In *The Use of Finite Element Method and Finite Difference Method Geophys.* (V. Bucha and H. Nedoma, eds.), pp. 173-192. Czech. Acad. Sci., Prague.

Vainikko, G. M., and Karma, O. O. (1974a). The convergence of approximate methods for solving linear and nonlinear operator equations (in Russian). *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **14**, 828-837.

Vainikko, G. M., and Karma, O. O. (1974b). The convergence rate of approximate methods in the eigenvalue problem when the parameter appears nonlinearly (in Russian). *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* 14, 1393-1408.

Vainikko, G. M., and Pedas, A. (1971). On solution of integral equations with logarithmical singularities by quadrature formulae methods (in Russian). *Tartu Riikl. Ül. Toimetised* **281**, 201-210.

Vainikko, G. M., and Pedas, A. (1981). The properties of solutions of weakly singular integral equations. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* 22, 424-434.

Vainikko, G. M., and Tamme, E. E. (1976). Convergence of difference methods in the periodic solution problem for equations of elliptic type (in Russian). *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **16**, 652-664.

Vainikko, G. M., and Uba, P. (1981). A piecewise polynomial approximation to the solution of an integral equation with weakly singular kernel. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **22**, 435-442.

Vainikko, G. M., and Umanskii, Y. B. (1968). Regular operators. *Funct. Anal. Appl.* **2**, 175-176.

Vandergraft, J. S. (1971). Generalized Rayleigh method with applications to finding eigenvalues of large matrices. *Linear Algebra Appl.* **4**, 363-368.

Van Dooren, P. M. (1981). The generalized eigenstructure problem in linear system theory. *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-26**, 111-129.

Van Kempen, H. P. M. (1966). On the convergence of the classical Jacobi method for real symmetric matrices with non distinct eigenvalues. *Numer. Math.* **9**, 11-18 and 19-22.

Van Loan, C. F. (1975). A general matrix eigenvalue algorithm. *SIAM J. Numer. Anal.* **12**, 819-834.

Van Veldhuizen, M. (1976). A refinement process for collocation approximations. *Numer. Math.* **26**, 397-407.

Varah, J. M. (1968a). The calculation of the eigenvectors of a general complex matrix by inverse iteration. *Math. Comp.* **22**, 785-791.

Varah, J. M. (1968b). Rigorous machine bounds for the eigensystem of a general complex matrix. *Math. Comp.* **22**, 793-801.

Varah, J. M. (1970). Computing invariant subspaces of a general matrix when the eigensystem is poorly conditioned. *Math, Comp.* **24**, 137-149.

Varah, J. M. (1972). Invariant subspace perturbations for a nonnormal matrix. In *Information Processing 71*, Vol. 2, pp. 1251-1253. North-Holland Publ., Amsterdam.

Varah, J. M. (1973). On the numerical solution of ill-conditioned linear systems with applications to ill-posed problems. *SIAM J. Numer. Anal.* **10**, 257-1267.

Varga, R. S. (1962). *Matrix Iterative Analysis.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Varga, R. S. (1965). Minimal Gershgorin sets. *Pacific J. Math.* **15**, 719-729.

Vorobyev, Y. V. (1965). *Method of Moments in Applied Mathematics.* Gordon & Breach, New York.

Wachpress, E. L. (1966). *Iterative solution of elliptic systems and application to the neutron diffusion equations of reactor physics.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Wahba, G. (1973). Convergence rates for certain approximate solutions to Fredholm integral equations of the first kind. *J. Approx. Theory* **7**, 167-185.

Wahba, G. (1976). On the optimal choice of nodes in the collocation

projection method for solving linear operator equations. *J. Approx. Theory* **16**, 175-186.

Wang, J. Y. (1976). On the numerical computation of eigenvalues and eigenfunctions of compact integral operators using spline functions. *J. Inst. Math. Appl.* **18**, 177-188.

Ward, R. C. (1976). The QR algorithm and Hyman's method on vector computers. *Math. Comp.* **30**, 132-142.

Ward, R. C., and Gray, L. J. (1978a). Eigensystem computation for skew-symmetric matrices and a class of symmetric matrices. *ACM Trans. Math. Software* **4**, 278-285.

Ward, R. C., and Gray, L. J. (1978b). Algorithm 530, an algorithm for computing the eigensystem of skew-symmetric matrices and a class of symmetric matrices. *ACM Trans. Math. Software* **4**, 286-289.

Watkins, D. S. (1982). Understanding the QR algorithm. *SIAM Rev.* **24**, 427-440.

Weinberger, H. F. (1961). Error bounds in the Rayleigh-Ritz approximation of eigenvectors. In *Part. Diff. Eq. Cont. Mech.* (R. Langer, ed.), pp. 39-53. The Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wisconsin.

Weinberger, H. F. (1974). *Variational Methods for Eigenvalue Approximations.* SIAM, Philadelphia, Pennsylvania.

Weinstein, A. (1937). *Etude des spectres des équations aux dérivées partielles de la théorie des plaques élastiques.* Mémoire de Sci. Math. 88, Gautiher-Villars, Paris.

Weinstein, A. (1963). The intermediate prolbem and the maximum-minimum theory of eigenvalues. *J. Math. Mech.* **12**, 235-245.

Weinstein, A., and Stenger, W. (1972). *Methods of Intermediate Problems for Eigenvalues: Theory and Ramifications.* Academic Press, New York.

Weiss, R. (1974). The application of implicit Runge-Kutta and collocation methods to boundary value problems. *Math. Comp.* **28**, 449-646.

Wendland, W. L. (1980). On Galerkin collocation methods for integral equations of elliptic boundary value problems. In *Numerical Treatment of Integral Equations* (J. Albrecht and L. Collatz, eds.), pp. 244-275. Birkhaeuser, Basel.

Wendland, W. L., Stephan, E., and Hsiao, G. C. (1979). On the integral equation method for the plane mixed boundary value problem of the laplacian. *Math. Meth. in Appl. Sc.* **1**, 265-321.

Widlund, O. (1977). On best error bounds for approximation by piecewise polynomial functions. *Numer. Math.* **27**, 327-338.

Widlund, O. (1978). A Lanczos method for a class of non symmetric systems of linear equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **15**, 801-812.

Wielandt, H. (1956) Error bounds for eigenvalues of symmetric integral equations. *Proc. Sympos. Appl. Math. 6th., Providence.* Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

Wielandt, H. (1967). *Topics in the Theory of Matrices.* Univ of Wisconsin Press, Madison, Wisconsin.

Wilkinson, J. H. (1962). Note on the quadratic convergence of the cyclic Jacobi process. *Numer. Math.* **4**, 296-300.

Wilkinson, J. H. (1965). *The Algebraic Eigenvalue Problem.* Oxford Univ. Press (Clarendon), London and New York.

Wilkinson, J. H. (1968). Global convergence of tridiagonal QR algorithm with origin shifts. *Linear Algebra Appl.* **1**, 409-420.

Wilkinson, J. H. (1969). Global convergence of QR algorithm. In *Information Processing 68*, Vol. 1, pp. 130-133. North-Holland Publ., Amsterdam

Wilkinson, J. H., and Reinsch, C. H. (1971). *Handbook for Automatic Computation. Linear Algebra.* Vol. 2. Springer-Verlag, Berlin and New York

Wing, G. M. (1965). On a method for obtaining bounds on the eigenvalues of certain integral equations. *J. Math. Anal. Appl.* **11**, 160-175.

Wittenbrink, K. A. (1973). High order projection methods of moment- and collocation-type for nonlinear boundary value problems. *Computing* **11**, 255-274.

Wolfe, M. A. (1969). The numerical solution of non-singular integral and integro-differential equations by iteration with Chebyshev series. *Comput. J.* **12**, 193-196.

Wright, G. C., and Miles, G. A. (1971). An economical method for determining the smallest eigenvalues of large linear systems. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **3**, 25-33.

Yamamoto, T. (1979). Componentwise error estimates for approximate solutions of non linear equations. *Inform. Process.* **2**, 121-126.

Yamamoto, T. (1980). Error bounds for computed eigenvalues and eigenvectors. *Numer. Math.* **34**, 189-199.

Yamamoto, Y., and Ohtsubo, H. (1976). Subspace iteration accelerated by using Chebyshev polynomials for eigenvalue problems with symmetric matrices. Internat. J. Numer. Methods Engrg. **10**. 935-944

Yosida, K. (1960). *Lectures on Differential and Integral Equations.* Wiley (Interscience), New York.

Yosida, K. (1965). *Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin and New York.

Young, A. (1954). The application of approximate product integration to the numerical solution of integral equations. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **224**, 561-573.

Zaanen, A. C. (1960). *Linear Analysis*. North-Holland Publ., Amsterdam.

Zabreiko, P. P., Koshelev, A. I., Krasnoselskii, M. A., Mikhlin, S. G., Rakovshchik, L. S., and Stetsenko, V. Ya. (1975). *Integral. Equations — A Reference Textbook*. Noordhoff Int., Leyden, The Netherlands.

Zarubin, A. G. (1979). The speed of convergence of projection methods for linear equations. *U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys.* **19**, 265-272.

Zerbi, G., Pieseri, L., and Cabassi, F. (1971). Vibrational spectrum of chain molecules with conformational disorder: polyethylene. *Molecular Phys.* **22**, 241-256.

Zienkiewicz, O. C. (1977). *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, New York.

Zlámal, M. (1978). Superconvergence and reduced integration in the finite element method. *Math. Comp.* **32**, 663-685.

Zlatev, Z. (1982). Use of iterative refinement in the solution of sparse linear systems. *SIAM J. Numer. Anal.* **19**, 381-399.

Zwart, P. B. (1973). Multivariate splines with nondegenerate partitions. *SIAM J. Numer. Anal.* **10**, 665-673.

习 题 解 答

第一章

1.1 $\xi_1=(x, y_1)=\frac{5}{4}$, $\xi_2=(x, y_2)=\frac{3}{4}$.

1.2 $1=\|I\|=\|AA^{-1}\|\leqslant\|A\|\|A^{-1}\|=K(A)$.

1.3 $\|Qx\|_2^2=(Qx)^HQx=x^HQ^HQx=x^Hx=\|x\|_2^2$

由于 $Q^HQ=I$. 因为 $\|Qx\|_2=\|x\|_2$，我们有 $\|Q\|_2=1$. 但Q^H也是酉阵，所以 $\|Q^H\|=1$.

1.4 因为$P^2=P$; $P(I-P)x=Px-P^2x=0$, $(I-P)^2=I-2P+P^2=I-P$. 因此$(I-P)x\in W$且$\mathrm{Im}(I-P)\subset W$. 若$Px=0$，则$(I-P)x=x$，因此$x\in\mathrm{Im}(I-P)$; 故$W=\mathrm{Im}(I-P)$. $(I-P)Px=Px-P^2x=0$，所以$M\subset\mathrm{Ker}(I-P)$. 但若$(I-P)x=0$，则$Px=x$，故$x\in M$; 于是 $M=\mathrm{Ker}(I-P)$.

1.5 $(P^HP^Hx, y)=(P^Hx, Py)=(x, P^2y)=(x, Py)=(P^Hx, y)$，故$(P^H)^2=P^H$. 对任何方阵$A$，$\mathrm{Ker}A^H=(\mathrm{Im}A)^\perp$且$\mathrm{Im}A^H=(\mathrm{Ker}A^H)^\perp$.

1.6 若$P=P^H$，则$(x-Px,Px)=(P^Hx-P^HPx, x)=(Px-P^2x, x)=(Px-Px, x)=0$，于是$P$是正交投影. 反之，若$P$是正交的，$\mathrm{Im}P=(\mathrm{Ker}P)^\perp=\mathrm{Im}P^H$且$\mathrm{Ker}P=(\mathrm{Im}P)^\perp=\mathrm{Ker}P^H$，于是$P=P^H$.

1.7 对$K=1$，$A\varphi=\lambda\varphi$成立. 若$A^{k-1}\varphi=\lambda^{k-1}\varphi$，则$A^k\varphi=A(A^{k-1}, \varphi)=A(\lambda^{k-1}\varphi)=\lambda^{k-1}A\varphi=\lambda^k\varphi$.

1.8 设$\lambda\in\sigma(P)$; 则$P\varphi=\lambda\varphi$对某些$\varphi\neq 0$，于是$P^2\varphi=\lambda^2\varphi=P\varphi=\lambda\varphi$; 因此$\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)=0$.

1.9　若$D^k=0$，则D不是正则的，因此$0\in\sigma(D)$. 设$\lambda\in\sigma(D)$；则$D\varphi=\lambda\varphi$对某些$\varphi\neq0$，且$D^k\varphi=\lambda^k\varphi=0$，故$\sigma(D)=\{0\}$及$r_\sigma(D)=0$.

1.10　若$Q\varphi=\lambda\varphi$且$\varphi^H\varphi=1$，则$1=\|\varphi\|_2^2=\|Q\varphi\|_2^2=|\lambda|^2\|\varphi\|_2^2=|\lambda|^2$. 因此$r_\sigma(Q)=1$.

1.11　设$\lambda\in\sigma(A)$是使$|\lambda|=r_\sigma(A)$，则$\|A\varphi\|=\|\lambda\varphi\|=|\lambda|\|\varphi\|=r_\sigma(A)\|\varphi\|$，$\varphi$是关于$\lambda$的本征向量. 于是$\varphi\neq0$，且

$$r_\sigma(A)=\|A\varphi\|/\|\varphi\|\leqslant\|A\|.$$

1.12　$A\varphi=\lambda\varphi$，$\varphi^HA\varphi=\lambda\varphi^H\varphi$，由于$\varphi\neq0$，所以$\lambda=\varphi^HA\varphi/\varphi^H\varphi$.

1.13　若$A^H=A$，则$(\varphi^HA\varphi)^H=\varphi^HA\varphi$，故$\varphi^HA\varphi\in\mathbb{R}$.

1.14　若$A\varphi_1=\lambda_1\varphi_1$，$A^H\psi_2=\overline{\lambda}_2\psi_2$，且$\lambda_1\neq\lambda_2$，于是$\psi_2^HA\varphi_1=\lambda_2\psi_2^H\varphi_1=\lambda_1\psi_2^H\varphi_1$，于是$(\lambda_1-\lambda_2)(\varphi_1,\psi_2)=0$；因此$\varphi_1\perp\psi_2$. 若$A^H=A$，则$\psi_2=\varphi_2$是关于$\lambda_2$的本征向量.

1.15　N个互异的本征值蕴涵了有N个线性无关的本征向量. 故A可对角化.

1.16　对$N=1$为真. 假设对$N=n-1$为真. 设A是$n\times n$ Hermite矩阵，$\lambda\in\sigma(A)$，且φ是酉本征向量. 设U是$n\times(n-1)$矩阵，其列是正交的且属于$\{\varphi\}^\perp$. 于是$(xU)^H(xU)=I$；因此$U^Hx=0$且$x^HU=0$. 我们有

$$(xU)^HA(xU)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & U^HAU\end{pmatrix}.$$

但U^HAU是$(n-1)\times(n-1)$Hermite矩阵.

1.17　存在$N=\Sigma_{i=1}^k m_i$个线性无关的本征向量.

1.18　对任何正交投影P，$\|x-Px\|_2^2+\|Px\|_2^2=\|x\|_2^2$，因此$\|Px\|_2\leqslant\|x\|_2$. 对$x\in\operatorname{Im}P$，$Px=x$，因此$\|P\|=1$. 若$A$

是 Hermite 矩阵，两个相应于不同本征值的本征向量是正交的。因此 $i \neq j \Rightarrow M_i \perp M_j$ 且 $\mathbb{C}^N = \oplus_{i=1}^{k} M_i$。这便证明了 $M_i^{\perp} = \oplus_{j \neq i} M_j$。

1.19　设 $\{\varphi, \varphi_2, \cdots, \varphi_N\}$ 是右本征向量且 $\{\psi, \psi_2, \cdots, \psi_N\}$ 是左本征向量。由于 $\psi \perp \varphi_i$ 对 $i = 2, \cdots, N$，我们得 $\mathrm{Ker}\,P = \{\psi\}^{\perp}$，因此 $P\xi = \lambda(\xi)\varphi$，这里 λ 是线性泛函使 $\lambda(\varphi) = 1$ 且当 $\xi \perp \psi$，$\lambda(\xi) = 0$，故 $\lambda(\xi) = \alpha(\xi, \psi)$ 且 $1 = \lambda(\varphi) = \alpha(\varphi, \psi) = \alpha$。我们得到 $P\xi = (\xi, \psi)\varphi = (\psi^H\xi)\varphi$. 因此 $\|P\xi\|_2 = |\psi^H\xi|\,\|\varphi\|_2 = |\psi^H\xi| \leqslant \|\psi\|_2\|\xi\|_2$，故 $\|P\|_2 \leqslant \|\psi\|_2$。但 $\|P\psi\|_2 = \|\psi^H\psi\varphi\|_2 = \|\psi\|_2^2$，故 $\|P\|_2 = \|\psi\|_2$。同时 $1 = |\psi^H\varphi| \leqslant \|\psi\|_2\|\varphi\|_2 = \|\psi\|_2$。最后，$P\xi = (\psi^H\xi)\varphi = \varphi(\psi^H\xi) = (\varphi\psi^H)\xi$，这表明 $\varphi\psi^H$ 是 P 的标准阵。

1.20　设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ 是 A 的线性无关的本征向量，且设 $V = (\varphi_1, \cdots, \varphi_N)$。$V^{H-1}$ 的列是 A^H 的 N 个线性无关的本征向量。P_i^H 是 $\mathrm{Ker}(A^H - \overline{\lambda}_i I)$ 上的投影且平行于 $\oplus_{j \neq i}\mathrm{Ker}(A^H - \overline{\lambda}_j I)$。$\{\overline{\lambda}_i\}$ 是 A^H 的本征值。

1.21　设 $\varphi = \Sigma_{i \notin I}\alpha_i\varphi_i$，则 $(\varphi, \psi_j) = 0$，$j \in I$，因此 $\varphi \in \{\psi_i;\ i \in I\}^{\perp}$。现设

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\varphi_i \in \{\psi_i;\ i \in I\}^{\perp}.$$

于是 $0 = (\varphi, \psi_j) = \alpha_j$，$j \in I$。因此 $\varphi = \Sigma_{i \notin I}\alpha_i\varphi_i$。

$$P\left(\sum_{j \in I}\alpha_j\varphi_j\right) = \sum_{i \in I}\left[\psi_i^H\sum_{j \in I}\alpha_j\varphi_j\right]\varphi_i$$

$$= \sum_{i, j \in I}\alpha_j\psi_i^H\varphi_j\varphi_i = \sum_{i, j \in I}\alpha_j\delta_{ij}\varphi_i = \sum_{j \in I}\alpha_j\varphi_j;$$

$$P\left(\sum_{j \notin I}\alpha_j\varphi_j\right) = \sum_{i \in I, j \notin I}\alpha_j(\psi_i^H\varphi_j)\varphi_i = 0,$$

$$P^{\xi}=\left(\sum_{i\in I}\varphi_i\psi_i^H\right)\xi.$$

1.22 设A适合$AA^H=A^HA$，且$a_{ij}=0$，对$i>j$. 在位置i，j上的元与在AA^H和A^HA中相应元相等；于是$\Sigma_{k=1}^N a_{ik}\overline{a}_{jk}=\Sigma_{k=1}^N\overline{a}_{ki}a_{kj}$. 当$i=j$，我们得到$\Sigma_{k=1}^N|a_{ik}|^2=\Sigma_{k=1}^i|a_{ki}|^2$. 对$i=1$，$|a_{11}|^2=\Sigma_{k=1}^N|a_{ik}|^2$，因此$a_{ik}=0$，$k>1$. 设$a_{ik}=0$，对$k>1$且$1\leqslant i\leqslant j-1$成立. 当$i=j$，$|a_{jj}|^2=\Sigma_{k=j}^N|a_{jk}|^2$，因此对$k>1$，$a_{jk}=0$.

1.23 若A是正规的，取单位矩阵Q使$T=Q^HAQ$是上三角的. 则A的正规性使得$QTT^HQ^H=QT^HTQ^H$所以$TT^H=T^HT$且T一定是对角的. 反之，若D是对角的，Q是酉矩阵；且$A=QDQ^H$，于是$D^HD=DD^H$，且$A^HA=QD^HDQ^H=QDD^HQ^H=AA^H$.

1.24 设$D=(\mu_i\delta_{ij})$且Q是酉矩阵使得$A=QDQ^H$. $\{\mu_i\}$是A的本征值. $\|A\|_2=\|QDQ^H\|_2=\|D\|_2=\max_i|\mu_i|=r_\sigma(A)$.

1.25 若$A=0$，则A是幂零的. 若A是幂零的，$r_\sigma(A)=0$；但A是正规的，$r_\sigma(A)=\|A\|_2$，因此$\|A\|_2=0$；$A=0$.

1.26 对任何矩阵A，$\|A\|_2^2=\max_{\|x\|_2=1}x^HA^HAx$. A^HA是Hermite矩阵，它酉相似于对角阵$D=(\eta_i\delta_{ij})$，这里$\{\eta_i\}$是A^HA的本征值，故$\|A\|_2^2=\max_{\|x\|_2=1}x^HQDQ^Hx=\max_{\|y\|_2=1}y^HDy=\max_i|\eta_i|=r_\sigma(A^HA)$.

1.27 本征多项式为$P(\lambda)=(\lambda-1)^3$. 相应于$\lambda=1$的本征向量为$\varphi_1=(0,1,1)^T$，$\varphi_2=(1,1,0)^T$. 主向量：$\varphi_3=(0,0,1)^T$. Jordan 型为：

$$J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

1.28 设φ为相应于λ_i的本征向量，且φ_1，…，φ_p为主

向量，由此φ：$(A-\lambda_i I)\varphi_1=\varphi$，$(A-\lambda_i I)\varphi_2=\varphi_1$，等等。于是$(A-\lambda_i I)^j\varphi_j=\varphi$，$1\leqslant j\leqslant p$。由于$(A-\lambda_i I)^{l_i}\varphi_j=0$，$j=1,\cdots,p$，得$p\leqslant l_i-1$。另一方面，相应于$\lambda_i$有$g_i$个线性无关的本征向量。$J_i$的第一列为$\lambda_i e_1$（$e_1$是$m_i$维的典范化向量），于是得$J_i$的上对角处有$g_i-1$个零.

1.29 设$\{\varphi_1,\cdots,\varphi_N\}$是$A$的Jordan基，$V=(\varphi_1,\cdots,\varphi_N)$，$J=V^{-1}AV$。可证$A^n=VJ^nV^{-1}$，且由于

$$J=\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k\end{pmatrix},\quad J^n=\begin{pmatrix}J_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & J_k^n\end{pmatrix}.$$

此外，对每一块

$$J_i^n=\begin{pmatrix}J_{i1}^n & & \\ & \ddots & \\ & & J_{ig_i}^n\end{pmatrix},$$

其中

$$J_{ij}=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}=\lambda_i I+N$$

其中N是幂零的，$N^{l_i}=0$。$J_{ij}^n=\Sigma_{k=0}^n C_n^k\lambda_i^{n-k}N^k=\Sigma_{k=0}^{l_i}C_n^k\lambda_i^{n-k}N^k$。对固定的$k$，序列$S_n:=C_n^k\lambda_i^{n-k}$满足$\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}/S_n)=\lambda_i$，于是$r_\sigma(A)<1$蕴涵$\lim_{n\to\infty}A^n=0$.反之，若$\lim_{n\to\infty}A^n=0$。，设$\lambda$，$\varphi$为$A$的本征值，$\|\varphi\|=1$，则$|\lambda|^n=\|\lambda^n\varphi\|=\|A^n\varphi\|\leqslant\|A^n\|\to 0$，$n\to\infty$，所以$|\lambda|<1$。

1.30 $r_\sigma(A^n)=\max_i|\lambda_i^n|=(\max_i|\lambda_i|)^n=(r_\sigma(A))^n\leqslant\|A^n\|$。设$A_\varepsilon:=(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{-1}A$，则$r_\sigma(A_\varepsilon)<1$，且$\lim_{n\to\infty}A_\varepsilon^n=0$。对充分大的$n$，$\|A_\varepsilon^n\|<\varepsilon$，$\|A^n\|^{1/n}<\varepsilon^{1/n}(r_\sigma(A)+\varepsilon)$；因此$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}\leqslant r_\sigma(A)$。

1.31 设λ为A的本征值，其代数重数为m，几何重数为g。于是相应于λ的Jordan块J_λ有m行和g块。设p_i为第i

块的列数（$1\leqslant i\leqslant g$）。$\Sigma_{i=1}^{g}p_i=m$。设n_{ij}为第i块的第j列的指标，（$1\leqslant i\leqslant g$，$1\leqslant j\leqslant p_i$），使得$n_ip_i+1=n_{i+1,1}$，$1\leqslant i\leqslant g-1$，我们知道：$p_i\leqslant l$，$1\leqslant i\leqslant g$，这里$l$为$\lambda$的陡度。$\varphi_{n_{i1}}$，$i=1,\cdots,g$为本征向量，$\varphi_{n_{ij}}$，$i=1,\cdots,g$，$j=2,\cdots,p_i$，为相应于$\lambda$的主向量。于是有$A\varphi_{n_{i1}}=\lambda\varphi_{n_{i1}}$，$A\varphi_{n_{ij}}=\lambda\varphi_{n_j}+\varphi_{n_i,j-1}$，$2\leqslant j\leqslant P_i$。$P(\Sigma_1^N a_k\varphi_k)=\Sigma_{i=1}^{g}\Sigma_{j=n_{i1}}^{n_{i}p_i}a_j\varphi_j$，所以对$x=\Sigma_1^N a_k\varphi_k\in\mathbb{C}^N$，$APx=\lambda Px+Dx$，这里$Dx=\Sigma_{i=1}^{g}\Sigma_{j=n_{i2}}^{n_ip_i}a_j\varphi_{j-1}$，由于$Apx\in M$，$PAPx=APx=\lambda Px+Dx$。注意到若$k\notin\{n_{ij}; 1\leqslant i\leqslant g, 2\leqslant j\leqslant P_i\}$，则$D\varphi_k=0$，$D\varphi_{n_lk}=\varphi_{n_l,k-1}$，$2\leqslant k\leqslant p_l$，$1\leqslant l\leqslant g$。例如$D\varphi_{n_{i1}}=0$，$1\leqslant i\leqslant g$，且

$$D^r\varphi_{n_lk}=\begin{cases}0 & 1\leqslant k\leqslant r\\ \varphi_{n_l,k-r} & r\leqslant k\leqslant P_l\end{cases}$$

于是$D^{p_l}\varphi_{n_lk}=0$，$1\leqslant k\leqslant P_l$，$1\leqslant l\leqslant g$，且由于$\max_{1\leqslant i\leqslant g}p_i\leqslant l$，所以$D^l=0$。我们已证明了若$\lambda_1$，…，$\lambda_k$是$A$的不同的本征值，若$P_1,\cdots,P_k$是相应的谱投影，则$AP_i=P_iAP_i=\lambda_iP_i+D_i$，这里$D_i^{l_i}=0$。易见$P_iP_j=\delta_{ij}P_i$且$\Sigma_1^kP_i=I$对$AP_i=\lambda_iP_i+D$关于$i=1,\cdots,k$求和，得$A=\Sigma_1^k(\lambda_iP_i+D_i)$。于是$P(\Sigma_1^Na_k\varphi_k)=\Sigma_{k\in T}a_k\varphi_k$，$PA(\Sigma_1^Na_k\varphi_k)=\Sigma_{k\in T}a_kA\varphi_k=A(\Sigma_{k\in T}a_k\varphi_k)=AP(\Sigma_1^Na_k\varphi_k)$这里$T:=\{n_{ij}; 1\leqslant i\leqslant g, 1\leqslant j\leqslant p_i\}$。

1.32　若$k\notin T$，$D\varphi_k=0$，$D\varphi_{n_lk}=\varphi_{n_lk-1}$，$1\leqslant l\leqslant g$，$2\leqslant k\leqslant p_l$。若$P'$为相应于不等于$\lambda$的本征值的谱投影，则$P'D=0$，$DP'=0$。但$PD=DP=D$，故一般地有$D_iP_j=P_jD_i=\delta_{ij}D_i$。同时，若$D'$是相应于不等于$\lambda$的本征值的幂零阵，则$\mathrm{Im}D'$由除去$\varphi_k$，$k\in T$的基向量张成，由于$D\varphi_k=0$，$k\notin T$，我们有$DD'=0$。

1.33 $A=\Sigma_1^k(\lambda_j P_j+D_j)$，$\Sigma_1^k P_j=I$，于是 $(A-\lambda_i I)=\Sigma_{j\neq i}(\lambda_j-\lambda_i)P_j+\Sigma_1^k D_j$． $(A-\lambda_i I)^{l_i}=\Sigma_{j\neq i}(\lambda_j-\lambda_i)P_j+\Sigma_{j\neq i}\Sigma_{l=0}^{l_i-1}C_{l_i}^{l}(\lambda_j-\lambda_i)^{l}D_j^{l_i-l}$，因为$P_j^{l_i}=P_j$，$D_j^{l_i}=0$，$P_jD_i=D_iP_j=\delta_{ij}D_j$，$D_iD_j=\delta_{ij}D_j^2$，所以$\mathrm{Im}(A-\lambda_i I)^{l_i}\subseteq\oplus_{j\neq i}M_j$．但$M_i=\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)^{l_i}$，所以$\mathbb{C}^N=M_i\oplus\mathrm{Im}(A-\lambda_i I)^{l_i}$且$\mathbb{C}^N=\oplus_{j=1}^k M_j$，$\mathrm{Im}(A-\lambda_i I)^{l_i}=\oplus_{j\neq i}M_j$．

1.34 类似于习题1.20的解．

1.35 设λ有A的单本征值，其右、左本征向量分别为φ、ψ．设$\lambda'\neq\lambda$为另一本征值，其右本征向量为 φ_1^0，……φ_g^0；φ_i^j，$i=1,\cdots,g$，$j=1,\cdots,t_i$ 为主向量：$(A-\lambda' I)\varphi_i^j=\varphi_i^{j-1}$．我们已知$\psi^H\varphi_i^0=0$，$i=1,\cdots,g$，所以$\psi^H(A-\lambda' I)\varphi_i^1=\psi^H\varphi_i^0=0$，$i=1,\cdots,g$，故$(\lambda-\lambda')\psi^H\varphi^1=0$，于是 $\psi^H\varphi_i^1=0$，$i=1,\cdots,g$．设 $\psi^H\varphi_i^j=0$，$1\leqslant j\leqslant t_{i-1}$，$i=1,\cdots,g$．易知 $\psi^H\varphi_i^{j+1}=0$．这说明

$$\psi\perp\bigoplus_{\substack{\delta\in\sigma(A)\\ \delta\neq\lambda}}M\delta$$

其中$M\delta$为相应于δ的不变子空间；因此

$$\bigoplus_{\substack{\delta\in\sigma(A)\\ \delta\neq\lambda}}M\delta\subset\{\psi\}^{\perp}.$$

但两个子空间均有维数$N-1$，所以它们一定是相等的．

1.36 若 $J=V^{-1}AV$，则 $J^H=V^HA^H(V^H)^{-1}$．V的列是A的Jordan基，且当A^H具有形式J^H时，$(V^H)^{-1}$的列为 Jordan基的伴随基．它可以看作反序的Jordan基，即从最后一个向量开始．例如 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$已经是 Jordan 型，因此Jordan基为典范基$\{e_1,e_2\}$．伴随基仍是$\{e_1,e_2\}$，且显然 $A^H=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$．$e_1$（或$e_2$）是$A$ 的本征（或主）向量；e_2（或e_1）是 A^H 的本征

（或主）向量。

1.37　若A是Hermite阵，P是正交投影且$\varphi=\psi$。$\{\varphi\}^{\perp}=(\mathrm{Ker}(A-\lambda I))^{\perp}=\mathrm{Im}(A-\lambda I)$，于是$\Pi=I-P$是$\mathrm{Im}(A-\lambda I)$上的正交投影。

1.38　由于$\lambda(\varepsilon)=\lambda-\varepsilon\psi^H L\varphi+\Sigma_{i\quad 2}\nu_i\varepsilon^i$几何收敛，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda(\varepsilon)-\lambda}{\varepsilon}=-\psi^H L\varphi.$$

1.39　在定理1.7中，我们求得$\nu_1=-\psi^H L\varphi/\psi^H\varphi$，所以

$$|\lambda-\lambda'|\leqslant\frac{\|\psi\|_2\|\varphi\|_2}{|\psi^H\varphi|}\varepsilon+O(\varepsilon^2)$$

这表明当不加规范化条件时，λ的条件数是$\|\psi\|_2\|\varphi\|_2/|\psi^H\varphi|$。由于$\cos(\pi/2-\theta)=|\psi^H\varphi|/\|\psi\|_2\|\varphi\|_2$，所以条件数为$1/\sin\theta$。

1.40　由　$\nu_k=-\psi^H L\varphi_{k-1}$，$k\geqslant 1$，

$$\eta_k=S\left(\sum_{i=1}^{k-1}\nu_i\eta_{k-i}+L\eta_{k-1}\right),$$

$$k\geqslant 2,\ \eta_0=\varphi,\ \eta_1=SL\varphi,$$

求得$\lambda'=\lambda+\psi^H H\varphi-\psi^H HSH\varphi-\psi^H LS(-\psi^H L\varphi[SL\varphi]+LSL\varphi)\varepsilon^3+\cdots$，所以$\lambda'=\lambda+\psi^H H\varphi-\psi^H HSH\varphi+O(\varepsilon^3)$。于是，若$\psi^H H\varphi=0$，$s=\|S\|_2$，$\varepsilon=\|H\|_2$，$\varepsilon'=\|H\varphi\|_2$，则$|\lambda-\lambda'|\leqslant s\varepsilon\varepsilon'\|\psi\|_2$。

1.41　$V=(\varphi,\varphi_1,\cdots,\varphi_{N-1})$是正则的，且$(V^{-1})^H=(\psi,\psi_1,\cdots,\psi_{N-1})$。

$$V^{-1}AV=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \mu_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_{N-1}\end{pmatrix},\quad V^{-1}PV=\left(\begin{array}{c|c}1 & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$$

$$V^{-1}(I-P)V=I-V^{-1}PV=\left(\begin{array}{c|c}0 & 0\\ \hline 0 & I_{N-1}\end{array}\right)$$

这里 I_{N-1} 为$\mathbb{C}^{N-1}$中的单位阵，

$$V^{-1}(A-\lambda I)V=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & 0 & \\ \hline 0 & \mu_1-\lambda & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \mu_{N-1}-\lambda \end{array}\right),$$

$$S=V\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & 0 & \\ \hline 0 & \frac{1}{\mu_1-\lambda} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \frac{1}{\mu_{N-1}-\lambda} \end{array}\right)V^{-1}.$$

于是

$$SH\varphi=V\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & 0 & \\ \hline & \frac{1}{\mu_1-\lambda} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & \frac{1}{\mu_{N-1}-\lambda} \end{array}\right)\begin{pmatrix} \psi^H H\varphi \\ \psi_1^H H\varphi \\ \vdots \\ \psi_{N-1}^H H\varphi \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\psi_j^H H\varphi}{\mu_j-\lambda}\varphi_j.$$

1.42 $\|\psi_1\|=1$，$\|\psi_2\|=\sqrt{1+10^{20}}\approx 10^{10}$，$\|\psi_3\|=10^{10}\sqrt{1+10^{-20}}\approx 10^{10}$。

1.43 因为Q为酉阵，所以$\|Qx\|_2=\|x\|_2$，于是$\|Q^HSQ\|_2=\max_{\|x\|_2=1}\|Q^HSQx\|_2=\max_{\|x\|_2=1}\|SQx\|_2=\max_{\|y\|_2=1}\|Sy\|_2=\|S\|_2$。

1.44 设($\mathbf{Y}'$, $\mathbf{Z}'$) 是$\mathbb{C}^N$的另一个基，且$\mathbf{Y}'$是$\mathbf{Y}$的基．于是，

$$(\mathbf{Y},\mathbf{Z})=(\mathbf{Y}',\mathbf{Z}')\begin{pmatrix}A_1 & A_{12}\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

$$=(\mathbf{Y}'A_1,\ \mathbf{Y}'A_{12}+\mathbf{Z}'A_2)$$

这里A_1为$r\times r$阵，且A_1，A_2均可逆．$\mathbf{X}_k=\mathbf{Y}C_k=\mathbf{Z}D_k=\mathbf{Y}'C'_k+\mathbf{Z}'D'_k$，其中$C'_k=A_1C_k+A_{12}D_k$，$D'_k=A_2D_k=(I+A_{12}D_kC_k^{-1}A_1^{-1})A_1C_k$．$D'_kC'_k=A_2F_k(I+A_{12}F_k)^{-1}$，而$F_k=D_kC_k^{-1}A_1^{-1}\to 0$．

1.45 对充分大的k，$\mathbf{X}_k=\mathbf{Y}(I+\mathbf{Z}D_kC_k^{-1})C_k$.

1.46 若$\mathbf{X}_k$张成X_k，$\mathbf{X}'_k$张成X'_k，则增广矩阵($\mathbf{X}_k$，$\mathbf{X}'_k$) 张成$X_k+X'_k$.

1.47 若$X_k\to Y$，则可选择C_k使$C_k\to I$．于是$\mathbf{X}_k\to\mathbf{Y}$，且$\mathbf{X}_k$的极限矩阵是唯一的.

1.48 不可约矩阵H的元$(1,N)$的子式是非零的．因此$\operatorname{rank}H\geqslant N-1$．$H-\lambda I$是不可约的Hessenberg阵；因此对任意的本征值λ，$H-\lambda I$的零空间的维数是1．H是非亏损的$\Longleftrightarrow$其本征值是单的．现在一个Hermite的Hessenberg阵是三角阵且可对角化.

1.49 用归纳法易证幂法可写成：$q_0=x/\|x\|_2$，$q_k=A^kx/\|A^kx\|_2$．对QR法，我们建立$A_{k+1}=Q_k^HA_kQ_k$，$A_{k+1}=\mathbf{Q}_k^HA\mathbf{Q}_k$，$\mathbf{R}_k=\mathbf{Q}_k^HA^k$，$\mathbf{Q}_k=A\mathbf{Q}_{k-1}R_k^{-1}$，所以$\mathbf{Q}_k^H=\mathbf{Q}_k^{-1}=\mathbf{R}_k\mathbf{Q}_{k-1}^HA^{-1}$且$e_N^H\mathbf{Q}_k^H=e_N^HR_k\mathbf{Q}_{k-1}^HA^{-1}=r_{NN}^{(k)}e_N^H\mathbf{Q}_{k-1}^HA^{-1}$，这里$r_{NN}^{(k)}$为$R_k$在位置$(N,N)$的元，因为$R_k$正则所以它是

非零的．另一方面，$\mathbf{Q}_k^H=\mathbf{R}_k(A^{-1})^k=\mathbf{R}_kA^{-k}$，因此$e_N^H\mathbf{Q}_k^H=e_N^H\mathbf{R}_kA^{-k}=S_{NN}^{(k)}e_N^HA^{-k}$，这里$S_{NN}^{(k)}$在 $\mathbf{R}_k$ 在位置（N,N）的元，因为$\mathbf{R}_k$ 正则，所以是非零的，这表明$\mathbf{Q}_ke_N=(A^H)^{-k}e_N/\|(A^H)^{-k}e_N\|_2$；即$\mathbf{Q}_k$ 的第N列用对（$A^H)^{-1}$ 施行幂法来计算，这里初始向量为e_N。

1.50　$\sigma_k=a_{NN}^k$, $A_k-\sigma_kI=Q_kR_k$，$Q_k^H(A_k-\sigma_kI)=R_k$，$Q_k^H=R_k(A_k-\sigma_kI)^{-1}$。$Q_ke_N=(A_k^H-\overline{\sigma}_kI)^{-1}R_k^He_N=(A_k^h--\overline{\sigma}_kI)^{-1}\overline{r}_{NN}^{(k)}e_N$，其中$r_{NN}^{(k)}\neq 0$为$R_k$的位于（$N,N$）的元．因此$Q_ke_N=(A_k^H-\overline{\sigma}_kI)^{-1}e_N/\|(A_k^H-\overline{\sigma}_kI)^{-1}e_N\|_2$．注意到；$Q_k^HQ_k=I$ 且 $e_N^He_N=1$，由 Rayleigh 商迭代：

$$q_k=\frac{(A_k^H-\overline{a}_{NN}^kI)^{-1}e_N}{\|(A_k^H-\overline{a}_{NN}^kI)^{-1}e_N\|}=Q_ke_N$$

$$\rho_k=\frac{e_N^HQ_k^HA_k^HQ_ke_N}{e_N^HQ_N^HQ_ke_N}=\frac{e_N^HA_{k+1}^He_N}{e_N^He_N}=\overline{a}_{NN}^{k+1}$$

其中$q_{k-1}=e_N$，$\rho_{k-1}=\overline{a}_{NN}^k$。

1.51　设$\varepsilon=\|H\|$。$y_i=A'^{-1}Hy_{i-1}=(A'^{-1}L)^ix'\varepsilon^i$，这里$L=(1/\varepsilon)H$。于是：

$$x=x'\sum_{i=0}\varepsilon^i(A'^{-1}L)^i$$

且

$$\|x-x_k\|=\left\|\sum_{i=k+1}(A'^{-1}L)^i\varepsilon^i\right\|\|x'\|$$

$$\leqslant\frac{\|x'\|\|A'^{-1}\|^{k+1}\varepsilon^{k+1}}{1-\|A'^{-1}\|\varepsilon}.$$

1.52　$A'=A'^{-1}=I$，$x'=(1,1,1,1)^T$，$x_1=x'+Hx'=$

$0.889x'$，$x_2=x'+Hx_1=0.90132x'$，$x_3=x'+Hx_2=0.89995x'$，$\varepsilon=\|H\|_\infty=0.111$，$\|x_3-x\|_\infty\leqslant\varepsilon^4/(1-\varepsilon)<1.71\times10^{-4}$.

1.53 因为$\mathrm{Ker}P'=\{\psi'\}^\perp$，所以$\psi'^Hx=0$等价于$P'x=0$．但$(A'-\lambda'I)_{|\{\psi'\}^\perp}$是双射，所以$x=(A'-\lambda'I)^{-1}_{|\{\psi'\}^\perp}(1-P')b=S'b=S'(1-P')b$是方程组的唯一解.

1.54 (1.13) 是秩为n的n个未知数的$n+1$个方程的方程组. 对$(n+1)\times n$矩阵进行Gauss分解，相应地计算右端.删去最后一个方程,(其系数全为零),得到一个n个方程n个未知数的正则的三角形方程组. 应用主元素法得数值稳定性.

1.55 见习题1.37的解.

1.56 取$\lambda=\Sigma_{j=0}^{\infty}\nu_j\varepsilon^j$，$\widehat{\varphi}=\Sigma_{j=0}^{\infty}\widehat{\eta}_j\varepsilon^j$，$\lambda_k=\Sigma_{j=0}^{k}\nu_j$，$\widehat{\varphi}_k=\Sigma_{j=0}^{k}\widehat{\eta}_j$. $L=-(1/\varepsilon)H$. 形式地有，$A\widetilde{\varphi}=\lambda\widehat{\varphi}$等价于

$$A'\widetilde{\eta}_0+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j(A'\widehat{\eta}_j+L\widehat{\eta}_{j-1})$$

$$=\nu_0\widehat{\eta}_0+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i\left(\sum_{j=0}^{i}\nu_j\widehat{\eta}_{i-j}\right),$$

于是有$A'\widehat{\eta}_0=\nu_0\widehat{\eta}_0$。选择$\widehat{\eta}_0=\varphi'$，$\nu_0=\lambda'$，则$\lambda_0=\lambda'$且$\widehat{\varphi}_0=\widehat{\varphi}'$. 其次，比较两个级数中$\varepsilon$的系数，得：

$$(A'-\lambda'I)\widehat{\eta}_1=\nu_1\varphi'-L\varphi' \qquad (*)$$

故$\widehat{\eta}_1=\nu_1\Sigma'\varphi'-\Sigma'L\varphi'=-\Sigma'L\varphi'$，这是因为$I-Q$为平行于$\{\varphi'\}$的$\{y\}^\perp$上的投影，所以$\Sigma'\varphi'=0$．由（*）又得到$y^H(A'-\lambda I)\widehat{\eta}_1=\nu_1-y^HL\varphi'$，故$\nu_1=y^HA'\widehat{\eta}_1+y^HL\varphi'$，事实上，$I-Q$为$\{y\}^\perp$上的投影，所以$y^H\Sigma'=0$，从而$y^H\widehat{\eta}_1=-y^H\Sigma'L\varphi'=0$．现用归纳法：对所有$k$，$y^H\widehat{\eta}_k=0$，且对

$k \geqslant 2$, $\widehat{\eta}_k = \Sigma'(\Sigma_{j=1}^{k-1}\nu_j \widehat{\eta}_{k-j} - L\widehat{\eta}_{k-1})$, $\nu_k = y^H A' \widehat{\eta}_k + y^H L \widehat{\eta}_{k-1}$，最后令 $\varepsilon = 1$.

1.57　整体复杂性是相同的。其主要区别在于，在(1.11)中，λ_k 仅依赖于 φ_{k-1}，但在 (1.14) 中 λ_k 依赖于 $\widehat{\varphi}_{k-1}$ 和 $\widehat{\eta}_k$，所以在计算 λ_k 之前必须先计算 $\widehat{\varphi}_k$.

1.58　$A = A' - H$，其中 $A' = \mathrm{diag}(1,2,3,4)$。对 $\lambda' = 1$，$\varphi' = \psi' = e_1$，$P' = e_1 e_1^T$。迭代公式为：

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_k = e_1^T A \varphi_{k-1},$$

$$\varphi_0 = \eta^0 = e_1 \begin{cases} (A - I)(\varphi_k - e_1) = (I - P') \\ \quad \cdot \left[H\varphi_{k-1} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \nu_j \eta_{i-j} \right], \\ e_1^T \varphi_k = 1. \end{cases}$$

例如：

$$\lambda_1 = \lambda_0, \quad \varphi_1 = e_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \text{其中：} \begin{cases} x_2 = -0.1 \\ 2x_3 = -0.1 \\ 3x_4 = -0.1 \end{cases}$$

因此 $x_2 = -0.1$, $x_3 = -0.05$，$x_4 = -0.033$。且 $\lambda_2 = e_1^T A \varphi_1 = 0.9684$。

1.59　若 A 为拟上三角阵，摄动 H 可取下三角部分。则 A' 是三角阵，且有已知的本征值,(1.13)易解出，以加细 A' 的第一和最后一个对角元。关于其它的对角元，见第三章 §8.4.

1.60　$P' = e_1 e_1^T$，$H = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -\frac{1}{25} & 0 \end{pmatrix}$，$\varphi_k = e_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ x_k \end{pmatrix}$.

$\lambda = 0.8282$，$\lambda_0 = 1$，$\varphi_0 = \eta^0 = e_1$，$x_k = e_2^T[H\varphi_{k-1} + \Sigma_{i=1}^{k}\Sigma_{j=1}^{i}\nu_j\eta_{i-j}]$ 于是有：

$$\lambda_1 = 1, \quad x_1 = -\frac{1}{25}, \quad \lambda_2 = 0.8, \quad x_2 = -\frac{1}{25},$$

$$\lambda_3 = 0.8, \quad x_3 = -\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{25} = -0.032, \quad \lambda_4 = 0.84,$$

$x_4 = x_3$，$\lambda_5 = 0.84$，$x_5 = -0.0352$，$\lambda_6 = 0.8384$，

$x_6 = x_5$，$\lambda_7 = \lambda_6$等。

1.61　对 $\{y\}^{\perp}$ 中的任何 x，$Qx = 0$；即 $(I-Q)x = x$，因此，

$$(I-Q)(A-\zeta I)(I-Q) = (\widetilde{A}-\zeta I)(I-Q).$$

1.62　因为$Qx = x$，且 $(I-Q)x = 0$，所以$\widetilde{A}x = \zeta Qx + (I-Q)A(I-Q)x = \zeta x$，同时因为$y^HQ = y^Hxy^H = y^H$ 且 $y^H(I-Q) = 0$，所以 $y^H\widetilde{A} = \zeta y^HQ + y^H(I-Q)A(I-Q) = \zeta y^H$．故 x 是$\widetilde{A}$的右本征向量，y是$\widetilde{A}$的左本征向量，均相应于本征值 ζ．若ζ是单的，则$Q = xy^H$确定谱投影．

$$(\widetilde{A}-\zeta I)(I-Q)\Sigma = (I-Q)(\widetilde{A}-\zeta I)(\widetilde{A}-\zeta I)^{-1}(I-Q) = I-Q.$$

1.63　因为$y^H\xi$和$y^H(A-\zeta I)\xi$均为复数，所以$\widetilde{H}\xi = (y^H\xi)(A-\zeta I)x + (y^H(A-\zeta I)\zeta)x = (A-\zeta I)xy^H\xi + xy^H(A-\zeta I)\xi$．但$xy^H = Q$，故$\widetilde{H}\xi = [(A-\zeta I)Q + Q(A-\zeta I)]\xi$.

1.64　$A = \widetilde{A} + \widetilde{H}$．在习题1.54中令$H = -\widetilde{H}$，$\varepsilon = 1$（见解答），则可得到如下解释．$\widetilde{H}$使得$Q\widetilde{H}Q = (I-Q)\widetilde{H}(I-Q) = 0$．因此$\eta_{2k} = 0$，$k \geqslant 1$，且$\nu_{2k-1} = 0$，$k \geqslant 2$．

1.65　在（1.16）中$\lambda_k \to \lambda$的收敛速率是线性的，而在

Rayleigh 商迭代中 $\rho_k \to \lambda$ 的收敛速率（至少）是二次的。

1.66 $x = y = e_1$, $Q = e_1 e_1^T$, $\zeta = a$, $\sigma = \|(c - aI)^{-1}\|_2$.

若 a 不是 C 的本征值，且 $r' = \|u\|_2 \|v\|_2 \sigma^2 < \frac{1}{4}$，则存在 A 的单本征值 λ 及相应的用 $e_1^T \varphi = 1$ 规范化的本征向量 φ，使得

$$|\lambda - a| \leqslant g(r') |v^H (C - aI)^{-1} u| \leqslant 2\sigma \|u\|_2 \|v\|_2,$$

$$\|\varphi - e_1\|_2 \leqslant g(r') \|(C - aI)^{-1} u\|_2 \leqslant 2\sigma \|u\|_2.$$

1.67 若 A 是 Hermite 阵，如果取 $y = x$，则 $\widetilde{A}$ 也是 Hermite 阵，故 Q 和 $I - Q$ 是正交的且是 Hermite 阵。$u = v$，$|u^H \Sigma u| \leqslant \sigma \|u\|_2^2$，其中

$$\sigma = \|\Sigma\|_2 = [\operatorname{dist}(\zeta, \sigma[(I - Q)A]_{\restriction\{x\}^\perp})]^{-1}.$$

1.68 留给读者。

1.69 设 $B = (x_i \delta_{ij})$，故 $B^{-1} = (x_i^{-1} \delta_{ij})$。则 $B^{-1}A = (x_i^{-1} a_{ij})$，$B^{-1}AB = ((x_j / x_i) a_{ij})$。因此 $B^{-1}AB$ 和 A 有相同的对角元。由于 $\sigma(A) = \sigma(B^{-1}AB)$，对 $B^{-1}AB$ 应用定理 1.19.

1.70 首先选 $x_1 = \frac{1}{3}$，$x_2 = x_3 = 10^{-4}$，且求得：$G_1 = \{z \in \mathbb{C};\ |z - 1| \leqslant 9 \times 10^{-8}\}$，$G_2 = \{z \in \mathbb{C};\ |z - 2| \leqslant 0.3335\}$，$G_3 = \{z \in \mathbb{C};\ |z - 3| \leqslant 0.4001\}$，它们是不相交的。$G_1$ 为接近于 1 的局部本征值，其精确度为 9×10^{-8}。下面取 $x_1 = x_3 = 10^{-4}$，$x_2 = \frac{1}{2}$；G_1，G_2，G_3 是不相交的，且 $G_2 = \{z \in \mathbb{C};\ |z - 2| \leqslant 4.2 \times 10^{-8}\}$。最后，取 $x_1 = x_2 = 10^{-4}$，$x_3 = \frac{1}{4}$，求出 3 个不相交的 Gershgorin 圆盘。且 $G_3 = \{z \in \mathbb{C};\ |z - 3| \leqslant 8.8 \times 10^{-8}\}$。由于 $\|H\|_2 \leqslant \sqrt{3} \|H\|_\infty = 3\sqrt{3} \times 10^{-4}$ 且 $\|(A - I)^{-1}_{\restriction\{e_1\}^\perp}\|_2 = \frac{1}{2}$，所以由习题 1.40 给出的界是 10^{-8} 阶的。

1.71　利用 Perron-Frobenius 定理：存在 B 的相应于本征值 $r_0(B)$ 的本征向量，且具有正的分量。

1.72　若 A 不是正则的，则 $0 \in \sigma(A)$ 且可找到 i 使得 $|a_{ii} - 0| \leqslant \Sigma_{j \neq i} |a_{ij}|$。即，若对所有的 i $|a_{ii}| > \Sigma_{j \neq i} |a_{ij}|$，则 A 一定是正则的。

1.73　由于对所有的 i，$a_{ii} > \Sigma_{j \neq i} |a_{ij}|$，且 $\forall \lambda \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$，$\exists$ i 使得 $-\Sigma_{j \neq i} |a_{ij}| \leqslant \lambda - a_{ii} \leqslant \Sigma_{j \neq i} |a_{ij}|$；因此 $0 < a_{ii} - \Sigma_{j \neq i} |a_{ij}| \leqslant \lambda$。故 A 的所有本征值均是正的。

1.74　拟对角阵可写成如下形式

$$\begin{pmatrix} a & v^H \\ u & C \end{pmatrix},$$

其中 $\|u\| \|v\|$ 充分小。若 $\max(\|u\|_1, \|v\|_1)$ 充分小，则由推论 1.20 存在 A 的单本征值 λ 使得 $|\lambda - a| \leqslant \max(\|u\|_1, \|v\|_1)$。参见习题1.66中推论1.18的应用。后者给出准确的界。

1.75　$\Delta = VDV^{-1}$，$D = (\mu_i \delta_{ij})$，$A = \Delta + H$。设 φ 是相应于 A 的本征值 λ 的本征向量，且 $\|\varphi\| = 1$。设 $r = \Delta\varphi - \lambda\varphi = \Delta\varphi - A\varphi = -H\varphi$。由命题 1.15 存在 Δ 的本征值 μ_i 使得 $|\lambda - \mu_i| \leqslant \|V\| \|V^{-1}\| \|r\|$。但 $\|r\| = \|H\varphi\| \leqslant \|H\|$。

1.76　由于 $Q = xy^H$ 且 $\|x\|_2 = 1$，我们有 $\|Q\|_2 = \|y\|_2$。于是，当 $a = \sigma$ 且 $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\varepsilon^*$ 时，有 $\tilde{r} = \sigma^2 \|y\|_2 \varepsilon\varepsilon^* = r'$ 且得推论 1.18。若 $a = \sigma$ 且 $\tilde{\varepsilon} = r/\sigma^2 \|y\|_2$，则 $\tilde{r} = r$，定理1.17成立。

1.77　$\|I - Q\|_1 = 1$；$\Sigma = (I - Q)\mathring{A}^{-1}_{ii}(I - Q)$：$\mathring{A}^{-1}_{ii} = (R - H)^{-1} = R^{-1}\Sigma_{i \geq 0}(HR^{-1})^i$。

$$\|\Sigma\|_1 \leqslant \|I - Q\|_1^2 \|R^{-1}\|_1 \frac{1}{1 - \|HR^{-1}\|_1}$$

$$\leqslant \frac{s_1}{1 - s_1 \varepsilon_1} = \frac{2}{3} a < a.$$

我们知道$A=R-H$. R相应于a_{ii}的本征向量可写成如下的形式：

$$x=(\times\cdots\cdots\times\ \underset{\substack{\uparrow\\ i}}{1}\ 0\cdots\cdots0)^T$$

其中×表示（可能的）非零分量. 因此$\|\varphi-x\|\leqslant c\varepsilon$, 其中$\varphi$是相应于$a_{ii}$的$A$的本征向量.因此对充分小的$\varepsilon$, $e_i^T\varphi\neq0$, 且φ可规范化使得$e_i^T\varphi=1$.

1.78 $A=\begin{pmatrix}0 & -\alpha\\ \alpha & 1/\beta\end{pmatrix}$, $x=y=e_1$, $\zeta=0$, $Q=e_1e_1^T$, $\Sigma=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$, $v^H\Sigma^k u=-\alpha^2\beta^k$. 因此$a=|\beta|$, $\tilde{e}=\alpha^2$, $\tilde{r}=(\alpha\beta)^2$, 定理1.22中的界是准确的.

1.79 见wilkinson (1965). QR算法得到一个块三角阵$\widetilde{R}$, 其中对角块至多是二阶的, 并得到酉阵$\widetilde{Q}$使得$A\widetilde{Q}-\widetilde{Q}\widetilde{R}=E$. 设$F=\widetilde{Q}^{-1}E$, 则$\widetilde{Q}^{-1}A\widetilde{Q}=\widetilde{R}+F$. 由于计算出的$\widetilde{Q}$是拟酉阵, 所以$F$可仿照$\widetilde{Q}^HE$来计算.

1.80
$$\begin{aligned}\|Ax-\lambda x\|_2^2&=(x^HA^H-\bar{\lambda}x^H)(Ax-\lambda x)\\ &=x^HA^HAx-\lambda x^HA^Hx-\bar{\lambda}x^HAx+\bar{\lambda}\lambda\\ &=x^HA^HAx+(x^HAxx^HA^Hx-x^HAxx^HA^Hx)\\ &\quad-\lambda x^HA^Hx-\bar{\lambda}x^HAx+\bar{\lambda}\lambda\\ &=x^HA^HAx-x^HAxx^HA^Hx\\ &\quad+x^HAx[x^HA^Hx-\bar{\lambda}]-\lambda[x^HA^Hx-\bar{\lambda}]\\ &=x^HA^H(Ax-xx^HAx)+|x^HAx-\lambda|^2,\end{aligned}$$

当$\lambda=x^HAx$时, 达到极小.

1.81 $\mu_k=\min\{\max\{x^HAx;\ x\in V_k,\ \|x\|_2=1\},$

$$V_k \subseteq \mathbb{C}^N, \ \dim V_k = k\}$$

$$\mu_k' = \min\{\max\{u^H A_{N-1} u; \ u \in V_k', \ \|u\|_2 = 1\};$$

$$V_k' \subseteq \mathbb{C}^{N-1}, \ \dim V_k' = k\}.$$

若 $x \in V_k' \times \{0\}$，则$x = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 $u \in V_k'$. $x^H A x = u^H A_{N-1} u$且$W_k = V_k' \times \{0\}$是$\mathbb{C}^N$的 k 维子空间. 此外$\|x\|_2 = \|u\|_2$. 因此

$$\max_{\substack{x \in W_k \\ \|x\|_2 = 1}} x^H A x = \max_{\substack{u \in V_k' \\ \|u\|_2 = 1}} u^H A_{N-1} u,$$

于是对所有$\dim V_k' = k$ 的$V_k \subset \mathbb{C}^{N-1}$有

$$\mu_k \leqslant \max_{\substack{u \in V_k' \\ \|u\|_2 = 1}} u^H A_{N-1} u$$

因此$\mu_k \leqslant \mu_k'$. 另一方面，

$$\mu_{k+1} = \min\{\max\{x^H A x; \ x \in V_{k+1}, \|x\|_2 = 1\};$$

$$V_{k+1} \subseteq \mathbb{C}^N, \ \dim V_{k+1} = k+1\}.$$

设 $V_k' \subseteq \mathbb{C}^{N-1}$为 k 维且$W_{k+1} \subseteq \mathbb{C}^N$是$k+1$维且$V_k' \times \{0\} \subseteq W_{k+1}$. 于是

$$\max_{\substack{x \in V_k' \times \{0\} \\ \|x\|_2 = 1}} x^H A x \leqslant \max_{\substack{x \in W_{k+1} \\ \|x\|_2 = 1}} x^H A x,$$

故 $\mu_k' \leqslant \max\{x^H A x; \ x \in W_{k+1}, \ \|x\|_2 = 1\}$; 从而$\mu_k' \leqslant \mu_{k+1}$.

1.82 $\varphi_n = V_n \xi_n$, 故$\pi_n(AV_n\xi_n - \lambda_n V_n \xi_n) = 0$.
即，$AV_n\xi_n - \lambda_n V_n \xi_n \in X_n^\perp$，所以

$$V_n^H(AV_n\xi_n - \lambda_n V_n \xi_n) = 0,$$

且得 $(V_n^H A V_n)\xi_n = \lambda_n (V_n^H V_n)\xi_n$. 这是广义本征值问题.

1.83 若$x = Q_n\xi$, $y = Q_n\eta$, 且$\pi_n A_{|X_n} x = y$，则

$\pi_n(AQ_n\xi-Q_n\eta)=0$，从而$AQ_n\xi-Q_n\eta\in X_n^{\perp}$并且$Q_n^HAQ_n\xi=\eta$．于是$Q_n^HAQ_n$是$\pi_nA_{\restriction X_n}$在基$Q_n$下的表示．

1.84 设λ_n和$\varphi_n\in X_n$是$A_n=\pi_nA$的本征元．则$A_n\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$；但$\varphi_n=\pi_n\varphi_n$，故又有$\pi_nA\pi_n\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$且$(\lambda_n,\varphi_n)$是$A_n\pi_n=\pi_nA_n\overline{\pi_n}$的本征元，反之亦然．现设$\lambda_n,\varphi_n\in X_n$是$\mathscr{A}_n=\pi_nA_{\restriction X_n}$的本征元，则$\mathscr{A}_n\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$；即$\pi_nA_{\restriction X_n}\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$或$\pi_nA\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$．于是$(\lambda_n,\varphi_n)$是$A_n=\pi_nA$的本征元，反之亦然．

1.85 $B_n^H=(Q_n^HAQ_n)^H=Q_n^HA^HQ_n=Q_n^HAQ_n=B_n$．$B_n$是$\mathscr{A}_n$的表示．由于$\pi_n^H=\pi_n$，$\lambda_n=\varphi_n^HA_n\varphi_n=\varphi_n^H\pi_nA\varphi_n=(\pi_n^H\varphi_n)^HA\varphi_n=(\pi_n\varphi_n)^HA\varphi_n=\varphi_n^HA\varphi_n$．$\lambda_n$是$A$基于$\varphi$的Rayleigh商．

1.86 取投影方程组$\pi_n(Ax_n-b)=0$，定义$x_n=Q_n\xi_n$，$\eta_n=Q_n^Hb$，即$Q_nQ_n^Hb=Q_n\eta_n$，其中$Q_nQ_n^H$是X_n上的正交投影π_n的矩阵．由于$AQ_n\xi_n-b\in X_n^{\perp}$，我们得$Q_n^HAQ_n\xi_n=Q_n^Hb$；即$B_n\xi_n=\eta_n$．

1.87 设$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_N$是Hermite阵$A$的相应于本征向量$\varphi_1$，……，$\varphi_N$（$\|\varphi_i\|_2=1$）的本征值．$M$由$\varphi_1,\cdots\cdots,\varphi_r$张成，$W$由$\varphi_{r+1}$，……，$\varphi_N$张成，且$P$是$M$上的正交投影．我们知道$M\perp W$，$\mathbb{C}^N=M\oplus W$．$U$由$x_1$，……，$x_r$张成，且$\{Px_i\}_1^N$是无关的．设$X_n=A^nU$和$\pi_n$是$X_n$上的正交投影．又设$\mu_1^{(n)}$是$A_n=\pi_nA$的主本征值：

$$\mu_1^{(n)}=\max_{\substack{x\in X_n\\ \|x\|_2=1}}x^H\pi_nAx=\max_{\substack{x\in X_n\\ \|x\|_2=1}}x^HAx\leqslant\mu_1$$

$$=\max_{\substack{x\in C^N\\ \|x\|_2=1}}x^HAx$$

于是有

$$0 \leqslant \mu_1 - \mu_1^{(n)} = \min_{\substack{x \in X_n \\ x \neq 0}} \frac{x^H(\mu_1 I - A)x}{\|x\|_2^2}$$

$\{Px_i\}_1^r$和$\{\varphi_i\}_1^r$均为M的基，所以 $\varphi_1 = \Sigma_{k=1}^r t_k P x_k =$

$P(\Sigma_{k=1}^r t_k x_k)$，$u_1 := \Sigma_1^r t_k x_k \in U$，且 $Pu_1 = \varphi_1$。于是$u_1 =$
$Pu_1 + (I-P)u_1 = \varphi_1 + (I-P)u_1$，$v_1 := (I-P)u_1 =$
$\Sigma_{j=r+1}^N \alpha_j \varphi_j \in W$。从而$u_1 = \varphi_1 + v_1$且$\varphi_1 \perp v_1$。由于$u_1 \in U$，
$A^n u_1 \in X_n$，$\hat{x} := (1/\mu_1^n)A^n u_1 = \varphi_1 + (1/\mu_1^n)A^n v_1 \in X_n$，所以

$$\hat{x} = \varphi_1 + \frac{1}{\mu_1^n}\sum_{j=r+1}^N \alpha_j \mu_j^n \varphi_j，且 \|\hat{x}\|_2^2 \geqslant \|\varphi_1\|_2^2 = 1.$$

我们有 $\mu_1 - \mu_1^{(n)} \leqslant \hat{x}^H(\mu_1 I - A)\hat{x}/\|\hat{x}\|_2^2 \leqslant \hat{x}^H(\mu_1 I - A)\hat{x}$.
可求得

$$\hat{x}^H(u_1 I - A)\hat{x} = \frac{u_1}{u_1^{2n}}\sum_{j=r+1}^N |\alpha_j|^2 \mu_j^{2n}$$

$$-\frac{1}{\mu_1^{2n}}\sum_{j=r+1}^N |\alpha_j| \mu_j^{2n+1} := C.$$

由于 $-\mu_{r+1} \leqslant -\mu_{r+2} \leqslant \cdots\cdots \leqslant -\mu_N$，

$$C \leqslant \frac{\mu_1 - \mu_N}{\mu_1^{2n}}\sum_{j=r+1}^N |\alpha_j|^2 \mu_j^{2n} \leqslant (\mu_1 - \mu_N)\left(\frac{\mu_{r+1}}{\mu_1}\right)^{2n}\sum_{j=r+1}^N |\alpha_j|^2.$$

但由于$\|Pu_1\|_2 = \|\varphi_1\| = 1$，$\Sigma_{j=r+1}^N |\alpha_j|^2 = \|v_1\|_2^2 = \|u_1 -$
$\varphi_1\|_2^2 = \|u_1 - Pu_1\|_2^2 = \tan^2\theta_1$，其中$\theta_1$是$u_1$和$\varphi_1$间的锐角。

1.88 $P(z) = (z/\lambda_1)^{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$且$P(\lambda_1) = 1$. 它是$z \in D$
$= \{z;\ |z| \leqslant |\lambda_2|\}$的解析函数. 因此由最大模原理，

$\max_{z\in D}|P(z)| \leqslant |\lambda_2/\lambda_1|^{n-1}$.

1.89 见习题1.86. 对$x_n\in X_n$求解$\pi_n Ax_n=\pi_n b$. 于是，若$Ax^*=b, x_n=(\pi_n A_{|X_n})^{-1}\pi_n Ax^*$. 令$x^*=\pi_n x^*+(I-\pi_n)x^*$，且得 $x_n-x^*=((\pi_n A_{|X_n})^{-1}\pi_n A-I)(I-\pi_n)x^*$. 若

$$\|(\pi_n A_{|X_n})^{-1}\|_2\leqslant M$$

则由于$\|\pi_n\|_2=1$，$\|x_n-x^*\|_2\leqslant(1+M\|A\|_2)\mathrm{dist}(x^*,X_n)$.

1.90 $\mathrm{dist}(z^*,K_n)=\min_{q\in\mathbb{P}_{n-1}}\|z^*-q(A)r_0\|_2$. 由于 $r_0=b-Ax_0=Ax^*-A(x^*-z^*)=Az^*$,

$$\mathrm{dist}(z^*,K_n)=\min_{q\in\mathbb{P}_{n-1}}\|z^*-q(A)Az^*\|_2=\min_{\substack{p\in\mathbb{P}_n\\ p(0)=1}}\|p(A)z^*\|_2.$$

1.91 $\pi_n(Az^{(n)}-r_0)=0$, $\pi_n(b-r_0+Az^{(n)}-b)=0$, $\pi_n(A(x_0+z^{(n)})-b)=0$，故$x^{(n)}=x_0+z^{(n)}$. 于是，由于 $z^*=x^*-x_0$，得 $z^*+x^{(n)}-z^{(n)}=x^*$，从而 $x^*-x^{(n)}=z^*-z^{(n)}$.

1.92 $A=VDV^{-1}$, 其中$D=(\lambda_i\delta_{ij})$, $\forall p\in\mathbb{P}_n, p(A)=Vp(D)V^{-1}$, 故$\|p(A)z^*\|_2\leqslant C\max_{i=1,\dots,N}|P(\lambda_i)|$.

1.93 参见定理1.34的证明. $\gamma=1+2\lambda_{\min}/(\lambda_{\max}-\lambda_{\min})=(\lambda_{\max}+\lambda_{\min})/(\lambda_{\max}-\lambda_{\min})$.

1.94 $\pi_n'(A\varphi_n-\lambda_n\varphi_n)=0$，$\varphi_n\in X_n$等价于$\widetilde{w}_n(A\varphi_n-\lambda_n\varphi_n)=0$, $\varphi_n\in X_n$.

1.95 设 $\varphi_n=P_n u_n$. $(Q_n^H AP_n)u_n=\lambda_n(Q_n^H P_n)u_n$ 等价于 $(Q_n^H P_n)^{-1}(Q_n^H AP_n)u_n=\lambda_n u_n$（参见习题1.94）.

第二章

2.1 设$x\in M$且对所有的$f\in X^*$, $\varphi x(f)=\langle f, x\rangle$. 显然 $|\varphi_x(f)|\leqslant\|x\|\|f\|$, 所以$\varphi_x$在$X^*$上连续且$\mathrm{Ker}\varphi_x=\varphi_x^{-1}\{0\}$ 是闭的. 最后$M^\perp=\bigcap_{x\in M}\mathrm{Ker}\varphi_x$是闭的.

2.2 对 $x = x_M + x_N \in M \oplus N = X$ 且 $f \in M^{\perp} \cap N^{\perp}$ 有 $\langle f, x \rangle = \langle f, x_M \rangle + \langle f, x_N \rangle = 0$，故 $f = 0$。设 $\pi_M: x \in X \mapsto x_M \in M \subseteq X$ 且 $\pi_N = 1 - \pi_M: x \in X \mapsto x_N = x - x_M \in N \subseteq X$。对 $f \in X^*$，设 $f_M = f \circ \pi_M$，$f_N = f \circ \pi_N$。显然 π_M，π_N，f_N，f_M 是连续的且 $f_M \in M^{\perp}$，$f_n \in N^{\perp}$，$f = f_M + f_N$，所以 $X^* = M^{\perp} \oplus N^{\perp}$。

2.3 设 $\dim M = 1$。于是 $\exists x_0 \in M$，$x_0 \neq 0$，且 $\exists f \in X^*$ 使得 $\langle f, x_0 \rangle = 1$。若 $N = \operatorname{Ker} f$，则 N 是闭的，对 $x \in M \cap N$，有 $x = \lambda x_0$，且 $0 = \langle f, x \rangle = \overline{\lambda} \langle f, x_0 \rangle = \overline{\lambda}$，故 $x = 0$。又 $u := x - \langle x, f \rangle x_0 \in N$，$v := \langle x, f \rangle x_0 \in M$，且 $u + v = x$。映射 $\pi_M: x \in X \mapsto \langle x, f \rangle x_0 \in M \subset X$ 是连续的，这是由于 $\|\pi_M x\| \leqslant \|f\| \|x_0\| \|x\|$。假设每个 X 的 n 维子空间 M_n 有补子空间。设 M 由 $n+1$ 个无关向量 $y_1, \cdots\cdots, y_n$，y_{n+1} 生成。则 $M_n = \{y_1, \cdots\cdots, y_n\}$ 有补子空间 N_n，且 $y_{n+1} = y_{n+1}^M + y_{n+1}^N$，其中 $y_{n+1}^M \in M_n$，$y_{n+1}^n \in N_n$，且 $y_{n+1}^N \neq 0$。$\{y_1, \cdots, y_n, y_{n+1}^N\}$ 仍为 M 的基。这意味着我们可设 $M = M_n \oplus \{x_0\}$，其中 $x_0 \in N_n$。存在 $f \in X^*$ 使得 $\langle f, x_0 \rangle = 1$ 且 $\forall x_n \in M_n$，$\langle f, x_n \rangle = 0$。设 $N = N \cap \operatorname{Ker} f$。若 $x \in M \cap N$，则 $x = \lambda x_0 + x_n$，其中 $\lambda \in \mathbb{C}$，$x_n \in M_n$。所以 $0 = \langle f, x \rangle = \overline{\lambda} \langle f, x_0 \rangle = \overline{\lambda}$，$x = x_n$。但 $N \subseteq N_n$，故 $x \in M_n \cap N_n$，于是 $x = 0$。我们证明了 $M \cap N = \{0\}$。对所有的 $x \in X$，下列等式成立：$x = \langle x, f \rangle x_0 + x_n + x - \langle x, f \rangle x_0 - x_n$，其中 $x_n \in M_n$。因此 $u := \langle x, f \rangle x_0 + x_n \in M_n$，$v := x - \langle x, f \rangle x_0 - x_n$ 验证了 $\langle f, v \rangle = \langle f, x \rangle - \langle f, x \rangle \langle f, x_0 \rangle - \langle f, x_n \rangle = \langle f, x \rangle - \langle f, x \rangle = 0$，注意其中 $\langle f, x_0 \rangle = 1$，$\langle f, x_n \rangle = 0$。$v \in N$，因为 $x \mapsto x_n$，$x \mapsto \langle x, f \rangle x_0$ 是连续的，所以 $X = M \oplus N$。

2.4 $\forall x \in M$，$\forall f \in M^{\perp}$，$\langle f, x \rangle = 0$，故 $x \in (M^{\perp})^{\perp}$。$\forall x \in (M^{\perp})^{\perp}$，$\forall f \in M^{\perp}$，$\langle x, f \rangle = 0$；若 $x \notin M$，则 $\exists f \in X^*$ 使得 $\langle f, x \rangle \neq 0$，$\forall y \in M$，$\langle f, y \rangle = 0$；因此 $f \in M^{\perp}$，矛盾．所

以$x\in M$。

2.5 $\forall x\in \mathrm{Dom}T$，$x\neq 0$，$\|Tx\|/\|x\|=\|T(x/\|x\|)\|$。其余由上、下确界的定义可得。

2.6 $\int_a^s k(s,t)x(t)dt=\int_a^b \widehat{k}(s,t)x(t)dt$，其中

$$\widehat{k}(s,t)=\begin{cases}k(s,t), & a\leqslant t\leqslant s\\ 0, & s\leqslant t\leqslant b\end{cases}$$

注意$\widehat{k}$沿$a\leqslant t=s\leqslant b$可能是间断的。

2.7 $\|(TU)^k\|^{1/k}=\|T^kU^k\|^{1/k}\leqslant\|T^k\|^{1/k}\|U^k\|^{1/k}$。若$U\in\mathscr{L}(X,Y)$ 且$T\in\mathscr{L}(Y,X)$，则$TU\in\mathscr{L}(X)$且$UT\in\mathscr{L}(Y)$记

$$(UT)^k=U(TU)^{k-1}T,\ \lim_k\|(UT)^k\|^{1/k}\leqslant\lim_k(\|U\|\cdot$$

$\|T\|)^{1/k}(\|TU\|^{k-1})^{1/k}$；

因此$r_\sigma(UT)\leqslant r_\sigma(TU)$。类似地$r_\sigma(TU)\leqslant r_\sigma(UT)$。

2.8 若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$使得$\|x\|<\delta$时$\Rightarrow\|Tx\|<\varepsilon$，则对$x=u-v$，$\|u-v\|<\delta\Rightarrow\|Tu-Tv\|<\varepsilon$，所以$T$是一致连续的.设$\varepsilon>0$且$\delta>0$使当$\|x\|<\delta$时$\Rightarrow\|Tx\|<\varepsilon$.取$r=\delta/2$对$y\in X$，$y\neq 0$，令$x=(r/\|y\|)y$。由于$\|x\|=\delta/2<\delta$，所以有$\|Tx\|<\varepsilon$；即$\|Ty\|\leqslant(2\varepsilon/\delta)\|y\|$（易见甚至对$y=0$亦真）。所以$T$是有界的。反之，若$\forall x\in X$，$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$，则对$\varepsilon>0$，取$0<\delta<\varepsilon/M$且由连续性即得。

2.9 由于$\{0\}$在X中是闭的且T连续，则$T^{-1}\{0\}=\mathrm{Ker}\,T$在$X$中闭。

2.10 X的一切范数是等价的。取$\{x_1,\cdots,x_N\}$为X的基。对$x=\Sigma_{j=1}^N a_jx_j$，有$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$，其中$M=\max_{1<i<N}\{\|Tx_i\|\}$且$\|x\|=\Sigma_j|a_j|$.

2.11 若 $y_1 = Tx_1$，$y_2 = Tx_2$，则$y_1'' = x_1$，$y_1(a) = y_1(b) = 0$，$y_2'' = x_2$，$y_2(a) = y_2(b) = 0$。因此有 $(y_1 + \lambda y_2)'' = x_1 + \lambda x_2$，$(y_1 + \lambda y_2)(a) = (y_1 + \lambda y_2)(b) = 0$；因此 $y_1 + \lambda y_2 = T(x_1 + \lambda x_2)$ 且 T 是线性的．又有

$$y'(u) = \int_a^u x(t)dt + K_1, \quad y(s) = \int_a^s \left[\int_a^u x(t)dt\right] du + (s-a)K_1 + K_2.$$

$$y(a) = 0 \Longrightarrow k_2 = 0, \quad y(b) = 0 \Longrightarrow k_1 = -\frac{1}{b-a} \int_a^b \left[\int_a^u x(t)dt\right] du,$$

$$y(s) = \int_a^s du \int_a^u x(t)dt - \frac{s-a}{b-a}\int_a^b du \int_a^u x(t)dt.$$

设

$$k(s,t) = \begin{cases} (s-b)(t-a)/(b-a), & a \leqslant t \leqslant s \\ (s-a)(t-b)/(b-a), & s \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

则

$$\int_a^b k(s,t)x(t)dt = \int_a^s (s-b)(t-a)x(t)\frac{dt}{b-a} + \int_s^b (s-a)(t-b)x(t)\frac{dt}{b-a}$$

$$= \frac{s-b}{b-a}\int_a^s (t-a)x(t)dt + \frac{s-a}{b-a}\int_s^b (t-b)x(t)dt.$$

利用分部积分法得$\int_a^s du \int_a^u x(t)dt = s\int_a^s x(t)dt - \int_a^s tx(t)dt$

且$\int_a^b du \int_a^u x(t)dt = b\int_a^b x(t)dt - \int_a^b tx(t)dt$．所以$y(s)$可以写成如下形式

$$y(s)=\int_a^s(s-t)x(t)dt+\frac{s-a}{b-a}\left[\int_a^s(t-b)x(t)dt+\right.$$

$$\left.+\int_s^b(t-b)x(t)dt\right]=\int_a^s\left[(s-t)+\frac{s-a}{b-a}(t-b)\right]$$

$$\cdot x(t)dt+\frac{s-a}{b-a}\int_s^b(t-b)x(t)dt=\frac{s-b}{b-a}\int_a^s(t-a)$$

$$\cdot x(t)dt+\frac{s-a}{b-a}\int_s^b(t-b)x(t)dt.$$

即$y(s)=\int_a^b k(s,t)x(t)dt$。因为$k$在$[a,b]^2$上连续，所以$T$在$C(a,b)$上有界。

2.12 设$X=Y$是实多项式空间且$Tx(t)=x'(t)$. 显然，$\mathrm{Im}T=Y$，但$\ker T=\{常数\}\neq\{0\}$；T^{-1}不存在。

2.13 设$Tx(t)=0.1\int_0^1 e^{st}x(s)ds$。则$\|T\|_\infty=0.1e<0.3<1$，$(1-T)^{-1}\in\mathscr{L}(X)$，且存在唯一解. 由逐步逼近法，对$k\geqslant2$，$\|x-x_k\|_\infty\leqslant(0.3)^k/(1-0.3)<0.1$。

2.14 $\left\|\sum_{j=0}^k K^j\right\|\leqslant\sum_{j=0}^k\|K^j\|\leqslant1+\sum_{j=1}^k M^j\frac{(b-a)^j}{(j-1)!}\leqslant1+M(b-a)e^{M(b-a)}$，在$\mathscr{L}(X)$中，$\Sigma_{j=0}^\infty K^j$收敛，$K^j\to0$，$j\to\infty$。于是得在$\mathscr{L}(X)$中，$\left(\sum_{j=0}^k K^j\right)(1-K)=(1-K)\sum_{j=0}^k K^j=1-K^{k+1}\to1$。$\Sigma_{j=0}^\infty K^j=(1-K)^{-1}$且得到volterra方程$(1-K)x=y$的解的唯一性。

2.15 $x\in\ker T\Longleftrightarrow Tx=0\Longleftrightarrow\forall y\in Y^*,\langle y,\ Tx\rangle=0\Longleftrightarrow\forall y\in Y^*,\langle T^*y,x\rangle=0\Longleftrightarrow\forall w\in\mathrm{Im}T^*,\langle w,x\rangle=0\Longleftrightarrow x\in(\mathrm{Im}T^*)^\perp$.用$T^*$代换$T$，并注意$T^{**}=T$，得

$(KerT)^*=\mathrm{Im}T$（由于它们是有限维的，我们研究闭子空间），从而$\mathrm{Im}T=Y\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}T^*=\{0\}\Longleftrightarrow T^*$正则（由于$\dim X=\dim Y$）。

2.16 $\|T\|^2=\sup_{\|x\|=1}(Tx,\ Tx)\leqslant\sup_{\|x\|=1}(x,\ T^*Tx)\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|T^*T\|\|x\|^2=\|T^*T\|$.
但$\|T^*T\|\leqslant\|T^*\|\|T\|=\|T\|^2$，故等式成立。

2.17 容易验证T的线性性。设$\{x_n\}\subseteq l^2$是有界序列：$\|x_n\|^2=\Sigma_{i\geq1}|x_n^i|^2\leqslant M$.设$y_n=Tx_n:y_n^i=\Sigma_{j\geq1}a_{ij}x_n^j$，$i,n=1,2,\cdots$，垂直序列$\{y_k^1\}_{k\in N}$在$\mathbb{C}$内有界，故有收敛的子序列$\{y^1_{n_1(k)}\}_{k\in N}$。垂直序列$\{y^2_{n_1(k)}\}_{k\in N}$在$\mathbb{C}$中也有界，故有收敛子序列$\{y^2_{n_2(k)}\}_{k\in N}$，如此下去。最后，对角序列$\{y_{n_k(k)}\}_{k\in N}$是在$l^2$内$\{y_n\}$的收敛子序列。设$a=\Sigma_{i,j\geq1}|a_{ij}|^2$，我们有

$$\|Tx\|^2=(\sum_i(\sum_j a_{ij}x_je_i),\ \sum_k(\sum_l a_{kl}x_le_k))$$

$$=\sum_i(\sum_j a_{ij}x_j)(\sum_l\overline{a}_{il}\overline{x}_l)$$

$$=\sum_i|((a_{ij})_{j=1},(x_j)_{j=1})|^2$$

$$\leqslant\sum_i\|(a_{ij})_{j=1}^\infty\|^2\|(x_j)_{j=1}\|^2=a\|x\|^2.$$

因此$\|T\|\leqslant a^{1/2}$。

2.18 若$\dim\mathrm{Im}T<\infty$，$T\in\mathscr{L}(X,Y)$，且$B\subseteq X$是有界的，则TB在$\mathrm{Im}T$内有界；TB的闭包$\overline{TB}$在$\mathrm{Im}T$内从而在Y内是紧的。

2.19 若$\|T_n-T\|\to0$，则$\|T_n\|\leqslant M$。设$x\in X$，$\varepsilon>0$，记$Tx=Tx-T_nx+T_nx$。对充分大的n，$\|Tx\|\leqslant\|Tx-T_nx\|+\|T_nx\|\leqslant(\varepsilon+M)\|x\|$，所以$T$连续。设$\{x_n\}$是$X$内的有界序列，$\|x_n\|\leqslant c$。则$\{T_1x_n\}$有收敛子序列$\{T_1x_{n_1(k)}\}$，

$\{T_2x_{n1(k)}\}$有收敛子序列$\{T_2x_{n2(k)}\}$，如此下去．我们推出$\{T_kx_{n_{k-1}(p)}\}_{p\in N}$有收敛的子序列$\{T_kx_{n_k(p)}\}_{p\in N}$。设$\varepsilon>0$；则$\|Tx_{n_k(k)}-Tx_{n_q(q)}\|\leqslant\alpha+\beta+\gamma$，其中$\alpha=\|Tx_{n_k(k)}-T_px_{n_k(k)}\|$，$\beta=\|T_px_{n_k(k)}-T_px_{n_q(q)}\|$，$\gamma=\|T_px_{n_q(q)}-Tx_{n_q(q)}\|$。固定$k$和$q$，选择$p$使得$\alpha<\varepsilon/3$，$\gamma<\varepsilon/3$不依赖于$k$和$q$。于是我们选取$k_0$和$q_0$使当$k>k_0$及$q>q_0$时蕴涵$\beta\subset\varepsilon/3$。

2.20 $\dim(\operatorname{Im}TA)=\dim T(\operatorname{Im}A)\leqslant\dim Tx=\dim(\operatorname{Im}T)>+\infty$. $\dim(\operatorname{Im}AT)=\dim A(\operatorname{Im}T)\leqslant\dim(\operatorname{Im}T)<+\infty$. 设$M=\operatorname{Im}T$及$N=\operatorname{Im}A$. 则$(AT)_{\restriction N}=(A_{\restriction M})(T_{\restriction N})$，$(TA)_{\restriction M}=(T_{\restriction N})(A_{\restriction M})$。在$M$和$N$的给定基下，$A_{\restriction M}$和$T_{\restriction N}$由长方形矩阵表示，结论显然可得。

2.21 $\{x_i\}$，$\{y_i\}$是M的两个基，$\{x_i^*\}$和$\{y_i^*\}$是伴随基．存在一个$m\times m$可逆矩阵(v_{ij})使得$y_i=\Sigma_i v_{ij}x_i$及$m\times m$可逆阵(u_{ij})使得$y_j^*=\Sigma_i u_{ij}x_i^*$。由于$\Sigma_k\overline{u}_{ki}v_{kj}=\delta_{ij}$，

$\Sigma_i\langle y_i^*,Ty_i\rangle=\Sigma_i\langle x_i^*,Tx_i\rangle$。

2.22 我们已知有限秩算子是紧的。反之，若P是紧投影且$B_M=\{x\in M;\ \|x\|\leqslant1\}$，其中$M=PX$本身是Banach空间，这是由于它是闭的，则$PB_M=B_M$是相对紧的。故$M$有一个相对紧的单位球，这意味着$\dim M<+\infty$。

2.23 $\forall x^*\in X^*$且$\wedge y\in X$，$\langle x^*,Py\rangle=\langle x^*,P^2y\rangle=\langle P^*x^*,Py\rangle=\langle P^*P^*x^*,y\rangle$，$(P^*)^2=P^*$. $M^*:=P^*x^*=\operatorname{Ker}(1-P^*)=(\operatorname{Im}(1-P))^{\perp}=(\operatorname{Ker}P^{\perp})=N^{\perp}$。$N^*:=(1-P)^*X^*=\operatorname{Ker}P^*=(\operatorname{Im}P)^{\perp}=M^{\perp}$。

2.24 若$z(z-1)\neq0$，

$$\left(\frac{1}{z}1+\frac{1}{z(z-1)}P\right)(z1-P)=1-\frac{1}{z}P+\frac{1}{(z-1)}P-\frac{1}{z(z-1)}P$$

$$=1.$$

2.25 设 $x\in H$，且 $y\in M$．由于 $x-P_Mx\in M^{\perp}$ 且 $P_Mx-y\in M$，$\|x-y\|^2=\|x-P_Mx+P_Mx-y\|^2=\|x-P_Mx\|^2+\|P_Mx-y\|^2$．故 $\forall y\in M$，$\|x-P_Mx\|\leqslant\|x-y\|$．

2.26 $\|P\|=\sup_{\|x\|=1}\|Px\|$．由于对 $x\in PX$，$Px=x$．所以当然有 $\|P\|\geqslant 1$．若 P 是正交投影，则

$$\|x\|^2=\|x-Px+Px\|^2=\|x-Px\|^2+\|Px\|^2,\ \|Px\|\leqslant\|x\|,$$

且 $\|P\|=1$．

若 P 不是正交投影，我们可求得 x 使得 $\|Px\|>\|x\|$ 且 $\|P\|>1$，

2.27 $a_{01}=1$，$a_{11}=0$，$b_{01}=b_{11}=0$，$a_{02}=a_{12}=0$．$b_{02}=b_{12}=0$，$x_1(t)=1$，$x_2(t)=t$，$\gamma_1(s)=-s$，$\gamma_2(s)=1$，$\beta_1(s)=-s$，$\alpha_1(s)=0$，$\beta_2(s)=s$，$\alpha_2(s)=s-1$．

2.28 $a_{01}=1$，$a_{11}=0$，$b_{01}=0$，$b_{11}=-1$，$x_1(t)=1$，$x_2(t)=t$，$\gamma_1(s)=-s$，$\gamma_2(s)=1$，$\beta_1(s)=\beta_2(s)-s$，$\alpha_1(s)=\beta_2(s)$，$\alpha_2(s)=\beta_2(s)-1$．

2.29 $a_{01}=1$，$a_{11}=-1$，$b_0=b_{11}=1$，$a_{02}=a_{12}=0$，$b_{02}=b_{12}=1$，$x_1(t)=1$，$x_2(t)=t$，$\beta_1(s)=-\frac{2}{3}(s+1)$，$\beta_2(s)=(s+1)/3$，$\alpha_1(s)=(s-2)/3$，$\alpha_2(s)=(s-2)/3$．

2.30 若 $T\in\mathscr{C}(X,Y)$ 且 T^{-1} 存在，则 $T^{-1}\in\mathscr{C}(X,Y)$．若又有 $\mathrm{Im}T=Y$，则 $\mathrm{Dom}(T^{-1})=Y$，故 $T^{-1}\in\mathscr{L}(X,Y)$．

2.31 当 $x\in C^2(0,1)$，$\|x\|_D=\sup_t[\,|x(t)|+|x''(t)+tx'(t)+t^2x(t)|\,]$．一般说来，$\|Tx\|_Y\leqslant\|x\|_X+\|Tx\|_Y=\|x\|_D$，故 $\|T\|_{D\to Y}\leqslant 1$．

2.32 $\int_0^1 y(t)x'(t)dt=\int_0^1 z(t)x(t)dt$，$\forall x\in D$，可化为

$$x(1)y(1)+\int_0^1(-y'(t))x(t)dt=\int_0^1 z(t)x(t)dt.$$

故 $T^*x=-x'$，其中 $\mathrm{Dom}T^*=\{x\in X;\ x$ 绝对连续，$x'\in X$，

$x(1)=0\}$.

2.33 $\int_0^1 y(-x''+2x'-x) = -x'y\Big|_0^1 - \int_0^1 x'y' + 2xy\Big|_0^1$

$$- 2\int_0^1 xy' - \int_0^1 xy$$

$$= x'(0)y(0) - x'(1)y(1) + \int_0^1 x(-y''-2y'-y).$$

所以$\mathrm{Dom}\,T^* = \{x\in L^2(0,1);\ x(0)=x(1)=0$，$x'$绝对连续，$x''\in L^2(0,1)\}$且$T^*x = -x''-2x'-x$.

2.34 $X = \left\{u\in L^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in L^2(\Omega)\right\}$, $\mathrm{Dom}\,T = \{u\in X;\ u(1,y)=u(0,y), u(x,1)=u(x,0) = 0$, $(\partial u/\partial x)(0,y)=0$, $\forall (x,y)\in\Omega\}$, 且$T=-\Delta$.

$$-\int_0^1\int_0^1 v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \int_0^1\int_0^1 v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= -\int_0^1\left[v(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx\right]dy$$

$$-\int_0^1\left[v(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}dy\right]dx$$

$$= -\int_0^1\left[v(1,y)\frac{\partial u(1,y)}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}u(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}u\,dx\right]dy$$

$$-\int_0^1\left[v(x,1)\frac{\partial u(x,1)}{\partial y} - v(x,0)\frac{\partial u(x,0)}{\partial y} + \int_0^1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}u\,dy\right]dx$$

$$= -\int_0^1 v(1,y)\frac{\partial u(1,y)}{\partial x}dy + \int_0^1\left(\frac{\partial v(1,y)}{\partial x}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial v(0,y)}{\partial x}\right)u(1,y)dy + \int_\Omega u\Delta v - \int_0^1 v(x,1)\frac{\partial u(x,1)}{\partial y}dx +$$

$$+\int_0^1 v(x,0)\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}dx.$$

$\mathrm{Dom}\,T^*=\{v\in X;\ v(1,y)=0,\ \partial v(1,y)/\partial x=\partial v(0,y)/\partial x,$ $v(x,1)=v(x,0)=0,\ \forall(x,y)\in\Omega\}$ 且 $T^*=-\Delta$.

2.35 见A:Taylor (1958)

2.36 由习题2.24，若 $P\neq 0$，$P\neq 1$，

$$\|(P-z)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{|z|\,|z-1|}\|P\|+\frac{1}{|z|}\quad\forall z\in\mathbb{C}-\{0,1\},$$

所以$\rho(P)=\mathbb{C}-\{0,1\}$且$\sigma(P)=\{0,1\}=P\sigma(P)$.设$M=PX$.对于任何 $x\neq 0$，若 $x\in M$，$Px=x$，若 $x\in(1-P)X$，$Px=0$。

2.37 T是拟幂零的$\Longleftrightarrow\gamma_\sigma(T)=0$；即$\max_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|=0\Longleftrightarrow\sigma(T)=\{0\}$。

2.38 $\|x_k-x\|=\|\Sigma_{p>k}Tp_y\|\leqslant\|y\|\Sigma_{p>k}\|T^p\|$。设 $\varepsilon>0$ 使得$r_\sigma(T)+\varepsilon<1$。存在 k_0 使当 $k>k_0$，$\|T^k\|<(r_\sigma(T)+\varepsilon)^k$，所以

$$\|x_k-x\|\leqslant\|y\|\sum_{p>k}(r_\sigma(T)+\varepsilon)^k=\frac{\|y\|}{1-(r_\sigma(T)+\varepsilon)}(r_\sigma(T)+\varepsilon)^{k+1}.$$

2.39 若$r_\sigma(L)<1$，则$(1-L)^{-1}$存在。于是$(1-L)^{-1}=\Sigma_{k\geqslant 0}L^k$。设 $L=tT$，则 $r_\sigma(tT)=|t|\,r_\sigma(T)<1\Rightarrow|t|<1/r_\sigma(T)\Rightarrow(1-tT)^{-1}=\Sigma_{k\geqslant 0}t^kT^k$。

2.40 若$r_\sigma(T)=0$，则$\sigma(T)=\{0\}$，所以$T_M:M\to M$相似于对角元为零的三角阵，这是由于$\sigma(T_M)=P\sigma(T_M)\subseteq\sigma(T)$．从而对某个整数 $k\leqslant\dim M$，$T_M^k=0$。

2.41 设$L=T-z_0$。L可逆，1－1映射 $z\mapsto 1/z$将$L^{-1}=R(z_0)$的扩充谱映射到L的谱上。即对 $z\in\sigma(T)$，$\hat{z}=z-z_0\mapsto 1/\hat{z}=1/(z-z_0)$。

$$R(z_0)-\frac{1}{z-z_0}=\frac{(z-z_0)R(z_0)-1}{z-z_0}$$

$$=\frac{(z-z_0)(T-z_0)^{-1}-(T-z_0)(T-z_0)^{-1}}{z-z_0}$$

$$=\frac{1}{z-z_0}(z-T)R(z_0),$$

$$\left(R(z_0)-\frac{1}{z-z_0}\right)^{-1}=-(z-z_0)(T-z)^{-1}(T-z+z-z_0)$$

$$=z_0-z-(z-z_0)^2R(z).$$

$$r_\sigma(R(z_0))=\max_{\lambda\in\sigma(R(z_0))}|\lambda|=\max_{\lambda\in\sigma(T)}\frac{1}{|\lambda-z_0|}$$

$$=\frac{1}{\min_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda-z_0|}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{dist}(z_0,\ \sigma(T))}.$$

2.42 $\sigma(T_2^{-1})=\phi$, $\sigma(T_3^{-1})=\left\{\frac{b-a}{\log k+2\pi in};\ n\in\mathbb{Z}\right\}$.

2.43 对 $x\in D=\mathrm{Dom}T$, $TR(z)x=(T-z+z)R(z)x=x+zR(z)x=R(z)Tx$. 关于 Γ 积分，得对 $x\in D$, $TPx=PTx$, 且显然 $R(z)P=PR(z)$. 同法可证余下的等式.

2.44 $(A-zB)x=Bf$, $y=Bx$, $g=Bf$. 则 $x=(A-zB)^{-1}Bf$, 故

$$y=Bx=B(A-zB)^{-1}Bf=B(A-zB)^{-1}g.$$

结论即得.

2.45 设 $X=C^1(0,1)$, 且 $\|x\|=\|x'\|_\infty+\|x\|_\infty$. 于是 $Bx(t):=x'(t)+tx(t)$ 在 $\mathscr{L}(X,Y)$ 内，其中 $Y=C(0,1)$ 且赋予范数 $\|\cdot\|_\infty$. $Ax(t):=x''(t)+tx'(t)+x(t)$ 在 $\mathscr{C}(X,Y)$ 内，且定义域 $D=\{x\in X;\ x''\in Y,\ x(0)=x(1)=0\}$. 故问题化为 $Ax=\lambda Bx$, $x\in D$, $x\neq 0$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

2.46　$\mathrm{i}x'(t)=\lambda x(t)$，$x'/x=-\lambda\mathrm{i}$，$x(t)=e^{-\lambda\mathrm{i}t}$，$x(0)=1=e^{-2\pi\lambda\mathrm{i}}\Rightarrow\lambda\in\mathbb{Z}.x_k(t)=r^{-k\mathrm{i}t}$，$k\in\mathbb{Z}$，$x=R(z)f\Longleftrightarrow(T-z)x=$ j．所以$\mathrm{i}x'-zx=$ j；因此$x(t)=a(t)e^{-z\mathrm{i}t}$，这里

$$a(t)=-\mathrm{i}\int_0^t e^{-z\mathrm{i}\xi}f(\xi)d\xi+C$$

且

$$C=-\frac{\mathrm{i}e^{-2\pi\mathrm{i}z}}{1-e^{2\pi\mathrm{i}z}}\int_0^{2\pi}e^{-\mathrm{i}z\xi}f(\xi)d\xi.$$

谱投影留给读者证明．注意象空间是一维的．

2.47　设$U:x\mapsto x'-x$，$x\in\Delta:=\{x\in X,x$绝对连续，$x'\in X$，$x(0)=x(1)\}\supset D$．由例2.23，$k=1$，$\sigma(U)=\{2\mathrm{i}j\pi-1$；$j\in\mathbb{Z}\}$，本征值是单的，本征投影可由习题2.46导出．由于$T=-v^2$，T有相同的本征向量，本征值为$\sigma(T)=\{4k^2\pi^2-1+4\mathrm{i}k\pi$；$k\in\mathbb{Z}\}$．显然，$\sigma(T^*)=\overline{\sigma(T)}$，或直接由$T^*=-V^2$得到，其中，$V:x\mapsto x'+x$，$x\in\Delta$，且$\sigma(V)=\{2\mathrm{i}k\pi+1$；$k\in\mathbb{Z}\}$．

2.48　见 Yosida（1965，p229）．

2.49　$Tx=0$有无穷多无关的解，例如所有使得$x(t)=f(t)/a(t)$的连续函数x，其中f是$[-1,1]$上的连续奇函数．例如$x_n(t)=t^{2n+1}/a(t)$，$x\in\mathbb{N}$．设λ为T的任意非零本征值，记$a(\varphi):=\int_{-1}^1 a(t)\varphi(t)dt$，则$T\varphi=\lambda\varphi$看作$(T\varphi)(s)=\lambda\varphi(s)=a(\varphi)b(s)$；因此$\varphi(s)=a(\varphi)b(s)/\lambda$，且$a(\varphi)\neq 0$．因此$\lambda$是单的且$b$确定了本征方向．于是

$$a(\varphi)=\int_{-1}^1 a(t)a(\varphi)\frac{1}{\lambda}b(t)dt$$

蕴涵$\lambda=\int_{-1}^1 a(t)b(t)dt$（因为$a(\varphi)\neq 0$）．

2.50 设 $x \in \mathbb{R}$ 且 $z<0$; $\|(T-z)x\|^2=((T-z)x,(T-z)x)=\|Tx\|^2-2z(Tx,x)+z^2\|x\|^2 \geqslant \|Tx\|^2+z^2\|x\|^2 \geqslant z^2\|x\|^2$，这是由于 $-2z>0$，且 $(Tx,x)>0$.所以对 $z>0$，$\|(T-z)^{-1}\| \leqslant 1/|z|$. 因此 $\sigma(T)$ 是非负的。

2.51 $T=\Sigma_k \lambda_k P_k$。设 $\mu_j=\lambda$ 是单的，$(T-\mu_j)=\Sigma_k \lambda_k P_k-\mu_j$。设 $x=x_Q+x_{1-Q}$，其中 $x_Q \in QH$，且 $x_{1-Q} \in (1-Q)H$。又设 $x_Q=\Sigma_j x_j$，$x_j \in P_j H$，

$$
\begin{aligned}
(T-\mu_j)x &= Tx_Q-\mu_j(x_Q+x_{1-Q}) \\
&= \sum_k \mu_k x_k-\mu_j \sum_k x_k-\mu_j x_{1-Q} \\
&= \sum_{k \neq j} (\mu_k-\mu_j)x_k-\mu_j x_{1-Q} \in \{x_j\}^{\perp}.
\end{aligned}
$$

令

$$
x=-\frac{1}{\mu_j} y+\frac{1}{\mu_j} \sum_{k \neq j} \mu_k \frac{(y,x_k)x_k}{\mu_k-\mu_j}+a x_j .
$$

则

$$
\begin{aligned}
(T-\mu_j)x = &-\frac{1}{\mu_j} T_y+\frac{1}{\mu_j} \sum_{k \neq j} \mu_k^2 \frac{(y,x_k)x_k}{\mu_k-\mu_j} \\
&+a\mu_j x_j+y-\sum_{k \neq j} \mu_k \frac{(y,x_k)x_k}{\mu_k-\mu_j}-a\mu_j x_j \\
= &-\frac{1}{\mu_j}\left[\sum_{k \neq j} \mu_k(y,x_k)x_k-\sum_{k \neq j} \mu_k^2 \frac{(y,x_k)x_k}{\mu_k-\mu_j}\right]+y \\
&-\sum_{k \neq j} \mu_k \frac{(y,x_k)x_k}{\mu_k-\mu_j}=y
\end{aligned}
$$

2.52 $Tx=-x''$，$(T-z)x=-x''-zx=f$，$x''+zx=-f$，$x(0)=x(1)=0$，$x=R(z)f$。对 $z=0$，$x''=-f$。由习题 2.27，得 $x(t)=-\int_0^1 g(t,s)f(s)ds$，其中

$$g(t,s)=\begin{cases}(s-1)t, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ (t-1)s, & 0\leqslant s<t<1.\end{cases}$$

可利用 Ascoli—Arzela 定理证明 $(R(z)f)(t)=-\int_0^1 g(t,s)f(s)ds$是紧算子。例如，可参阅例2.16。

第 三 章

3.1 对$x\in X$，有

$$\begin{aligned}\|(T-T_n)x\| &= \|(1-\pi_n)Tx+\pi_n Tx-\mathscr{T}_n\pi_n x\|\\ &\leqslant \|(1-\pi_n)Tx\|+\|\mathscr{T}_n\pi_n x-\pi_n Tx\|\\ &= \|(1-\pi_n)Tx\|+\|\mathscr{T}_n\pi_n x-\pi_n T\pi_n x+\pi_n T\pi_n x\\ &\quad -\pi_n Tx\|\\ &\leqslant \|(1-\pi_n)Tx\|+\|\mathscr{T}_n(\pi_n x)-\pi_n T(\pi_n x)\|\\ &\qquad +\|\pi_n T(\pi_n-1)x\|\\ &\leqslant \|(1-\pi_n)T\|\|x\|+\|(T_n-\pi_n T)_{\restriction X_n}\|\|\pi_n\|\|x\|\\ &\qquad +\|\pi_n\|\|T\|\|(\pi_n-1)x\|,\end{aligned}$$

因为π_n是一致有界的，上式趋于0。因此$T_n\xrightarrow{p}T$。取$\mathbf{X}_n\in\mathbf{X}_n$，对所有$n$，$\|x_n\|\leqslant c$。

$$\begin{aligned}\|(T-T_n)x_n\| &= \|Tx_n-\mathscr{T}_n\pi_n x_n\|\\ &\leqslant \|Tx_n-\pi_n Tx_n\|+\|\pi_n Tx_n-\mathscr{T}_n x_n\|\\ &= \|(1-\pi_n)Tx_n\|+\|(\mathscr{T}_n-\pi_n T)x_n\|\\ &\leqslant c(\|(1-\pi_n)T\|+\|(\mathscr{T}_n-nT)_{\restriction X_n}\|\end{aligned}$$

当$n\to\infty$时上式趋于0。$\{(T-T_n)x_n\}$是收敛序列（极限为0）。

3.2 $(T-T_n)x=(T-T_n)\pi_n x+T(1-\pi_n)x$，其中$\pi_n x_n\in X_n$且$\pi_n\xrightarrow{p}1$，这表明$T_n\xrightarrow{p}T$。对$x_n\in X_n$，$\|x_n\|\leqslant c$，$\|(T-T_n)x_n\|\leqslant c\|(T-T_n)_{\restriction X_n}\|\to 0$，$n\to\infty$。$(T-T_n)_{\restriction X_n}=$

$[(1-\pi_n)T]_{\restriction X_n}+[\pi_n T-T_n]_{\restriction X_n}$。因此 I 和 II 蕴涵 $\|(T-T_n)_{\restriction X_n}\|\to 0$。

3.3 由于 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(T-T_n)B$ 是相对紧的，所以对每个 n，$(T-T_n)B$ 也是相对紧的。因为在 $\mathscr{L}(x)$ 内 $T_n \xrightarrow{p} T$，则 $\sup\limits_{y\in(T-T_n)B}\|(T-T_n)y\|\to 0$。但 $\sup\limits_{y\in(T-T_n)B}\|(T-T_n)y\|=\sup\limits_{x\in B}\|(T-T_n)^2x\|=\|(T-T_n)^2\|$。

3.4 当 $n\in N_1\supset \mathbf{N}$，$x_n\to x$。因为在 $\mathscr{L}(x)$ 内 $T_n\xrightarrow{p}T$，所以 T_n 是一致有界的。于是 $(T-T_n)x_n=(T-T_n)(x_n-x)+(T-T_n)x$，且 $\lim_{n\in N_1}(T-T_n)x_n=0$。即，$y=0$。

3.5 首先注意到，对任何在 $\mathscr{L}(X)$ 内可逆的 S，T，有 $\Theta(S,T)=\Theta(S^{-1},T^{-})$；其次，我们说明若 $\Theta(S,T)<(1+\|T^{-1}\|^2)^{-1}/^2$，则对 $\mathscr{L}(Y,X)$ 内的 S^{-1}，T^{-1} 有

$$\|S^{-1}-T^{-1}\|\leqslant\frac{(1+\|T^{-1}\|^2)\delta(S^{-1},T^{-1})}{1-(1+\|T^{-1}\|^{1/2}\delta(S^{-1},T^{-1})}$$

这些结果便证明了 $\Theta(T_n,T)\to 0\Longrightarrow\|T_n^{-1}-T^{-1}\|\to 0$。

反之，

$$A(y):=\inf_{v\in T(D)}[\|y-v\|^2+\|T^{-1}y-T_n^{-1}v\|^2]^{1/2}$$

$$\leqslant\|T^{-1}y-T_n^{-1}y\|\leqslant\|T^{-1}-T_n^{-1}\|\|y\|,$$

$$A:=\sup_{\substack{y\in T(D)\\ \|y\|^2+\|T^{-1}y\|^2=1}}A(y)\leqslant\|T^{-1}-T_n^{-1}\|.$$

但 $A=\delta(T,T_n)$，于是若 $\|T^{-1}-T_n^{-1}\|\to 0$，则 $\delta(T,T_n)\to 0$。类似地在相同条件下 $\delta(T_n,T)\to 0$。因此 $\|T^{-1}-T_n^{-1}\|\to 0$ 蕴涵 $\Theta(T,T_n)\to 0$。

3.6 利用例3.8及第二章7.1中的等式（2.4）。

3.7 对充分大的n $\|T_n^{-1}\|\leqslant M$，对给定的D内的非零向量x及$\varepsilon=(1/2M)\|x\|$，存在N使得当$n>N$时$\|T_n^{-1}\|\leqslant M$，$\|T_nx-Tx\|<\varepsilon$。因此$\|T_nx\|-\varepsilon<\|Tx\|$。但$\|T_nx\|\geqslant(1/M)\|x\|$；故$(1/2M)\|x\|<\|Tx\|$。又有$T_n^{-1}x\to T^{-1}x$，$\forall x\in X$。于是$T^{-1}\in\mathscr{L}(x)$。

3.8 利用等式$T_n-z=T_n(1-zT_n^{-1})$。当$\|zT_n^{-1}\|=|z|\,\|T_n^{-1}\|\leqslant|z|M<1$时，$(1-zT_n^{-1})\in\mathscr{L}(x)$，即$|z|<1/M\Longrightarrow(T_n-z)^{-1}\in\mathscr{L}(x)$. 同时我们知道

$$\|(T_n-z)^{-1}\|\leqslant\|T_n^{-1}\|\|(1-zT_n^{-1})^{-1}\|\leqslant M\frac{1}{1-|z|M},$$

显然$T_n-z\xrightarrow{p}T-z$，故$T_n-z\xrightarrow{s}T-z$.

3.9 对任何$x\in D$，$\|(T_n-z_n-(T-z))x\|\leqslant\|(T_n-T)x\|+|z-z_n|\|x\|\to 0$；于是$T_n-z_n\xrightarrow{p}T-z$。现设$D$内的有界序列$\{x_n\}$使得

$$(T_n-z_n)x_n\to y,\quad n\in N_1\subset\mathbb{N}.$$

于是$(T_n-z)x_n\to y, n\in N_1$。但$T_n-z\xrightarrow{r}T-z$：因此$x_n\to x\in D, n\in N_1\subset N_1$，且$(T-z)x=y$。即$T_n-z_n\xrightarrow{r}T-z$. 对$D$内的任意$x$，$\|z_nT_nx-zTx\|\leqslant|z_n|\|T_nx-Tx\|+|z_n-z|\|Tx\|\to 0$。假设对$D$内的有界序列$\{x_n\}$，$y_n=z_nT_nx_n\to y$. 由于$z_n\to z\neq 0$，$T_nx_n=y_n/z_n$是有界的，且

$$\|T_nx_n-\frac{y}{z}\|\leqslant|1-\frac{z_n}{z}|\|T_nx_n\|+\frac{1}{|z|}\|z_nT_nx_n-y\|\to 0\ .$$

由于$T_n\xrightarrow{r}T$，$x_n\to x$，$n\in N_1\subset\mathbb{N}$，且$zTx=y$，这证明了$z_nT_n\xrightarrow{r}zT$。

3.10 首先注意到 $T_n \xrightarrow{p} T \Longrightarrow \|T_n\| \leqslant M$，且 $\|T_nU_nx - TUx\| \leqslant M\|U_nx - Ux\| + \|T_nUx - TUx\| \to 0$，因此 $T_nU_n \xrightarrow{p} TU$. 其次取 X 内的一个有界序列 $\{x_n\}$。因为 $U_n \xrightarrow{p} U$，$\|U_n\| \leqslant c$，$U_nx_n = u_n$ 在 X 内是有界的．若当 $n \in N_1$，$T_nU_nx_n \to y$，这意味着 $T_nu_n \to y$，$n \in N_1$．但 $T_n \xrightarrow{r} T$，因此 $\exists N_2 \subset N_1$ 及 $\exists u \in X$ 使得对 $n \in N_2, u_n \to u$，且 $Tu = y$．这意味着 $U_nx_n \to u$，$n \in N_2$，且由于 $U_n \xrightarrow{r} U$，$\exists N_3 \subset N_2$ 及 $\exists x \in X$ 使当 $n \in N_3$、$x_n \to x, Ux = u$．$TUx = Tu = y$．因此 $T_nU_n \xrightarrow{r} TU$.

3.11 对 $z \in \rho(T)$，$R(z_0) - t = t(z - T)R(z_0)$ 且 $(R(z_0) - t)^{-1} = -(1/t) - (1/t^2)R(z)$.

（i） $T_n - z \xrightarrow{s} T - z$，并且 $R_n(z)$（从而 $(R_n(z_0) - t)^{-1}$）是一致有界的．

（ii） $(R_n(z_0) - t)^{-1}$，（从而 $R_n(z)$）是一致有界的．

（iii） 利用（i）及命题 3.17 对 $z \neq \lambda$，$t \neq v$ 可证．注意，若 $R_n(z_0) \xrightarrow{r} R(z_0)$，则对 $z = \lambda$ 及 $t = v$，（iii）成立．事实上，若 $(R_n(z_0) - \nu)x_n = \nu(\lambda - T_n)R_n(z_0)x_n \to y$，则 $u_n = R_n(z_0)x_n \to u = R(z_0)y$ 且 $x_n \to x$，$(R(z_0) - \nu)x = y$.

（iV） 设 $\{x_n\}$ 使得 $\|x_n\| \leqslant M$，$x_n \in D, (T_n - z)x_n = (1/t)(T_n - z_0)(R_n(z_0) - t)x_n \to y$；由于 $R_n(z_0) \xrightarrow{p} R(z_0)$，$(R_n(z_0) - t)x_n \to R(z_0)y$，由 $R_n(z_0) - t$ 的正则性及 $(T - z)x = y$ 有 $x_n \to x$．注意 $z = \lambda$ 及 $t = \nu$ 是可能的．

3.12 $T_n - z\pi_n \xrightarrow{d-r} T - z \Longleftrightarrow T_n - z\pi_n \xrightarrow{d-s} T - z \underset{z \neq 0}{\Longleftrightarrow} T_n - z \xrightarrow{s} T - z \Longleftrightarrow T_n - z \xrightarrow{r} T - z$.

3.13 设有界序列$\{x_n\}$，$(x_n\in X_n)$，使得 $(T_n-z\pi_n)x_n\to y$，$n\in N_1$。于是 $(T_n-T)x_n+(T-z\pi_n)x_n\to y$，$n\in N_1$，$-R(z)(T-T_n)x_n+x_n\to R(z)y$。由于 $T_n\xrightarrow{d-c}T$，则 $(T-T_n)x\to u$，$n\in N_2\subset N$。因此 $x_n\to R(z)(y+u)=x$，$n\in N_2$ 且 $u=0$（习题3.4）。故 $(T-z)x=y$。

3.14 设有界序列$\{x_n\}$，$x_n\in D_n$，$\|x_n\|_D\leqslant c$ 使得在 X 内 $(T_n-z)x_n\to y$。于是在 X 内，$x_n\to x$，$n\in N_1\subset\mathbb{N}$且$T_nx_n\to y+zx$，$n\in N_1$。由正则性假设 在$\mathscr{L}(\widehat{D},X)$ 内 $T_n\xrightarrow{d-r}T$，在 $\widehat{D}$内，$x_n\to x$，这证明了在$\mathscr{L}(\widehat{D},X)$内$T_n-z\pi_n\xrightarrow{d-c}T-z$.

3.15 我们有下列等价方程

$$(T_n+\Delta T_n)(x_n+\Delta x_n)=y_n+\Delta y_n$$

$$T_n(1+T_n^{-1}\Delta T_n)(x_n+\Delta x_n)=y_n+\Delta y_n$$

$$[1-T_n^{-1}(-\Delta T_n)](x_n+\Delta x_n)=T_n^{-1}(y_n+\Delta y_n)$$

若 $\|T_n^{-1}\|\leqslant 1/M$，且$\varepsilon<M$，则 $\|T_n^{-1}\|\,\|\Delta T_n\|\leqslant\varepsilon/M<1$，且

$$\|(1+T_n^{-1}\Delta T_n)^{-1}\|=\|\sum_{k=0}^{\infty}(-T_n^{-1}\Delta T_n)^k\|\leqslant\frac{1}{1-\|T^{-1}\Delta T_n\|}.$$

$$\Delta x_n=(1+T_n^{-1}\Delta T_n)^{-1}T_n^{-1}(y_n+\Delta y_n)-T_n^{-1}y_n$$

$$=T_n^{-1}\Delta y_n+[\sum_{1}^{\infty}(-T_n^{-1}\Delta T_n)^k]T_n^{-1}(y_n+\Delta y_n).$$

$$\|\Delta x_n\|\leqslant\frac{a}{M}+\frac{1}{M}\ \frac{\varepsilon}{M-\varepsilon}(a+C)=\beta.$$

3.16 由引理3.22，对$\forall t\in\delta_r'$，$T(t)$ 在域D上是闭的，并且对 $z\in\Gamma$，$T(t)-z$ 有有界逆，因此 $\Gamma\subset\rho(T(t))$。设Δ是圆盘$\{t;\ |t|<1/\rho\}$，$\rho<r_\Gamma'$。显然，$\Delta\supset\delta_r'$我们求得$\tau\in\Delta$及

$z_0\in\Gamma$，$|\tau|r'_\Gamma\geqslant|\tau|r_\sigma[HR'(z_0)]\geqslant1$. 设$r_0:=r\sigma[HR'(z_0)]$，$\mu_0\in\sigma[\tau HR'(z_0)]$使得$|\mu_0|=|\tau|r_0$. $\tau'=\tau/\mu_0$满足$|\tau'|=1/r_0\leqslant|\tau|$；因此$\tau'\in\Delta$。且有

$$\mu_0\left(T'-\frac{\tau}{\mu_0}H-z_0\right)R'(z_0)=\mu_0-\tau HR'(z_0),$$

其中右端算子没有有界逆。因此当$\tau'\in\Delta$，$z_0\notin\rho(T'-\tau'H)$，且δ'_Γ是极大值。

3.17 域D上的闭算子T属于$\mathscr{L}(\widehat{D},X)$. 因为$H\in\mathscr{L}(\widehat{D},X)$，对$\Gamma$上的$z$，$HR'(z)\in\mathscr{L}(X)$。设$W=\{H\in\mathscr{L}(\widehat{D},X)$；$\max_{z\in\Gamma}r\delta[HR'(z)]<1\}$。$W$是平衡集，当且仅当$\forall\mu\in C$，且$\forall H\in W$，$|\mu|\leqslant1\Longrightarrow\mu H\in W$。对$|\mu|\leqslant1$，$\gamma_\sigma(\mu HR'(z))\leqslant r_\sigma(HR'(z))$；因此$W$是平衡。对任何$\Gamma$上的$z$，$1-HR'(z)$是$X$内的一个同胚。$(T'-H-z)^{-1}=R'(z)\,(1-HR'(z))^{-1}$属于$\mathscr{L}(X,\widehat{D})$。这表明$T'-H\in\mathscr{L}(X)$且$\Gamma\subset\rho(T'-H)$。设$W'$是平衡集使得$W\subset W'$，$W'\neq W$。设$H\in W'$，$H\notin W$。我们可求得$z_0\in\Gamma$，$\mu_0\in\mathbb{C}$，使得$\rho_0:=r\delta(HR'(z_0))\geqslant1$，$\mu_0\in\sigma[(1/\rho_0)HR'(z_0)]$，且由于，$r\delta[(1/\rho_0)HR'(z_0)]=1$，$|\mu_0|=1$。$1/\rho_0\,|\mu_0|=1/\rho_0\leqslant1$，因此$(1/\rho_0\mu_0)H\in W'$。且

$$\mu_0\left(T'-\frac{1}{\rho_0\mu_0}H-z_0\right)R'(z_0)=\mu_0-\frac{1}{\rho_0}HR'(z_0),$$

其中右端算子没有有界逆。因此$z_0\notin\rho(T'-(1/\rho_0\mu_0)H)$。这证明了$W$是最大值。

这个习题取自Lemordant(1980)。它与习题3.16类似.它表明了如何研究不引入复参数t时,摄动上的算子族的相关性.

3.18 设$t\in\sigma'_\Gamma$，且$|t|\leqslant1$。

$$P(t)-P'=\frac{-1}{2i\pi}\sum_{k=1}^{\infty}t^k\int_\Gamma R'(z)[HR'(z)]^k dz,$$

$$\|P(t)-P'\|\leqslant\frac{\text{meas}\,\Gamma}{2\pi}M\frac{a}{1-a},$$

其中 $a:=\max_{z\in\Gamma}\|HR'(z)\|$ 且 $M:=\max_{z\in\Gamma}\|R'(z)\|$. 由假设

$$a<\left(1+\frac{\text{meas}\,\Gamma}{2\pi}M\|\varphi'^*\|\right)^{-1}.$$

因此 $\|P(t)-P'\|<1/\|\varphi'^*\|$ 且 $|\langle P(t)\varphi',\varphi'^*\rangle-1|<1$，这证明了对 $|t|\leqslant 1,\langle P(t)\varphi',\varphi'^*\rangle\neq 0$. 注意到若 $M\|\varphi'^*\|$ 由

$$\max_{z\in\Gamma}\|R'^*(z)\varphi'^*\|$$

来代替，则可得到较弱的条件.

3.19 $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $x'=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, 且 $H=A-B=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$. 易见 $0\in\rho(A)\cap\rho(B)$ 且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $HA^{-1}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}\\-1&0\end{pmatrix}$, $r'=r_\sigma(HA^{-1})=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$.

计算 $A'H=\begin{pmatrix}0&-1\\-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$, $(A^{-1}H)^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. 若假设

$$(A^{-1}H)^{2k}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2^k}&0\\0&\frac{1}{2^k}\end{pmatrix},$$

我们以 $(A^{-1}H)^2$ 乘之，得

$$(A^{-1}H)^{2(k+1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{k+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^{k+1}} \end{pmatrix};$$

因此对$\forall k \in \mathbb{N}$，上述关系是正确的。以相同方法我们可说明对所有整数k，

$$(A^{-1}H)^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2^k} \\ -\frac{1}{2^{k+1}} & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$u_{2k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2^{k+1}} \end{pmatrix}, \quad u_0 = x' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因此精确解

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \begin{pmatrix} \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ -\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

于是级数几何收敛，其公比为：

$$1/\sqrt{2} = r\sigma(HA^{-1}) = \|(HA^{-1})^2\|^{1/2}.$$

3.20　注意到由于$x = R(z)f$，$R(z) = R'(z)\Sigma_{i=0}^{\infty}(HR'(z))^i$，$x_k = R'(z)Hx_{k-1} + x' = \Sigma_{i=0}^{k}(R'(z)H)^i x'$，且$x' = R'(z)f$，于是

$$x - x_k = R'(z) \sum_{i=0}^{\infty} (HR'(z))^i f - \sum_{i=0}^{k} (R'(z)H)^i R'(z) f.$$

但 $(R'(z)H)^i R'(z) = R'(z)(HR'(z))^i$；因此

$$x - x_k = R'(z) \sum_{i=k+1}^{\infty} (HR'(z))^i f$$

$$= R'(z)(HR'(z))^{k+1} \sum_{i=0} (HR'(z))^i f$$

$$= R'(z)(HR'(z))^k HR'(z) \sum_{i=0}^{\infty} (HR'(z))^i f$$

$$= R'(z)(HR'(z))^k HR(z) f$$

$$= R'(z)(HR'(z))^k Hx.$$

给定 $\varepsilon > 0$，构造$\|\cdot\|_*$ 等价于$\|\cdot\|$使得$\|HR'(z)\|_* \leqslant r'_z + \varepsilon$。于是，由于$R'(z)$一致有界，则

$$\|x - x_k\| \leqslant C(r'_z + \varepsilon)^k.$$

3.21 见习题1.53的解.

3.22 由(3.23)得方程 $(1-P')T'\eta_k - \lambda'\eta_k = B_k\varphi'$其中 $Q_k = \langle \cdot, \varphi'^* \rangle \eta_k$，$Q' = P' = \langle \cdot, \varphi'^* \rangle \varphi'$，且$\eta_k \in (1-P')X$. 计算

$$B_k\varphi' = (1-P')H\eta_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} Q_i H\eta_{k-i-1} + \sum_{i=1}^{k-1} Q_i T'\eta_{k-i},$$

$k \geqslant 2$. 设$\nu_k = \langle -H\eta_{k-1}, \varphi_i^* \rangle$，解得：

$$B_k\varphi' = (1-P')H\eta_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \nu_{k-i}\eta_i + \sum_{i=1}^{k-1} Q_i T'\eta_{k-i}.$$

但 $Q_i T'\eta_{k-i} = Q_i T'(1-P')\eta_{k-i} = Q_i(1-P')T'\eta_{k-i}$ 且

$Q_i(1-P')=Q_i(1-Q')=0$. 注意到$\Sigma_{i=1}^{k-1}\nu_{k-i}\eta_i=\Sigma_{i=1}^{k-1}\nu_i\eta_{k-i}$.

$$(1-P')T'\eta_k-\lambda'\eta_k=(1-P')H\eta_{k-1}+(1-P')\sum_{i=1}^{k-1}\nu_i\eta_{k-i},$$

$$(1-P')(T'-\lambda')(1-P')\eta_k=(1-P')\Big[H\eta_{k-1}+\sum_{i=1}^{k-1}\nu_i\eta_{k-i}\Big],$$

且

$$\eta_k=S'\Big[H\eta_{k-1}+\sum_{i=1}^{k-1}\nu_i\eta_{k-i}\Big],\quad k\geqslant 2.$$

由于$S'\eta_0=S'\varphi'=0$即得（3.20）.

3.23 $Q'P(t)Q'=\Sigma_{i=1}^{m}\langle\cdot,y_i\rangle\langle P(t)x_i,y_i\rangle x_i$. 因此$Q'P(t)Q'-Q'$是秩为$m$的算子。它在基$\{x_i\},\{y_i\}$下的矩阵为对角形：$\langle P(t)x_i,y_i\rangle-1$。因此

$$\begin{aligned}r_\sigma(Q'(P(t)-P')Q')<1&\Longleftrightarrow\max_i|\langle P(t)x_i,y_i\rangle-1|<1\\&\Longleftrightarrow 0<\max_i\langle P(t)x_i,y_i\rangle<2.\\&\Longrightarrow Q'P(t)x_i\neq 0,\ i=1,\cdots,m.\end{aligned}$$

若$m=1$，且$Q'=P'$，这便给出（3.17）中的条件.

3.24 设$T'=Q'T'Q'+(1-Q')T'Q'+Q'T(1-Q')+(1-Q')T(1-Q')$.由于$Q'X=M'=P'X$,注意到$(1-Q')T'Q'X=(1-Q')T'M'\subseteq(1-Q')M'=(1-Q')Q'M'=\{0\}$。因此（$1-Q')T'Q'=0$，且记

$$T'=\begin{pmatrix}T_1'&T_2'\\0&T_4'\end{pmatrix},$$

其中 $T_1'=Q'T'_{|M'}$, $T_2'=Q'T'_{|W}$, $T_4'=(1-Q)T'_{|W}$这表明

$$(T'-z)^{-1}=\begin{pmatrix}(T_1'-z)^{-1} & -(T_1'-z)^{-1}T_2'(T_4'-z)^{-1}\\ 0 & (T_4'-z)^{-1}\end{pmatrix}$$

且$\sigma(T')=\sigma(T_1')\cup\sigma(T_4')$，因此$\{0\}\cup\sigma(T')=\sigma(Q'T'Q')\cup\sigma((1-Q')T'(1-Q'))$。

要证这两个谱除了零外不交，只需证明$\sigma(T_1')\cap\sigma(T_4')=\phi$. 由于$P'X=Q'X$，注意到$\sigma(T_1')$是$\sigma(T')$在$\Gamma$内的部分. 对任何$\mu'\in\sigma(T_1')$，存在$z\in\mathbb{C}$使得$\mu'\notin\sigma(T'+zP')=\sigma(Q'(T'+zP')_{|M'})\cup\sigma(T_4')$；因此$\mu'\notin\sigma(T_4')$。故$\sigma(T_1')\cap\sigma(T_4')=\phi$。这证明了$\sigma(T_4')$是$\sigma(T')$在$\Gamma$外的部分.

3.25　由定义$\sigma(T_1')=\{\mu_i'\}_1^m$。因此$\{\mu_i'-\hat{\lambda}'\}_1^m=\sigma(U'_{M'})$. $\sigma(T_4')=\sigma(T')-\{\mu_i'\}_1^m$；因此

$$\mathring{T}_{\hat{\lambda}'}:=(1-Q')(T'-\hat{\lambda}')_{|W}$$

的谱是$\sigma(T_4')$平移了$\hat{\lambda}'$。总之

$$\sigma(U'_{|M'})\subset\{z;|z-\hat{\lambda}'|\leqslant a\},$$

$$\sigma(\mathring{T}'_{\hat{\lambda}'})\subset\{z;|z-\hat{\lambda}'|\geqslant b\}.$$

若$b>0$，$\hat{\lambda}'$不属于$\mathring{T}'_{\hat{\lambda}'}$的谱.

3.26　简单的代数推广.

3.27　记b_k为(3.27)的右端. $B_k=\begin{pmatrix}0\\ b_k\end{pmatrix}$, $Q_k=\begin{pmatrix}0\\ \mathring{\eta}_k\end{pmatrix}$, $H_1'=H_2'=0$。因此(3.23)化为

$$(T_4'-a_{ii}I)\mathring{\eta}_k=-H_4'\mathring{\eta}_{n-1}+\sum_{j=1}^{k-1}\mathring{\eta}_j+T_2'\mathring{\eta}_{k-j},\quad k\geq 2.$$

因为 $\nu_k = T_2'\eta_k$，所以 $T_2'\eta_{k-j} = \nu_{k-j}$。由 $\varphi_k = \Sigma_{j=1}^{k}\eta_j$ 得 (3.27).(3.27)即为(1.14)，其中 $y = e_1$，并注意 $e_i^T H'\eta_k = 0$。

3.28 显然。

$$u' = (\times\ \times \cdots \times\ \underset{\uparrow\, i}{1}\ 0 \cdots 0)^T,\quad v' = (\times\ \times \cdots \times\ \underset{\uparrow\, i}{0}\ 1\ 0 \cdots 0)^T$$

是三角阵 T 的不变子空间的基，相应于 a_{ii} 和 $a_{i+1,\ i+1}$。因此若 $\varepsilon = \|H\|$ 是充分小的，$\|u' - u\| \leqslant c\varepsilon$，$\|v' - v\| \leqslant c\varepsilon$ 蕴涵 $e_i^T u \neq 0, e_{i+1}^T v \neq 0$。

3.29 设 $a: = \max(|\alpha - \lambda|; \lambda \in \sigma(B)), b: = \min(|\alpha - \lambda|; \lambda \in \sigma(A))$。若 $a < b$，$X_i \longrightarrow X$，且其收敛速率可任意接近 a/b。这比条件 $\sigma(B) \cap \sigma(A) = \Phi$ 更强，且为 X 存在唯一的充分必要条件．因为不需要 A 和 B 的 Schur 分解，所以得到一个较简单的算法．

第 四 章

4.1 设 B 是 $X = C(a,b)$ 中的有界集．$\exists M_B > 0$ 使对 $\forall x \in B$，$\|x\|_\infty \leq M_B$。设 $C_k > 0$ 使得

$$\sup_{a \leq t \leq b} \int_a^b |k(t,s)|\,ds \leqslant C_k.$$

设 $x \in B$，$\|Tx\|_\infty \leqslant C_k(b-a)M_B$，

于是 TB 是 X 内的有界集。现设 $t_1, t_2 \in [a,b]$，$X \in B$：

$|Tx(t_1) - Tx(t_2)| \leqslant M_B \int_a^b |k(t_1,s) - k(t_2,s)|\,ds$，当 $t_1 \to t_2$ 时，上式关于 x 一致趋于0。因此 TB 是等度连续的。最后因为 $\|Tx_1 - Tx_2\|_\infty \leq C_k(b-a)\|x_1 - x_2\|_\infty$，所以 T 是连续算子。这证明了 T 是紧的．在定理4.1中设 $p = 1$ 即得．

4.2 $\delta(\{x\}, X_n) = \sup\limits_{\substack{x \in \{x\} \\ \|x\| = 1}} \inf\limits_{y \in X_n} \|x - y\|$

$$= \inf_{y \in X_n} \left\| \frac{x}{\|x\|} - y \right\| = \frac{1}{\|x\|} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|$$

$$= \frac{1}{\|x\|} \delta_n(x).$$

4.3 $\|x - \pi_n x\| = \inf_{y \in E_n} \|x - y\| = \mathrm{dist}(x, E_n)$。

4.4 $(\pi_n x)(t) = \Sigma_{i=1}^n \chi_i(t) P_i(t)$，其中$P_{i \restriction \Delta_i} \in \mathbb{P}_r$，$\chi_i$在$\Delta_i$上为1，在$[a,b] \setminus \Delta_i$上为0。

$$\|x - p_i\|_{L^2(\Delta_i)}^2 = \inf_{p \in \mathbb{P}_r} \|x - p\|_{L^2(\Delta_i)}^2,$$

$$\|x - \pi_n x\|_{L^2(a,b)} = \left\| \sum_{i=1}^n \chi_i x - \sum_{i=1}^n \chi_i p_i \right\|_{L^2(a,b)}$$

$$= \sum_{i=1}^n \|x - p_i\|_{L^2(\Delta_i)} = \sum_{i=1}^n \inf_{p \in \mathbb{P}_r} \|x - p\|_{L^2(\Delta_i)}$$

$$= \inf_{p \in \mathbb{P}_{r,\Delta}} \|x - p\|_{L^2(a,b)} = \mathrm{dist}_2(x, \mathbb{P}_{r,\Delta}).$$

其余留给读者.

4.5 见定理7.5和推论7.6.

4.6 在每个Δ_i上，$x_{\restriction \Delta_i}$是连续的且其Lagrange插值$L_n(x_{\restriction \Delta_i})$有明确定义。且$L_n^2(x_{\restriction \Delta_i}) = L_n(x_{\restriction \Delta_i})$。$x \in C(a,b)$，$x \mapsto L_n x$是到$\mathrm{P}_{r,\Delta} \subset L^\infty(a,b)$的映射，且在$L^\infty(a,b)$内，$L_n x \to x$。利用定理3.1得$\|L_n\|_{C \to L^\infty} < \infty$。

4.7 $\dim \mathbb{P}_{r-1} = r$，$\dim \mathbb{P}_{r-1,\Delta} = nr$。在每点$t_i$ $i = 1, \cdots, n-1$，我们利用$r-1$个连续性条件，因此$S_{r,\Delta}$的元满足$(n-1)(r-1)$个线性无关的约束。这样，我们得到$\dim S_{r,\Delta} = nr - (n-1)(r-1) = n + r - 1$。

4.8 $I_n(r)=\sum_{i=0}^{n} r(t_i)\underbrace{\int_0^1 \frac{e_i(t)}{\sqrt{t}}dt}_{w_i}$

$$w_0=\int_0^h \frac{1}{h}(h-t)\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{4}{3}h^{1/2},$$

$$w_n=\int_{1-h}^1 \frac{1}{h}(t-1+h)\frac{dt}{\sqrt{t}}=2-\frac{4}{3}\ \frac{2-h+\sqrt{1-h}}{1+\sqrt{1-h}},$$

$$w_i=\int_{(i-1)h}^{ih} \frac{1}{h}(t-(i-1)h)\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$+\int_{ih}^{(i+1)h} \frac{1}{h}((i+1)h-t)\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$=\frac{4}{3}h^{1/2}[(i-1)^{3/2}-2i^{3/2}+(i+1)^{3/2}],\quad 0<i<n.$$

对 $t\in[t_{j-1},t_j]$ 有 $r(t)-\pi_n r(t)=r(t)-r(t_{j-1})e_{j-1}(t)-r(t_j)e_j(t)$。$\exists\xi_j^1\in(t_{j-1},t)$ 使得 $r(t)=r(t_{j-1})+(t-t_{j-1})r'(t_{j-1})+\frac{1}{2}(t-t_{j-1})^2r''(\xi_j^1)$。$\exists\xi_j^2\in(t_{j-1},t_j)$ 使得 $r(t_j)=r(t_{j-1})+hr'(t_{j-1})+\frac{1}{2}h^2r''(\xi_j^2)$。$e_{j-1}(t)+e_j(t)=1$ 且 $e_j(t)=(1/h)(t-t_{j-1})$. 于是有 $r(t)=\pi_n r(t)=\frac{1}{2}[(t-t_{j-1})^2r''(\xi_j')-h^2r''(\xi_j^2)e_j(t)]$。于是 $\sup_{t\in\Delta_j}|r(t)-\pi_n r(t)|\leqslant(1/n^2)\sup_{\xi\in\Delta_j}|r''(\xi)|$. 由此得

$$|(I-I_n)(r)|\leqslant\sup_{0<t<1}|r(t)-\pi_n r(t)|\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$\leqslant \frac{2}{n^2} \sup_{0<t<1} |r''(t)|.$$

4.9 $x=(x_j)_1^\infty \in l^2$, $b=(b_i)_1^\infty \in l^2$, $(Tx)_i = \Sigma_{j=1}^\infty a_{ij} x_j$. T是有界的：$\|T\|^2 \leqslant \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 < \infty$. 由关于$E_n=\{e_1, \cdots, e_n\}$的投影法解出$Tx-x=b$. $\pi_n(T-1)x_n=\pi_n b=\Sigma_{j=1}^n b_j e_j$. 即，$\langle (T-1)x_n-b, e_j\rangle = 0$, $j=1, \cdots, n$. $x_n=\Sigma_{i=1}^n x_i^{(n)} e_i$，其中$x_i^{(n)}$是

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(n)} - x_i^{(n)} = b_i, \quad i=1, \cdots, n$$

的解．解的唯一性需要条件$1 \notin \sigma(A)$．例如，当$\Sigma_{i,j}|a_{ij}|^2 < 1$时，它是满足的，因为此时$\|T\| < 1$并且$(1-T)^{-1}$存在且有界．

4.10 设$\{e_i\}_1^n$（或$\{f_i\}_1^n$）是X_n（或Y_n）的基，伴随基为$\{e_i^*\}_1^n$（或$\{f_i^*\}_1^n$）。$\pi_n x = \Sigma_{i=1}^n \langle x, f_i^*\rangle f_i$，(4.6) 化为

$$\sum_{j=1}^n \langle Te_j, f_i^*\rangle \xi_{jn} - z\sum_{j=1}^n \langle e_j, f_i^*\rangle \xi_{jn} = \langle f, f_i^*\rangle,$$

$$i=1, \cdots, n.$$

(4.7) 化为：

$$\sum_{j=1}^n \langle Te_j, f_i^*\rangle u_{jn} = \lambda_n \sum_{j=1}^n \langle e_j, f_i^*\rangle u_{jn}, \quad i=1, \cdots, n.$$

4.11 由条件 (4.8) 得π_n'是连续算子．因为$\pi_n \tilde{\pi}_n^{-1} = \tilde{\pi}_n \pi_n^{-1} = 1_{Y_n}$，$\pi_n'^2 x = \tilde{\pi}_n^{-1}\pi_n \tilde{\pi}_n^{-1} x = \pi_n' x, \forall x \in X$. π_n是Y_n上

满射且$\widetilde{\pi}_n^{-1}$是由Y_n到X_n的双射，故π_n'是X_n上的投影．将$\widetilde{\pi}_n^{-1}$作用于方程（4.6）和（4.7）．

4.12　$\theta_n=\cos\alpha_n$，其中α_n是E_n和F_n所夹的锐角，$\tau_n=\sin\alpha_n$．$\theta_n<1\Longleftrightarrow\tau_n>0\Longleftrightarrow 1/\tau_n=\|\widetilde{\pi}_n^{-1}\|<\infty$．

4.13　$\langle x,y\rangle_T=\langle x,Ty\rangle$，$\|Tx_n-f\|=\min_{y\in E_n}\|Ty-f\|$．对$v_n=Tx_n$，$\|v_n-f\|=\min_{w\in TE_n=F_n}\|w-f\|$．$\forall w\in F_n$，$\langle v_n-f,w\rangle=0$，$\forall v\in E_n$，$\langle v_n-f,Tv\rangle=0$，$\langle Tx_n-f,v\rangle_T=0$，$x_n\in E_n$，有$\pi_n^T(Tx_n-f)=0$，其中$\pi_n^T$是$E_n$上的$T$—正交投影．

4.14　$r=f-(T-z)\widetilde{x}$，$v=x-\widetilde{x}$．$(T-z)v=r$．设$w=Tv$，$w-zv=r$，

$$(T-z)w=Tr,\quad v=\frac{1}{z}(w-r)\ .$$

由投影：

$$(\pi_nT-z)w_n=\pi_nTr,\ w_n\in X_n,\quad v_n=\frac{1}{z}(w_n-r).$$

$$x_n''=\widetilde{x}+\frac{1}{z}(w_n-f+(T-z)\widetilde{x})$$

$$=\frac{1}{z}w_n-\frac{1}{z}f+\frac{1}{z}T\widetilde{x}.$$

4.15　$\langle(T-z)x_n,e_i\rangle_{L^2}=\langle f,e_i\rangle_{L^2}$，$i=1,\cdots,n$．即

$$\int_a^b\left[\int_a^b k(t,s)x_n(s)ds-zx_n(t)\right]\overline{e_i(t)}\,dt$$

$$=\int_a^b f(t)\overline{e_i(t)}\,dt,$$

$$x_n(s)=\sum_{j=1}^n\xi_je_j(s).$$

我们有

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j\int_a^b\left[\int_a^b k(t,s)e_j(s)ds-ze_j(t)\right]\overline{e_i(t)}dt$$

$$=\int_a^b f(t)\overline{e_i(t)}dt,\qquad i=1,\cdots,n.$$

由于$\{e_j\}$是正交的，在应用求积规则之后并注意$\{w_i\}_1^n$是权，$\{t_i\}_1^n$是节点，我们得到

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j\left[\sum_{l=1}^{n}\int_a^b w_l k(t_l,s)e_j(s)ds\,\overline{e_i(t_l)}-z\right]$$

$$=\sum_{l=1}^{n}w_l f(t_l)\overline{e_i(t_l)},\qquad i=1,\cdots,n.$$

用$\Sigma_{l=1}^{n}w_l e_j(t_l)\overline{e_i(t_l)}\approx\delta_{ij}$来逼近$\int e_j(t)\overline{e_i(t)}dt\approx\delta_{ij}$. $(w_j\overline{e_i(t_j)})$的逆取作$(e_j(t_i))$，我们推得$(\widetilde{A}_n-z\widetilde{B}_n)\xi_n=(f(t_l))$，这即为(4.10)其中$\tau_l=t_l$，$l_j=e_j$.

4.16 考虑由$(\pi_n x)(t)=\Sigma_{j=1}^{n}c_{jn}l_j'(t)$定义的$Y_n$上的投影$\pi_n$，其中

$$\sum_{j=1}^{n}c_{jn}l_j'(\tau_i)=x(\tau_i),\qquad i=1,\cdots,n.$$

$\pi_n[(T-z)x_n-f]=0$，$x_n\in X_n$，定义右（或左）子空间X_n（或Y_n）的Petrov法。显然，假设$\det(l_j'(\tau_i))\neq 0$，函数$\{l_i'\}_1^n$是任意的。

4.17 设$\pi_n x=\Sigma_{i=1}^{n}x(t_i)e_i$. $\pi_n T\pi_n$定义了矩阵$a_{ij}=\int_a^b k(t_i,s)e_j(s)ds$.若在$\{s,e_j(s)\neq 0\}$上,$k(t_i,s)$由$k(t_i,t_j)$

来逼近，$a_{\cdot j}$由$a'_{ij}=k(t_i,t_j)\int_a^b e_j(s)ds=w_j k(t_i,t_j)$ 来逼近，即 Fredholm 法矩阵的系数。

4.18 设

$$\vartheta(s)=\frac{1}{z}\sum_{j=1}^{n} w_j k(s,\ t_j)x_n(t_j)-\frac{1}{z}f(s).$$

因为ϑ是x_n在点t_i的插值，所以必有$\vartheta(t_i)=x_n(t_i)$，即

$$\frac{1}{z}\sum_{j=1}^{n} w_j k(t_i,\ t_j)x_n(t_j)-\frac{1}{z}f(t_i)=x_n(t_i).$$

故$\{x_n(t_i)\}_{i=1}^{n}$必满足（4.14）．

4.19 $F:\ (z,x)\mapsto(z,\ (1/z)Tx)$。$F(\lambda,\varphi)=(\lambda,\ (1/\lambda)T\varphi)=(\lambda,\ \varphi)$，（因为$T\varphi=\lambda\varphi$）。由（$\lambda_n$，$\varphi_n$）定义不动点迭代。

$$(\lambda_{n+1},\ \varphi_{n+1}):=F(\lambda_n,\varphi_n)=\left(\lambda_n,\ \frac{1}{\lambda_n}T\varphi_n\right).$$

这给出在（4.19）中

$$\lambda_{n+1}=\lambda_n \quad 且 \quad \varphi_{n+1}=\frac{1}{\lambda_n}T\varphi_n=\tilde{\varphi}_n$$

4.20 因为用$Tx=f$代换$(T-z_0)x=f-z_0x$，所以$x=(1/z_0)[f-(T-z_0)x]$，这给出迭代$\tilde{x}_n=(1/z_0)[f-(T-z_0)x_n]$。

4.21 $T_n\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$化为$(T_n+a)\varphi_n=(\lambda_n+a)\varphi_n$。由于$T\varphi=0$，$(T+a)\varphi=a\varphi$，$\tilde{\varphi}_n=(\lambda_n+a)^{-1}(T+a)\varphi_n$.

4.22 $\tilde{x}_n=Tx_n-b$。$(\tilde{x}_n)_i=\Sigma_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(n)}-b_i$，$i\in\mathbb{N}$，其中$(x_i^{(n)})$是

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(n)} - x_j^{(n)} = b_i, \qquad i = 1, \cdots, n$$

的解。因此 $(\widetilde{x}_n)_i = x_i^{(n)}$，$i = 1, \cdots, n$。

4.23 $\pi_n T x_n - z x_n = \pi_n f$，$\widetilde{x}_n = (1/z)(T x_n - f)$。因此 $(T\pi_n - z)\widetilde{x}_n = T\pi_n(1/z)(Tx_n - f) - Tx_n + f = (1/z)T(\pi_n f + z x_n) - (1/z)T\pi_n f - Tx_n + f = f$.

4.24 $\pi_n[(T-z)x_n - f] = 0 \Rightarrow \pi_n(Tx_n - f) = z\pi_n x_n$。因此 $\pi_n \widetilde{x}_n = (1/z)\pi_n(Tx_n - f) = \pi_n x_n$。

4.25 $P_\kappa = \Sigma_i P_{\kappa, i}$，$\kappa \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$，且$\mathscr{D} = \Sigma_i \mathscr{D}_i$。对每个$\lambda_i$应用定理4.3。

4.26 $T_n^P \varphi_n^G = \pi_n T \varphi_n^G = \lambda_n \varphi_n^G$。

4.27 在定理 4.3 中 $T_n^G = T_a$，$R_n^G(z) = R_a(z)$。$T_n^G \varphi_n^G = \pi_n T \pi_n \varphi_n^G = \pi_n T \varphi_n^G = \lambda_n \varphi_n^G$。

4.28 由 (4.9) 得$y_n = [(\pi_n T - z)_{\restriction X_n}]^{-1} \pi_n T f = \mathscr{R}_n(z) \pi_n T f$。因此

$$x_n' = \frac{1}{z}(y_n - f) = \frac{1}{z}\mathscr{R}_n(z)\pi_n T f - \frac{1}{z} f$$

$$= R_n^p(z) f = x_n^p.$$

4.29 $M_n^G = P_n^G X = \mathscr{D}_n X_n = \mathscr{M}_n$。$\mathscr{D}_n^k \mathscr{M}_n \subseteq \mathscr{M}_n$，$k = 0, 1, \cdots, l-1$蕴涵$\mathscr{E}_n \mathscr{M}_n = \mathscr{M}_n$，$M_n^p = P_n^p x = \mathscr{E}_n \mathscr{D}_n \pi_n T x$. 若 $0 \in \rho(T)$，$\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Dom}(T^{-1}) = X$；因此$M_n^p = \mathscr{E}_n \mathscr{D}_n X_n = \mathscr{E}_n \mathscr{M}_n = \mathscr{M}_n$. 若 $0 \in \sigma(T)$，考虑 $a \in \rho(T)$，于是 $0 \in \rho(T - a)$且不变子空间没有变化。

4.30 $P_n^p \varphi = \mathscr{E}_n \mathscr{D}_n \pi_n T \varphi = \lambda \mathscr{E}_n \mathscr{D}_n \pi_n \varphi = \lambda \mathscr{E}_n P_n^G \varphi$.

若$\lambda_n \neq 0$是半单的，$\mathscr{E}_n = \mathscr{D}_n/\lambda_n$；因此 $P_n^G\varphi = (\lambda/\lambda_n)P_n^G\varphi$。

4.31 $$T_n^S\varphi_n^S = T\pi_n\left(\frac{1}{\lambda_n}T\varphi_n^G\right) = \frac{1}{\lambda_n}TT_n^P G_n^G = T\varphi_n^G$$

$$= \lambda_n\left(\frac{1}{\lambda_n}T\varphi_n^G\right) = \lambda_n\varphi_n^S.$$

$P_n^s\varphi = T\pi_n\mathscr{E}_n\mathscr{D}_n\pi_n\varphi = T\pi_n\mathscr{E}_nP_n^G\varphi$。若$\lambda_n \neq 0$是半单的，则 $P_n^s\varphi = (1/\lambda_n)TP_n^G\varphi$.

4.32 $M_n^s = P_n^sX = T\pi_n\mathscr{E}_n\mathscr{D}_nX_n = T\mathscr{M}_n = T\pi_n\mathscr{M}_n = T_n^s\mathscr{M}_n$.

4.33 $\mathscr{T}_n': X_n \to X_n$，$\langle\mathscr{T}_n'e_j, e_i^*\rangle = w_jk(t_i, t_j)$.

$$\langle x, e_j^*\rangle = x(t_j), \quad \pi_nx = \sum_{i=1}^n\langle x, e_i^*\rangle e_i.$$

$$T_n^Fx = \sum_{i=1}^n\left[\sum_{j=1}^n w_jk(t_i, t_j)x(t_j)\right]e_i,$$

$$(\mathscr{T}_n'\pi_nx)_i = \sum_{j=1}^n w_jk(t_i, t_j)(\pi_nx)_j,$$

$$\mathscr{T}_n'\pi_nx = \sum_{i=1}^n\left[\sum_{j=1}^n w_jk(t_i, t_j)x(t_j)\right]e_i$$

$$= T_n^Fx.$$

$$T_n^Nx(s) = \sum_{j=1}^n w_jk(s, t_j)x(t_j).$$

由此得$\pi_nT_n^N = T_n^F$.

4.34 将（4.20）用于

$$T=\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{T}_n'\pi_n & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=T_n^F.$$

然后利用习题4.27。

4.35 l_n为λ_n的陡度且$\mathscr{D}_n'=(\mathscr{T}_n'-\lambda_n)\mathscr{P}_n'$。对

$$T=\left(\begin{array}{c|c}\mathscr{T}_n'\pi_n & 0\\ \hline (1-\pi_n)T_n^N & 0\end{array}\right)=T_n^N.$$

应用（4.22）。然后利用习题4.32证明$M_n^N=T_n^N\mathscr{M}_n'$。

4.36 $\|R_n(z)\pi_n x-R(z)x\|=\|R_n(z)\pi_n x-R_n(z)x+R_n(z)x-R(z)x\|\leqslant\|R_n(z)\|\|(1-\pi_n)x\|+\|(R_n(z)-R(z))x\|$。由于$R_n(z)\xrightarrow{p}R(z)$，$\|R_n(z)\|\leqslant M$，且$\pi_n\xrightarrow{p}1$，我们得$\|R_n(z)\pi_n x-R(z)x\|\to 0$.

4.37 由于π_n是正交投影，$\|(1-\pi_n)x\|\leqslant\|x-x_n^G\|$，故$c_1=1$．$zR_n^p(z)=R_n^p(z)\pi_n T-1$。因为$\pi_n^*=\pi_n$且$T^*$是紧的，所以有

$$\|x-x_n^G\|\leqslant\|(1-\pi_n)x\|+\|R_n^p(z)\|\|(1-\pi_n)T^*\pi_n\|\cdot\|(1-\pi_n)x\|\leqslant(1+\varepsilon_n)\|(1-\pi_n)x\|,$$

其中$\varepsilon_n:=\|R_n^p(z)\|\|(1-\pi_n)T^*\pi_n\|\to 0$，$n\to\infty$。

4.38 若$h\xrightarrow{p}0$，则$\pi_n\xrightarrow{p}1$．但由于T是紧的，TB是相对紧的（B为$L^2(a,b)$中的单位球），由定理3.2得$\|(1-\pi_n)T\|_2\to 0$．由命题4.6及习题4.5得$\|x-x_n^G\|_2=O(h^{r+1})$。

4.39 因为$TX\subset C(a,b)$，L_nT是明确定义的。对$x\in C(a,b)$，在$L^\infty(a,b)$中，$(L_n-1)x\to 0$．这证明了$\|(1-L_n)T\|_\infty\to 0$且$\|(L_nT-z)^{-1}\|_\infty<M$，$z\in\rho(T)$。由命题4.6得$x_n^G\to x$，$x\in c(a,b)$。对界$\|(1-L_n)x\|$应用推论7.6。

4.40 T是由 $L^{\infty}(a,b)$ 到$C(a,b)$ 的紧算子。因对$x\in C(a,b)$，在 $L^{\infty}(a,b)$ 中，$(L_n-1)x\to 0$。因此由定理 4.5 在$C(a,b)$中$TL_n\xrightarrow{cc}T$。由命题 4.6 得$x_n^s\to x$。

4.41 若$f\in C^p(a,b)$，$k\in C^p([a,b]^2)$，则$x\in C^p(a,b)$. 在第七章定理 7.2 中给出较弱的条件。

4.42 $\pi_n K-\alpha\xrightarrow{s}K-\alpha$ 蕴涵 $(\pi_n K-\alpha)^{-1}$一致有界且由于$\pi_n\xrightarrow{p}1$，$u_n\to u$。

4.43 在 Chebyshev 点 τ_i，$\widetilde{x}_n(\tau_i)=x_n(\tau_i)$。因此$\max_i|(x-x_n)(\tau_i)|\leqslant c\,\mathrm{dist}_{\infty}(x,\mathbb{P}_{n-1})$. 这不能由命题4.9推出，它证明了在均方意义下关于权$\rho(t)$的收敛性。

4.44 $\vartheta(s)=\int_a^b|k(s,t)|dt$，$s\in[a,b]$在$[a,b]$上连续；因此存在$s_0\in[a,b]$使得$\vartheta(s)\leqslant\vartheta(s_0)$，$\forall s\in[a,b]$。设$\{x_m\}$是 $C(a,b)$ 中的序列，且$\|x_m\|=1$，$x_m(t_i)=0$，$i=1,\cdots,n$，$(Tx_m)(s_0)\geqslant\vartheta(s_0)\geqslant\vartheta(s_0)-1/m$（这样的序列的存在性由测度和积分定理保证）。于是我们得

$$\|T\|-\frac{1}{m}\leqslant\|Tx_m\|$$

$$=\|(T-T_n^N)x_m\|\leqslant\|T-T_n^N\|.$$

当$m\to\infty$时，得$\|T-T_n^N\|\geqslant\|T\|$。

4.45 Ⅰ. 对$x\in X_n$，$x(t)=\Sigma_i x(t_i)e_i(t)$。

$$(\mathscr{T}_n'-\pi_n T)x=\sum_i\left(\sum_j\left[w_j k(t_i,t_j)-\int_a^b k(t_i,s)e_j(s)ds\right]x(t_j)\right)e_i(t),$$

$$\|(\mathscr{T}_n'-\pi_n T)_{\uparrow X_n}\|_{\infty}\leqslant$$

$$\leqslant \max_{i,j} \sup_{s\in D_j} |k(t_i,t_j)-$$

$$k(t_i,s)|\sum_j \int_a^b |e_j(s)|ds \to 0 .$$

Ⅱ. $\|(1-\pi_n)T\| \to 0$.

4.46 假设如下条件成立：

（1） r在$[a,b]\times[a,b]$上连续，

（2） $\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |\sigma(s,t)|dt < +\infty$，

（3） $\lim_{s'\to s}\int_a^b |\sigma(s',t)-\sigma(s,t)|dt = 0, \forall s\in[a,b]$，

（4） $\sup_n \Sigma_{i=1}^n \max_{a\leqslant t\leqslant b}|e_i(t)| < +\infty$。

然后对$x\in C(a,b)(\|x\|\leqslant 1)$，当$s\in[a,b]$时有

$$|T_n x(s)| \leqslant \sum_{i=1}^n |r(s,t_i)||x(t_i)| \max_{a\leqslant t\leqslant b}|e_i(t)|$$

$$\int_a^b |\sigma(s,t)|dt \leqslant c\|r(s,\cdot)\| \ \|x\|_\infty .$$

于是$\|T_n x\|_\infty \leqslant c\|x\|_\infty \leqslant c$，且$\{T_n x\}$当$x\in B$时一致有界。此外，若$s,s'\in[a,b]$，则

$$T_n x(s') - T_n x(s) = \sum_{i=1}^n [r(s',t_i)x(t_i)$$

$$\int_a^b e_i(t)\sigma(s',t)dt - r(s,t_i)x(t_i)\int_a^b e_i(t)\sigma(s,t)dt]$$

$$= \sum_{i=1}^n [(r(s',t_i) - r(s,t_i)x(t_i)\int_a^b e_i(t)\sigma(s' t)dt$$

$$+r(s,t_i)x(t_i)\int_a^b e_i(t)(\sigma(s',t)-\sigma(s,t))dt].$$

故当 $s'\to s$ 时，$|T_nx(s')-T_nx(s)|\leqslant c_1\|r(s',\cdot)-r(s,\cdot)\|_\infty+c_2\int_a^b|\sigma(s',t)-\sigma(s,t)|dt\to 0$，且与 n 无关. 由此即得结论。

4.47 设 $\varepsilon>0$ 给定，存在 $m(\varepsilon)$ 使当 $m>m(\varepsilon)$，$n\geq 1$，且 $x\in B$ 时，$\|T_n^mx-T_nx\|\leq\|T_n^m-T_n\|<\varepsilon$. 因此 $\{T_n^mx;\ m\geq m(\varepsilon),\ n\geq 1,\ x\in B\}$ 有中心在 K 中的 ε－覆盖，所以是一个相对紧集；故可求得有限覆盖. 对每个 $m, 1\leq m\leq m(\varepsilon), \{T_n^mx;\ n\geq 1,\ x\in B\}$ 有有限的 ε－覆盖，这是因为 K^m 是相对紧的. 由此得 $\{T_n^mx;\ m\geq 1,\ n\geq 1,\ x\in B\}$ 也有有限 ε－覆盖，这蕴涵它是相对紧的.

4.48 $(T^{-1}-Z)^{-1}=-\frac{1}{Z}(T-\frac{1}{Z})^{-1}T$.

$$P(\frac{1}{\lambda},T^{-1})=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(1/\lambda)}\left(-\frac{1}{Z}\right)$$

$$\left(T-\frac{1}{Z}\right)^{-1}Tdz,\ \left(t=\frac{1}{Z}\right)$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\lambda)}\frac{1}{t}T(T-t)^{-1}dt$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\lambda)}\frac{1}{t}(T-t+t)(T-t)^{-1}dt$$

$$=\underbrace{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\lambda)}\frac{dt}{t}}_{=0}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\lambda)}(T-t)^{-1}dt$$

$$=P(\lambda,T).$$

4.49 习题2.29证明了

$$\left.\begin{array}{l} u''=x \\ u(0)-u'(0)=0 \\ u(1)+u'(1)=0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow u(t)=\int_0^1 g(t,s)x(s)ds$$

其中

$$g(t,s)=\begin{cases} \frac{1}{3}(t+1)(s-2), & t\leqslant s, \\ \frac{1}{3}(s+1)(t-2), & t>s. \end{cases}$$

$$(P)\Longleftrightarrow\begin{cases} u=Gx \\ x=Kx+f \end{cases}$$

其中

$$k(t,s)=\frac{\partial g(t,s)}{\partial t}=\begin{cases} \frac{1}{3}(s-2) \\ \frac{1}{3}(s+1). \end{cases}$$

4.50　$\psi=G\varphi$，$(1-K)\varphi=\lambda\mathfrak{N}G\varphi$，这里$K$是在命题4.15中定义的。两个核在$s=t$处均有第一类间断。

4.51　这是熟知的偏微分方程中的结果。比如可参阅Adams (1975)。

4.52　对任何闭的稠定算子$T: D\subseteq H\to H$，$\langle u, v\rangle_D := \langle u, v\rangle_H+\langle Tu, Tv\rangle_H$定义了$D$中的内积。

$$\langle u, u\rangle_D=\|u\|_H^2+\|Tu\|_H^2>0, \ \forall u\neq 0, \ u\in D,$$

$$\langle v,u\rangle_D=\overline{\langle u,v\rangle_H}+\overline{\langle Tu, Tv\rangle_H}=\overline{\langle u,v\rangle_D},$$

$$\langle \alpha u+v, w\rangle_D=\alpha\langle u,w\rangle_H+\alpha\langle Tu,Tw\rangle_H+\langle v,w\rangle_H$$
$$+\langle Tu, Tw\rangle_H=\alpha\langle u,w\rangle_D+\langle u,w\rangle_D$$

其中相应的模$\|u\|_D=(\langle u,u\rangle_D)^{1/2}=(\|u\|_H^2+\|Tu\|_H^2)^{1/2}$，且$\|Tu\|_H^2\leqslant\|u\|_H^2+\|Tu\|_H^2=\|u\|_D^2$，故$T\in\mathscr{L}(\hat{D}, H)$。剩下只需证明$\hat{D}$是完备的。设$\{u_n\}$是$\hat{D}$中的Cauchy序列；$\|u_n-u_m\|_D^2=$

$\|u_n - u_m\|_H^2 + \|Tu_n - Tu_m\|_H^2 \to 0$，$n$，$m \to \infty$. 故$\{u_n\}$和$\{Tu_n\}$是$H$内的Cauchy序列. 因此$u_n \to u$，且由于$T$是闭的，$Tu_n \to Tu$。这表明$\|u_n - u\|_D^2 = \|u_n - u\|_H^2 + \|Tu_n - Tu\|_H^2 \to 0$；故$u_n$收敛于$u \in \hat{D}$. 于是$\hat{D}$是Hilbert 空间.

4.53 $\langle T'u, v\rangle_H = a^*(u, v) = \overline{a(v, u)} = \overline{\langle Tv, u\rangle_H} = \langle u, Tv\rangle_H$.

4.54 A是域H上的闭算子；因此它是有界的. 由于T定义于D，故A有值域D.

4.55 由V上的 Lax-Milgram，$a(u,v) = (S_a^{-1}u, v)_V$，$b(u,v) = (S_b^{-1}u, v)_V$；其中$S_a^{-1}$，$S_a^{-1}$及$S_a$均在$V$上有界. 因此

$$a(\psi,v) = \lambda b(\psi,v),\quad \forall v \in V \Longleftrightarrow S_a^{-1}\psi = \lambda S_b^{-1}\psi$$
$$\Longleftrightarrow S_a S_b^{-1}\psi = (1/\lambda)\psi.$$

4.56 利用习题4.53且注意由$B^\times$的定义，$a(Bu, v) = a(u, B^\times v)$，又由于对$u \in V$，$Bu = Au$，故$a(Au, v) = (u, v)_H = a(u, B^\times v) = a(u, A'v)$，$\forall u$，$v \in V$.

4.57 若a是Hermite的，$(Au, v)_H = a(Au, Av) = (u, Av)_H$；因此 $A = A'$，$B^\times = B$. 若a是强制的，$(Au, u)_H = a(Au, Au) \geqslant \alpha\|Au\|_V^2 > 0$，$0 \neq u \in H$.

4.58 由于$(\mathfrak{M}x, y)_2$和$(\mathfrak{N}x, y)$是 Hermite 正定半双线性形式，故$(x, y)_H := (\mathfrak{M}x, y)_2$满足$(x, x)_H = (\mathfrak{M}x, x)_2 > 0$，$0 \neq x \in \mathscr{D}$，$(ax + x', y)_H = a(\mathfrak{M}x, y)_2 + (\mathfrak{M}x', y)_2 = a(x, y)_H + (x', y)_H$. $(x, y)_H = \overline{(y, x)_H}$，对$\mathscr{R}$有类似结论. $\mathfrak{M}u = \lambda\mathscr{R}u$，$u \in \mathscr{D} \Longleftrightarrow (\mathfrak{M}u, v)_2 = \lambda(\mathfrak{N}u, v)_2$，$\forall v \in V$. 因此$(u, v)_H = \lambda(u, v)_V$，$\forall v \in V$.

4.59 $\pi_n(T\psi_n - \lambda_n\psi_n) = 0$，其中$\pi_n$是$F_n = \{1, t, \cdots, t^{n-1}\}$上的正交投影.

$$\int_a^b (\mathcal{L}\psi_n - \lambda_n \psi_n) t^{i-1} dt = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

$\psi_n \in E_n \Rightarrow \psi_n = \Sigma_{j=1}^n \xi_{jn} e_j$。于是

$$\sum_{j=1}^n \xi_{jn} \int_a^b \mathcal{L} e_j(t) t^{i-1} dt = \lambda_n \sum_{j=1}^n \xi_{jn} \int_a^b e_j(t) t^{i-1} dt,$$

$$i = 1, \cdots, n.$$

设 $\xi^{(n)} = (\xi_{jn})$，$a_{ij} = \int_a^b \mathcal{L} e_j(t) t^{i-1} dt$，$b_{ij} = \int_a^b e_j(t) t^{i-1} dt$；$A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$。方程组是可解的，于是 $A\xi^{(n)} = \lambda_n B\xi^{(n)}$。

4.60　设 $u \in E_n = \mathbb{P}_{n+p-1} \cap (4.34)$。则 $D^p u \in \mathbb{P}_{n-1}$，$\mathcal{L}u \in TE_n = (1-K)G^{-1}E_n$。这便证明了$D^p E_n \subseteq \mathbb{P}_{n-1}$，$\mathcal{L}E_n \subseteq (1-K)\mathbb{P}_{n-1}$。其逆留给读者。

4.61　$L_n(T\psi_n - \lambda_n \psi_n) = 0$，$\psi_n = \Sigma_{j=1}^n \xi_{jn} e_j$，$T\psi_n(t_i) = \lambda_n \psi_n(t_i)$，$\Sigma_{j=1}^n \xi_{jn} \mathcal{L} e_j(t_i) = \lambda_n \sum_{j=1}^n \xi_{jn} e_j(t_i)$，$i = 1, \cdots, n$。设$a_{ij} = \mathcal{L} e_j(t_i) = e_j^{(p)}(t_i) - \Sigma_{k=0}^{p-1} a_k(t_i) e_j^{(k)}(t_i)$，$b_{ij} = e_j(t_i)$；$A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$，$\xi^{(n)} = (\xi_{jn})$。因此 $A\xi^{(n)} = \lambda_n B\xi^{(n)}$。

4.62　对于矩法（或配置法）矩阵由$\int_a^b \mathcal{L} e_j t^{i-1} dt$（或 $\mathcal{L} e_j(t_i)$）给出，且右端由$\int_a^b f t^{i-1} dt$（或$f(t_i)$）给出。

4.63　见题4.16的解。

4.64　由于C_n中的函数是在每个Δ_i上的次数不超过$p+r$的多项式，所以$D^p C_n \subseteq \mathbb{P}_{r,\Delta}$。反之，注意（4.34）给定关于系数的$p$个线性无关条件。在习题4.4中定义的投影$\pi_n$是$F_n = \mathfrak{M} C_n = \mathbb{P}_{r,\Delta}$上的$L^2$－正交投影。$\mathcal{L}u_n - f \perp F_n \Longleftrightarrow$

$\pi_n(\mathcal{L}u_n - f) = 0$, $u_n \in C_n$.

4.65 设L_n是在点$\{\tau_i^j\}$的Lagrange插值（习题4.6. 则

$$(\mathcal{L}u_n - f)(\tau_i^j) = 0 \Longleftrightarrow L_n(\mathcal{L}u_n - f) = 0$$

L_n是由$C(a,b)$到$\mathbb{P}_{r,\Delta}$的映射. 若定义在$C_\Delta(a, b)$上即为投影. $\mathbb{P}_{r,\Delta}$的选择仍是任意的.

4.66 关于$Tu = f$的最小二乘法为$\pi_n(Tu_n - f) = 0$, ($u_n \in X_n$, π_n为$\mathcal{L}X_n$上的⊥－投影). 这等价于

$$u_n = Gx_n,\quad \pi_n[(1-K)x_n - f] = 0,\quad x_n \in D^p x_n = Y_n.$$

即具有右子空间Y_n和左子空间$\mathcal{L}X_n$的$1-K$上的⊥－Petrov法.

4.67 $\pi_n[T\psi_n - \lambda_n\psi_n] = 0$, $\psi_n \in X_n$, π_n为Y_n上的投影, 这等价于

$$\psi_n = G\varphi_n,\quad \pi_n[(1-K)\varphi_n - \lambda_n G\varphi_n] = 0,\quad \varphi_n \in Y_n.$$

4.68 广义本征值问题$(1-K)\varphi = \lambda G\varphi$相应于预解式$(1-K-zG)^{-1}G$（参见第二章例2.28）. 类似地, 对于$(1-\pi_nK)\varphi_n = \lambda_n\pi_nG\varphi_n$相应于$(1-\pi_nK - z\pi_nG)^{-1}\pi_nG$. 设

$$A_n(z) := (1-\pi_nK - z\pi_nG)^{-1},\quad A(z) := (1-K-zG)^{-1},$$

则

$$A_n(z) - A(z) = A_n(z)(\pi_n - 1)(K + zG)A(z).$$

且

$$\|A_n(z)\pi_nG - A(z)G\| \leqslant \|(A_n(z) - A(z))\pi_nG\| + \|A(z)\|\|(1-\pi_n)G\|,$$

由于当$n\to\infty$时, $\|(1-T_n)(K+zG)\|\to 0$, 上式趋于零.

4.69 由于$T - \lambda_n = (1-K-\lambda_nG)G^{-1}$和$1-P$可交换, $(T-\lambda_n)(1-P)\psi_n = (1-P)(1-K-\lambda_nG)\varphi_n$. 故$(1-P)\psi_n = (T-\lambda_n)^{-1}(1-P)(1-K-\lambda_nG)\varphi_n$. 由于$S(\lambda_n) = (T-\lambda_n)^{-1}$

$(1-P)$，我们有$(1-P)\psi_n = S(\lambda_n)(1-K-\lambda_n G)\varphi_n$，令$\widetilde{\varphi}_n = (K+\lambda_n G)\varphi_n$：$(1-P)\psi_n = S(\lambda_n)(\varphi_n - \widetilde{\varphi}_n)$. 但$(\pi_n K + \lambda_n \pi_n G)\varphi_n = \varphi_n$（见习题4.67），故$\varphi_n - \widetilde{\varphi}_n = (\pi_n - 1)\widetilde{\varphi}_n$。因此$(1-P)\psi_n = S(\lambda_n)(\pi_n - 1)\widetilde{\varphi}_n$。

4.70 $\pi_n(T\psi_n - \lambda_n\psi_n) = 0$，其中$\psi_n \in X_n$，$\pi_n$为$Y_n$上的投影，这等价于

$\psi_n = A\theta_n \Longleftrightarrow \theta_n = T\psi_n$，$\pi_n(\theta_n - \lambda_n A\theta_n) = 0$，$\theta_n \in X'_n = TX_n$

4.71 若$\widetilde{\theta}_n = \lambda_n A\theta_n$，则由于$\psi_n = A\theta_n$，

$$\frac{1}{\lambda_n}(1-P)\widetilde{\theta}_n = (1-P)\frac{\lambda_n}{\lambda_n}A\theta_n = (1-P)\psi_n.$$

4.72 由a是强制的即得．同时，若u_n和$\overline{u_n}$是（4.50）在V_n中两个不同的解，则对$u_n - \overline{u_n} \neq 0$，可得$a(u_n - \overline{u_n}, u_n - \overline{u_n}) = 0 \geqslant \alpha \|u_n - \overline{u_n}\|_V^2$．

4.73 设e_1，…，e_n是V_n的基．则$u_n = \Sigma_{j=1}^n \xi_{jn} e_j$及（4.50）等价于

$$\Sigma_{j=1}^n \xi_{jn} a(e_j, e_i) = (f, e_i)_H, \quad i = 1, \cdots, n.$$

令$a_{ij} = a(e_j, e_i)$，$b_i = (f, e_i)_H$，$\xi^{(n)} = (\xi_{jn})$，$A = (a_{ij})$ $b = (b_i)$，方程组$A\xi^{(n)} = b$得解．

4.74 （4.41）定义了A使$a(A\psi, v) = (\psi, v)_H = (1/\lambda)a(\psi, v)$，$\forall v \in V$；即$a(A\psi - (1/\lambda)\psi, v) = 0$，$\forall v \in V$．由$V_n$中的逼近引出$a'(\pi_n^a(A\psi_n - (1/\lambda_n)\psi_n), v_n) = 0$，$\forall v_n \in V_n$．$\psi_n$为$\pi_n^a A$相应于本征值$1/\lambda_n$)的本征向量。$\pi_n^a\psi + (1/\lambda)\pi_n^a A\psi$且$\psi_n = (1/\lambda_n)\pi_n^a A\psi_n$，所以一般地有$\pi_n^a\psi \neq \psi_n$．

4.75 $\sigma(A) = \sigma(B)$由下述四条得到：

(i) $0 \in \rho(A) \Rightarrow 0 \in \rho(B)$，

(ii) $0 \in \rho(B) \Rightarrow 0 \in \rho(A)$，

(iii) $0 \neq z \in \rho(A) \Rightarrow z \in \rho(B)$,

(iV) $0 \neq z \in \rho(B) \Rightarrow z \in \rho(A)$.

证 (i) $0 \in \rho(A) \Rightarrow \|A^{-1}\|_H < \infty$；设 $u \in V$，$\|u\|_V^2 \leqslant c|a(u, u)| \leqslant c|(A^{-1}u, u)_H| \leqslant c\|A^{-1}\|_H\|u\|_H^2$；于是 V 和 H 的范数是等价的，$H = V$，$A = B$，且 $0 \in \rho(B)$。

证 (ii) $0 \in \rho(B) \Rightarrow \|u\|_V \leqslant c\|Au\|_V$，$\forall u \in V$；则 $\|u\|_V^2 \leqslant c\|Au\|_V^2 \leqslant c|a(Au, Au)| \leqslant c|(u, Au)_H| \leqslant c\|u\|_H^2\|A\|_H$，结论如前.

证 (iii) $A - z : H \to H$ 是双射，因此 $B - z : V \to V$ 是单射. 只需证明它是满射. 设 $f \in V$；存在 $u \in H$ 使得 $(A - z)u = f$ 且 $u = (1/z)(Au - f) \in V$；即 $(B - z)u = f$.

证 (iV) $B - z$：$V \to V$ 是双射. 由于 V 在 H 中稠密且 $B - z$ 关于 $\|\cdot\|_H$ 是连续的，故只需证明 $(B - z)^{-1}$ 关于范数 $\|\cdot\|_H$ 是连续的. 假设不真，存在 $u_n \in V$，$\|u_n\|_H = 1$，$\lim_n\|(B - z)u_n\|_H = 0$. 设 $v_n := (1/z)Bu_n$，$\lim_n\|v_n - u_n\|_H = (1/|z|)\lim_n\|Bu_n - zu_n\|_H = 0$. 存在 N 使得当 $n > N$ 时，$\|v_n\|_H \geqslant \frac{1}{2}$，且 $\|v_n\|_V \geqslant c$. 于是

$$
\begin{aligned}
\|(B - z)v_n\|_V^2 &\leqslant c|a(Bv_n - zv_n, Bv_n - zv_n)| \\
&\leqslant c|(v_n, Bv_n - zv_n)_H - (u_n, Bv_n - zv_n)_H| \\
&\leqslant c\|v_n - u_n\|_H\|(B - z)v_n\|_V.
\end{aligned}
$$

可推出 $\lim_n\|(B - z)v_n\|_V = 0$，其中 $\|v_n\|_V \geqslant c$；这蕴涵了 $(B - z)^{-1}$ 关于 $\|\cdot\|_V$ 不连续，这与 $z \in \rho(B)$ 矛盾. a 的强制性蕴涵了 0 不是 A 的本征值，因而不是 B 的本征值. 设 $0 \neq \lambda \in Q\sigma(A)$，其代数重数为 $m < \infty$，则由于 $\operatorname{Im} A \subset V$，$\operatorname{Ker}(A - \lambda)^m = \{x \in H;\ (A - \lambda)^m x = 0\} \subset V$，且 λ 是 B 的 m 重本征值.

4.76 $\forall u \in V_n$，$a\|B_n u\|_V^2 \leqslant \mathscr{R}_e a(B_n u, B_n u) \leqslant |(u, B_n u)_H| \leqslant \|u\|_H\|B_n u\|_V$；因此 $a\|B_n u\|_V \leqslant \|u\|_H$. 若 $z = 0$，则 B_n 是可

逆的，且 $\|B_n^{-1}\|_V\leqslant c$ 或 $\|B_n^{-1}\|_H\leqslant c$ 蕴涵 $\|u\|_V\leqslant(c/a)\|u\|_H$，$\forall u\in V_n$。范数 $\|\cdot\|_V$ 和 $\|\cdot\|_H$ 在 V_n 上一致等价。若 $z\neq 0$ 且 $\|R_n(z)\|_V\leqslant c$，则 $\|(B_n-z)u\|_V\geqslant(1/c)\|u\|_V$，$u\in V_n$。对 $x\in V_n$，$\|B_nx\|_V\leqslant c\|(B_n-z)B_nx\|_V\leqslant(c/a)\|(B_n-z)x\|_H$，$\|x\|_H=\frac{1}{|z|}$

$\|B_nx-B_nx-zx\|_H\leqslant\frac{1}{|z|}[1\|(B_n-z)x\|_H+\|B_nx\|_H]\leqslant\frac{1}{|z|}$

$\left(1+\frac{c}{a}\right)\|(B_n-z)x\|_H$。因此 $\|R_n(z)\|_H\leqslant(1/|z|)(1+c/a)$。反之，若 $\|R_n(z)\|_H\leqslant c$ $(z\neq 0)$，类似地有 $\|R_n(z)\|_V\leqslant(1/|z|)(1+c/a)$。

4.77 $A: H\to H$（值域在 V 中）是紧的，$\|x-\pi_n^a x\|_H\to 0$，$x\in V$。设 B 是 H 的单位球；AB 是 V 内 H 的相对紧集；因此 $\|(1-\pi_n^a)A\|_H\to 0$。

4.78 在 H 内，$a(u,v)=(Tu,v)_H=\overline{a(v,u)}=\overline{(Tv,u)_H}=(u,Tv)_H\Rightarrow T=T'$。$(u,v)_a=a(u,v)=(Tu,v)_H$，故当 $0\neq u\in D$ 时，$\|u\|_a^2=(Tu,u)>0$。A 可作类似处理。

4.79 对 $u,v\in V$，$a(Su,v)=(u,v)_V$，且 $(u,v)_a=(S^{-1}u,v)_V$。$a(v,Su)=\overline{a(Su,v)}=\overline{(Su,v)_a}=\overline{(u,v)_V}=(v,u)_V=(Sv,u)_a=a(Sv,u)=\overline{(u,Sv)_a}$。故 $S^\times=S$。对 S^* 定义 $(Su,Sv)_a=(u,Sv)_V=(S^*u,v)_V$，类似地可证 $S^*=S$。

4.80 $(\pi_n^aB\pi_n^a)^\times=\pi_n^{a\times}B^\times\pi_n^{a\times}=\pi_n^aB\pi_n^a$。(4.50) 中的矩阵 A 在习题4.73中给出。它是Hermite的，这是因为 $a_{ij}=a(e_j,e_i)=\overline{a(e_i,e_j)}=\overline{a_{ji}}$。对 $\xi=(x_i)$，若 $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i\in V_n$，则

$$\xi^H A\xi = \sum_i \sum_j a_{ij} x_j \overline{x}_i = a\Big(\sum_j x_j e_j,\ \sum_i x_i e_i\Big)$$
$$= a(x,\ x).$$

对 $0 \neq x \in V_n$， $a(x, x) \geqslant \alpha \|x\|_\Delta^2$； 即对 $0 \neq \xi \in \mathbb{C}^n$，$\xi^H A\xi > 0$．

4.81 由于H_{1n}和H_{2n}分别是H_1和H_2的闭子空间．它们是 Hilbert 空间，且将 $a(\cdot, \cdot)$限制到$H_{1n}\times H_{2n}$的假设保证了同构$\widetilde{A}_n$：$H_{1n}\to H_{2n}$的存在性（由Riesz 表示定理），它由

$(\widetilde{A}_n u_n,\ v_n)_2 = a(u_n,\ v_n)$， $\forall u_n \in H_{1n},\ v_n \in H_{2n}$唯一确定．

由于

$$\sup_{\substack{v_n \in H_2 \\ \|v_n\|_2 = 1}} |a(u_n,\ v_n)| \geqslant \alpha \|u_n\|_1,\quad \forall u_n \in H_{1n}$$

我们有 $\|\widetilde{A}_n^{-1}\| \leqslant 1/\alpha$．设$\pi_{2n}$是由$H_2$ 到 H_{2n}上的正交投影．对 $u_n \in H_{1n}$和$v_n \in H_{2n}$，有

$$(\pi_{2n} A u_n,\ v_n)_2 = (Au_n,\ v_n)_2 = a(u_n,\ v_n).$$

则$\widetilde{A}_n = \pi_{2n} A_{|H1n}$ 且 $\|\widetilde{A}_n\| \leqslant \|A\|$．

易见 $\pi_{1n}^a = \widetilde{A}_n^{-1}\pi_{2n}$ 且对所有的 $u \in H_1$， $\widehat{u}_n := \pi_{1n}^a u$ 是 H_{1n}中满足对$\forall v_n \in H_{2n}$， $a(\widehat{u}_n,\ v_n) = a(u,\ v_n)$的唯一元．对所有的$u \in H_1, u_n \in H_{1n}$， $(1-\pi_{1n}^a)u = u - u_n - \widetilde{A}_n^{-1}\pi_{2n}A(u-u_n)$，故 $\|(1-\pi_{1n}^a)u\|_1 \leqslant (1+\|A\|/\alpha)\|u-u_n\|_1$； 因此 $\|(1-\pi_{1n}^a)u\|_1 \leqslant c\delta_{1n}(u)$．读者可证明 π_{2n}^a 的存在性．对所有的 $u \in H_1$， $v \in H_2$，由π_{2n}^a的定义有 $a(\pi_{1n}^a u,\ v) = a(\pi_{1n}^a u,\ \pi_{2n}^a v)$，并且由$\pi_{1n}^a$的定义有 $a(u,\ \pi_{2n}^a v) = a(\pi_{1n}^a u,\ \pi_{2n}^a v)$，故得 $a(u,\ \pi_{2n}^a v) = a(\pi_{1n}^a u,\ v)$，这表明 $(\pi_{1n}^a)^\times = \pi_{2n}^a$．注意一般来说$\pi_{2n}^a$在$H_2$中不是逐点收敛到 1 的．

4.82

$$u_{i-1}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}g(t_{i-1},\ t_j)y_j,$$

$$-2u_i=-\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1}g(t_i,\ t_j)y_j,$$

$$u_{i+1}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}g(t_{i+1},\ t_j)y_j,$$

$$\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}=\frac{1}{nh^2}\sum_{j=1}^{n-1}y_j(g(t_{i-1},t_j)-2g(t_i,t_j)$$

$$+g(t_{i+1},\ t_j))$$

$$=\frac{1}{h}\Big[\sum_{j=1}^{i-1}y_jt\ (t_{i-1}-1)+\sum_{j=1}^{n-1}y_jt_{i-1}(t_j-1)$$

$$-2\sum_{j=1}^{i}y_jt_j(t_i-1)-2\sum_{j=i+1}^{n-1}y_jt_i(t_j-1)$$

$$+\sum_{j=1}^{i+1}y_jt_j(t_{i+1}-1)+\sum_{j=i+2}^{n-1}y_jt_{i+1}(t_j-1)\Big]$$

$$=\frac{1}{nh}\Big[\Big(\frac{i-1}{n}-1\Big)\sum_{j=1}^{i-1}jy_j+\frac{i-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}(j-n)y_j$$

$$-2\Big(\frac{i}{n}-1\Big)\sum_{j=1}^{i}jy_j-2\frac{i}{n}\sum_{j=i+1}^{n-1}(j-n)y_j$$

$$+\Big(\frac{i+1}{n}-1\Big)\sum_{j=1}^{i+1}jy_j+\frac{i+1}{n}\sum_{j=i+2}^{n-1}(j-n)y_i\Big]$$

$=y_i$.

矩阵

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & & \vdots \\ & & 1 & -2 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

是正则的，因为它有非零本征值（这些本征值等于什么？）

第　五　章

5.1 在Γ上$T_n - z \xrightarrow{ss} T - z$蕴涵$P_n \xrightarrow{cc} P$。对$x \in B_M$，$x \neq 0$，我们有$P_n x \to Px = x$；因此对充分大的$n$，$P_n x \neq 0$。令$x_n = (\|x\|/\|P_n x\|)P_n x$，$x_n \in B_{M_n}$，且$x_n \to x$：(5.4)是满足的，对(5.5)读者可按习题5.2推导。

5.2 由于$P_n \xrightarrow{cc} P$，我们得$\|(P-P_n)P_n\| \to 0$。对任何B_{M_n}中的x_n，

$$\|(P-P_n)P_n x_n\| = \|Px_n - x_n\| \leqslant \sup_{\substack{y \in X \\ \|y\| \leqslant 1}} \|(P-P_n)P_n y\| \to 0 .$$

令$y_n = Px_n$。给定$\varepsilon > 0$，对充分大的n和$y_n \in B_\varepsilon := \{x \in M;\ \|x\| < 1 + \varepsilon\}$，有$\|y_n\| \leqslant 1 + \varepsilon$，且$B_\varepsilon$是紧的。因此$\exists N_1 \subset \mathbb{N}$使得$y_n \to y \in B_\varepsilon$，$n \in N_1$；$x_n \to y$，$n \in N_1$。这蕴涵对充分大的$n$，$\|y\| < \|x_n\| + \varepsilon$，依次有$y \in B_M$。这即证明了(5.5)。

5.3 由定理5.8，$\Theta(M_n, M) \to 0$，这里

$$\Theta(M_n, M) = \max\left(\sup_{x \in B_M} \operatorname{dist}(x, M_n), \sup_{x \in B_{M_n}} \operatorname{dist}(x, M)\right).$$

因为$\psi_n \in B_{M_n}$，$\operatorname{dist}(\psi, M_n) = \|\psi\| \operatorname{dist}((1/\|\psi\|)\psi, M_n) \to 0$，$\operatorname{dist}(\psi_n, M) \to 0$。

5.4　对 $n > N(\Gamma)$ 和 $z \in \Gamma$，我们有 $\|R_n(z)\| \leqslant M$. 因此 $\|R_n^*(z)\| = \|(T_n^* - \bar{z})^{-1}\| \leqslant M$ 对 $n > N(\Gamma)$ 和 $z \in \bar{\Gamma}$ 成立. 由此得在 $\bar{\Gamma}$ 上 $\{T_n^*\}$ 的强稳定性。$P_n^* \xrightarrow{p} P^*$，$P$，$P_n$，$P_n^*$ 和 P^* 是紧的，因此由命题3.7可得 $\|P - P_n\| = \|P_n^* - P^*\| \to 0$。

5.5　注意到对充分大的 n，$\sigma(T_n) \cap \Delta$ 仅由一个本征值组成，且 $\dim M_n = 1$。应用习题5.3即得。

5.6　$\mathscr{R}_n(z)$ 在 $\Delta - \{0\}$ 内一致有界且 $\dim \mathscr{D}_n X_n = m$，即0的重数. 因此在 Γ 内的 $\mathscr{T}_n$ 的本征值收敛于0，其重数之和为 m。由等式

$$(\mathscr{T}_n - z)^{-1}\pi_n - \pi_n(T - z)^{-1} = \mathscr{R}_n(z)(\pi_n T - \mathscr{T}_n \pi_n)R(z)$$

导出 $\mathscr{D}_n \pi_n - \pi_n P \xrightarrow{p} 0$. 于是 $\mathscr{D}_n \pi_n \xrightarrow{p} P$，$\dim \mathscr{D}_n \pi_n X = \dim PX$ 蕴涵 $\mathscr{D}_n \pi_n \xrightarrow{cc} P$ 且 $\Theta(\mu_n, M) \to 0$。

5.7　$\|(T_n - z)^{-1}\| = [\mathrm{dist}(z, \sigma(T_n))]^{-1} \leqslant |\mathscr{I}m z|^{-1} < \infty$.

5.8　因为 $g_n = g$，重本征值不能分为几个近似的值。

5.9　类似于命题5.17的证明且有条件 $\mu_{in} \leqslant \mu_i$，$i = 1, \cdots, k$。

5.10　若 T 是紧的，由定理2.34知 $\rho(T) \cup Q\sigma(T) = \mathbb{C} - \{0\}$. 再利用例5.10和习题5.9.

5.11　对 Δ 内的 z，$S_n(z)(T_n - T)S(z) = (1 - P_n)S(z) - S_n(z)(1 - P) = S(z) - S_n(z) - (P_n - P)S(z) - S_n(z)(P_n - P) \to 0$。利用 $\|S_n(z)\| \leqslant \max_{z \in \Gamma} \|R_n(z)(1 - P_n)\| < \infty$ 且 $P_n \xrightarrow{p} P$，我们得到对 Δ 内的 z，$S_n(x) \xrightarrow{p} S(z)$，特别地，在 λ 处成立。

5.12　由例3.8，我们得到 $\|T - T_n\| \to 0 \Rightarrow T_n - z \xrightarrow{s} T - z$，$z \in \rho(T)$。于是

$$r_\sigma[(T-T_n)R(z)]\leqslant\|R(z)\|\|T-T_n\|\to 0$$

对任何紧集$K\subseteq\rho(T)$；$\sup_{z\in K}r_\sigma[(T-T_n)R(z)]\leqslant\|T-T_n\|$.

$\sup_{z\in K}\|R(z)\|\to 0$. 因此 $T_n-z\xrightarrow{u_\sigma}T-z$, $\forall z\in\rho(T)$. 若$T-T_n\xrightarrow{cc}0$，于是$T_n-z\xrightarrow{s}T-z$，且$r_\sigma[(T-T_n)R(z)]\leqslant\|[T-T_n)R(z)]^2\|^{1/2}\to 0$，由此即得.

5.13 对 $z_0\in\rho(T)$，$R_n(z_0)\xrightarrow{p}R(z_0)$。由习题3.11和命题2.28，我们知：对$t\in\mathbb{C}-\{0\}$，$R_n(z_0)-t\xrightarrow{ss}R(z_0)-t$. 于是可利用定理5.24和命题2.36.

5.14 对$R_n(z_0)$应用定理5.26,知在$\rho(R(z_0))$内,$R_n(z_0)-t\xrightarrow{u_T}R(z_0)-t$.

5.15 见S.Goldberg (1974).

5.16 若$\tilde{\pi}_n=\pi_n\restriction X_n$有一致有界逆，于是$\pi_n'=\tilde{\pi}_n^{-1}\pi_n$是$X_n$上的投影，它逐点收敛到1. 若$T$是紧的，则$\|(1-\pi_n')T\|\to 0$，结论即得.

5.17 先用引理5.11，然后利用命题5.27，最后再利用引理5.11.

5.18 由习题3.13，只需证明对$\lambda\in Q\sigma(T)T_n\xrightarrow{d-c}T\Rightarrow$: $T_n-\lambda\pi_n\xrightarrow{d-r}T-\lambda$. 参见命题5.28的证明，并注意$x_n\in X_n$, $\|x_n\|\leqslant 1$.

5.19 对 $z\neq 0$，$R_n(z)\restriction X_n=\mathscr{R}_n(z)$；因此$(R_n(z)-R(z))\restriction X_n=R(z)(T-T_n)\restriction X_n\mathscr{R}_n(z)$且$\|(P_n-P)\restriction X_n\|\to 0$.
于是,对充分大的n,$\dim PX_n=\dim P_nX_n$；$P(\pi_n-1)\xrightarrow{cc}0$蕴涵$\dim PX_n=\dim PX$. 由$P_n\xrightarrow{p}P$我们导出$P_n\xrightarrow{cc}P$且$\Theta(M_n$,

$M) \to 0$。这可由 $T_n \xrightarrow{d-c} T$ 直接导出。

5.20 见习题3.5的解。

5.21 按第三章第7节的观点，$R(t,z)$ 是 $t \in \delta_z := \{t \in \mathbb{C};\ |t| < 1/r_z\}$ 的解析函数，这里 $r_z = r_\sigma[(T-T_n)R(z)]$。$P(t)$ 和 $\hat{\lambda}(t)$ 是 $t \in \delta_\Gamma = \{t \in \mathbb{C};\ |t| < 1/r_\Gamma\}$ 的解析函数，这里 $r_\Gamma = \max_{z \in \Gamma} \sigma_\sigma[(T-T_n)R(z)]$。

5.22 因为 Γ 是紧的，且 $T_n - z \xrightarrow{u\,\gamma} T - z$，则对充分大的 n，$r_\Gamma < 1$，$1 \in \delta_\Gamma \subset \delta_z$。$R_n(z)$ 的级数展开为 $R_n(z) = R(z) \Sigma_{k=0}^{\infty}[(T-T_n)R(z)]^k$。对于 P_n 和 $\hat{\lambda}_n$，展开式可由第三章7.2节命题3.26中的（3.15），（3.16）来计算，此时设 $t=1$，$T' = T$，$H = T - T_n$。

5.23 $[T_n - z - (T_n - T)]x = [1 - (T_n - T)R_n(z)]u = f$ 且 $u = (T_n - z)x$。令 $u_0 := f$，$u_k := (T_n - T)R_n(z)u_{k-1} + f$，于是 $x^k = R_n(z)u_k$。由习题2.38，

$$\|u_k - u\| \leqslant c(\varepsilon)[r_\sigma[(T-T_n)R_n(z)] + \varepsilon]^{k+1}$$

且 $\|x^k - x\| \leqslant \|R_n(z)\| \|u_k - u\|$。

5.24 $(T_M - z)x_M = f \Longleftrightarrow [T_n - z - (T_n - T_M)]x_M = f$。

$$(T_n - T_M)R_n(z) = (T_n - T)R_n(z) + (T - T_M)R_n(z)$$

$\|T_n - T\| \to 0 \Rightarrow \|(T_n - T_M)R_n(z)\| < 1$，对充分大的 n，

$T_n \xrightarrow{cc} T \cdot \Rightarrow \|[(T_n - T_M)R_n(z)]^2\| < 1$，对充分大的 n。

5.25 $x_n = R_n^G(z)f, x^1 = R_n^G(T_n^G - T)R_n^G(z)f + R_n^G(z)f$。仍用定理4.3的记号，

$R_n^G(z)T_n^G = \mathscr{R}_n(z)\pi_n T\pi_n$，$R_n^G(z) = \mathscr{R}_n(z)\pi_n T - \frac{1}{z}(1-\pi_n)T$，$R_n^G(z)f = x_n^G - \frac{1}{z}(1-\pi_n)f$。

$$x' = \frac{1}{z}(1-\pi_n)Tx_n^G + \frac{1}{z}\mathscr{R}_n(z)\pi_n T(1-\pi_n)f - \frac{1}{z^2}(1-$$

$$-\pi_n)T(1-\pi_n)f + R_n^G(z)f$$

$$= \widetilde{x}_n^G + \frac{1}{z}\left[\mathscr{R}_n(z)\pi_n - \frac{1}{z}(1-\pi_n)\right]T(1-\pi_n)f$$

$$= \widetilde{x}_n^G + \frac{1}{z}R_n^G(z)T(1-\pi_n)f.$$

5.26 $x_n^G = R_n^G(z)\pi_n f = R_n^P(z)\pi_n f$.

$$x^{1G} = R_n^G(z)(T_n^G - T)x_n^G + x_n^G$$

$$= \left[\mathscr{R}_n(z)\pi_n T(\pi_n - 1) + \frac{1}{z}(1-\pi_n)T\right]x_n^G + x_n^G$$

$$= \widetilde{x}_n^G + \frac{1}{z}f - \frac{1}{z}\pi_n Tx_n^G + x_n^G$$

$$= \widetilde{x}_n^G - \frac{1}{z}(\pi_n T - z)R_n^P(z)\pi_n f + \frac{1}{z}f$$

$$= \widetilde{x}_n^G + \frac{1}{z}(1-\pi_n)f.$$

5.27 $x - x^k = x - x_n - R_n(z)(T_n - T)x^{k-1}$。但

$$x - t_n = (R(z) - R_n(z))f = R_n(z)(T_n - T)R(z)f$$
$$= R_n(z)(T_n - T)x.$$

于是

$$x - x^k = R_n(z)(T_n - T)(x - x^{k-1})$$
$$= [R_n(z)(T_n - T)]^k(x - x^0)$$
$$= [R_n(z)(T_n - T)]^{k+1}x$$

因此

$$\|x - x^k\| \leqslant \|x\|[\|(\pi_n T - z)^{-1}\|\|(1-\pi_n)T]^{k+1}$$

由于 $\pi_n \xrightarrow{p} 1$ 且 T 是紧的，所以 $\|(1-\pi_n)T\| \to 0$（定理3.2）.

5.28 见习题4.44. 由于 $T_n \xrightarrow{cc} T$，所以 $C_n(z) \to 0$. 由习题5.27：

$$x - x^{k+2} = [R_n(z)(T_n - T)]^2(x - x^k).$$

5.29 $x'^{k+1} - x = R_n(z)(f + (T_n - T)\left[\frac{1}{z}(Tx'^k - f)\right]$

$$- R(z)f = [R_n(z) - R(z)]f + \frac{1}{z}R_n(z)(T_n - T)(Tx'^k - f)$$

$$= \frac{1}{z}R_n(z)(T_n - T)Tx'^k - \frac{1}{z}R_n(z)(T_n - T)(T-z)x$$

$$- R_n(z)(T_n - T)x$$

$$= \frac{1}{z}R_n(z)(T_n - T)T(x'^k - x).$$

$\|x'^{k+1} - x\| \leqslant (1/|z|)\|R_n(z)(T_n - T)T\|\|x'^k - x\|$. $R_n(z)$ 一致有界且 $T_n \xrightarrow{p} T$；于是，T 是紧的，$\|(T_n - T)T\| \to 0$ 且 $(1/|z|)\|R_n(z)(T_n - T)T\| \leqslant c\|T_n - T)T\| \to 0$.

5.30 $x'^{k+1} = R_n(z)f + \frac{1}{z}(1 - R_n(z)(T - z))(Tx'^k - f)$

$$= \frac{1}{z}(1 - R_n(z))T(Tx'^k - f) + R_n(z)Tx'^k + x'^k - x'^k$$

$$= x'^k + \frac{1}{z}(-1 + R_n(z)T)(f - (T - z)x'^k).$$

$$\widetilde{R}_n(z) := \frac{1}{z}(-1 + R_n(z)T) = \frac{1}{z}R_n(z)T - \frac{1}{z}R(z)(T - z)$$

$$= \frac{1}{z}R_n(z)T - \frac{1}{z}R(z)T + R(z).$$

$$\|[R(z)-\widetilde{R}_n(z)]x\| \leqslant \frac{1}{|z|}\|[R(z)-R_n(z)]Tx\| \to 0,$$

当 $T_n - z \xrightarrow{s} T - z$。

5.31 令 $d^k = f-(T-z)x'^k$. 则 (5.13) 变为$x'^{k+1} = x'^k-(1/z)d^k+(1/z)R_n(z)Td^k$. 现考虑方程$(T-z)(x-x'^k) = d^k$。它的正则形式是

$$(T-z)u = Td^k, \quad x-x'^k = \frac{1}{z}(u-d^k).$$

它的近似解是 $u^k = R_n(z)Td^k$。因此 $x''^{k+1} = x'^k+(1/z)(u^k-d^k) = x'^{k+1}$。

5.32 $\lambda^1 = \langle T\varphi_n, \varphi_n^*\rangle = \langle T\pi_n\varphi_n, \pi_n^*\varphi_n^*\rangle$, $\varphi_n = \varphi_n^G$,

$$= \langle \pi_n T\pi_n\varphi_n, \varphi_n^*\rangle = \lambda_n\langle\varphi_n, \varphi_n^*\rangle = \lambda_n = \lambda_n^G.$$

$$\varphi^1 = \varphi_n + S_n(T_n-T)\varphi_n = \varphi_n + S_nT_n\varphi_n - S_nT\varphi_n.$$

但 $S_nT_n\varphi_n = 0$，按推论 4.4 中的记号，$\varphi^1 = \varphi_n-(\mathscr{S}_n\pi_n-(1/\lambda_n)(1-\pi_n))T\varphi_n$，由于$(1/\lambda_n)\pi_nT\pi_n\varphi_n = \varphi_n$且$\mathscr{S}_n\pi_nT\varphi_n = \mathscr{S}_n\pi_nT\pi_n\varphi_n = \lambda_n\mathscr{S}_n\varphi_n = 0$，于是$\varphi^1 = (1/\lambda_n)T\varphi_n = \widetilde{\varphi}_n^G = \varphi_n^S$。

5.33 见习题1.57的解。

5.34 $T_M\phi_M = \lambda_M\phi_M$, $P_n\phi_M = \varphi_n$. $T_M = T_n-(T_n-T_M)$, 见习题5.24.

5.35 $Q(P_n(t)-P_n)Q\xi = \langle\xi, y\rangle\langle(P_n(t)-P_n)\varphi_n, y\rangle\varphi_n$.

$$r_\sigma[Q(P_n(t)-P_n)Q] < 1 \Longleftrightarrow 0 < \langle P_n(t)\varphi_n, y\rangle < 2.$$

$$Q(P_n(t)-P_n)Q\xi$$

$$= -\frac{\langle\xi, y\rangle}{2i\pi}\int_\Gamma \left\langle R_n(z)\sum_{k=1}^{\infty} t^kK_n^k(z)\varphi_n, y\right\rangle dz,$$

$$r_\sigma[P_n(t)-P_n)]Q$$

$$\leqslant\frac{\text{meas}\,\Gamma}{2\pi}\|y\|\max_{z\in\Gamma}\left(\|R_n(z)\|\sum_{k=1}^{\infty}|t|^k\|K_1^k(z)\varphi_n\|\right).$$

利用引理5.33的证明得对 $|t|\leqslant 1$，$\langle P_n(t)\varphi_n,\ y\rangle$ 非零．则 $P_n(t)\varphi_n$是$T_n(t)$的本征值使得$QP_n(t)\varphi_n\neq 0$．用$Q\widehat{\phi}_n(t)=\varphi_n$ 规 范 化的$\widetilde{\phi}_n(t)$是明确定义的且$\widehat{\phi}=\widehat{\phi}_n(1)$．

5.36　$F(\varphi,\lambda):=((1-\lambda K)\varphi,\ \langle\varphi,\psi\rangle-1)=0$

$$F'_u=\begin{pmatrix}1-zK & -Kx\\ \langle\cdot,\ \psi\rangle & 0\end{pmatrix}.$$

牛顿迭代为u_0，$u_{i-1}-u_i=-F'_{u_i}F(u_i)$，$i\geqslant 0$；即，

$$(1-z_iK)x_{i-1}=(z_{i+1}-z_i)Kx_i,\quad z_{i+1}-z_i$$
$$=(\langle(1-z_iK)^{-1}x_i,\ \psi\rangle)^{-1}.$$

令$\hat{x}_i=z_{i+1}Kx_i$ 且$x_{i+1}=\hat{x}_i+y_i$，y_i是$(1-z_iK)y_i=z_iK(\hat{x}_i-x_i)$的解．在 F'_{u_i}中 z 保持固定等于 z_0．由此得$(1-z_0K)x'_{i+1}=(z'_{i+1}-z_0)Kx'_i$，或$x'_{i+1}=z'_{i+1}Kx'_i+y'_i$ 且 $(1-z_0K)y'_i=z_0K(\hat{x}'_i-x'_i)$．$K$用$K_n=\pi_nK$来逼近：$K_n\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$且$K_n^*\varphi_n^*=\overline{\lambda}_n\varphi_n^*$．我们选择$z_0=\lambda_n$，$x_0=\varphi_n$，$\psi=\varphi_n^*$．于是我 们 用 $\widetilde{z}_{i+1}\langle Kx'_i,\varphi_n^*\rangle=\langle(1-\lambda_n\pi_nK)x'_{i+1},\varphi_n^*\rangle+\langle\lambda_n\pi_nKx'_i,\varphi_n^*\rangle=1$，$(1-\lambda_n\pi_nK)\widetilde{y}_i=\lambda_n\pi_nK(\hat{x}'_i-x'_i)$ 的解$\widetilde{z}_{i+1}$和$\widetilde{y}_i$ 来逼 近 z'_{i+1}和y'_i．这便确定了算法（5.23）．

5.37　$(T_n-\mu^{k+1})(u^{k+1}-\phi)=(T_n-\mu^{k+1})\dfrac{Tu^k}{\mu^{k+1}}+T_nu^k$

$$-\frac{1}{\mu^{k+1}}T_nTu^k-(T_n-\mu^{k+1})\phi$$

$$=(T_n-T)(u^k-\phi)+(\mu^{k+1}-\lambda)\phi.$$

$P_n(u^{k+1}-\phi)=0$；因此$\mu^{k+1}-\lambda=\langle(T-T_n)(u^k-\phi),\varphi_n^*\rangle$。

$$u^{k+1}-\phi=(\mu^{k+1}-\lambda)\Sigma_n^{k+1}\phi+\Sigma_n^{k+1}(T_n-T)(u^k-\phi).$$

设Γ是包围λ和λ_n的Jordan曲线；若μ^{k+1}在Γ内，则

$\|\Sigma_n^{k+1}\|=\|(T_n-\mu^{k+1})^{-1}(1-P_n)\|\leqslant\max_{z\in\Gamma}\|(T_n-z)^{-1}(1-P_n)\|$，且$\Sigma_n^{k+1}$对$k$一致有界。

我们用归纳法证明收敛性。

(i) $\|T_n-T\|\to 0$。容易证明$\|u^k-\phi\|\leqslant c\|T_n-T\|^{k+1}$且$|\mu^{k+1}-\lambda|\leqslant c\|T_n-T\|^{k+2}$，$k\geqslant 0$。

(ii) $T_n\xrightarrow{cc}T$。若μ^k在Γ内，则量$\|(T_n-T)\Sigma_n^k(T_n-T)\|+\|T_n-T)\Sigma_n^kP\|$为$\varepsilon_n:=\max_{z\in\Gamma}(\|(T_n-T)R_n(z)(1-P_n)(T_n-T)\|+\|(T_n-T)R_n(z)(1-P_n)P\|$所界，当$n\to\infty$，它趋于零。

我们假设$\max(\|u^{2k+1}-\phi\|+|\mu^{2k+1}-\lambda|,\|u^{2k}-\phi\|+|\mu^{2k}-\lambda|)\leqslant c\,\varepsilon_n^k\|(T-T_n)P\|$对任意$k$成立。则$|\mu^{2k+2}-\lambda|\leqslant c\|(T_n-T)(u^{2k+1}-\phi)\|$且$(T_n-T)(u^{2k+1}-\phi)=(\mu^{2k+1}-\lambda)(T_n-T)\Sigma_n^{2k+1}P\phi+(T_n-T)\Sigma_n^{2k+1}(T_n-T)(u^{2k}-\phi)$.

因此$|\mu^{2k+2}-\lambda|\leqslant c\,\varepsilon_n^{k+1}\|(T-T_n)P\|$。类似地，$u^{2k+2}-\phi=(\mu^{2k+2}-\lambda)\Sigma_n^{2k+2}\phi+\Sigma_n^{2k+2}(T_n-T)(u^{2k+1}-\phi)$，这就证明了$\|u^{2k+2}-\phi\|\leqslant c\,\varepsilon_n^{k+1}\|T-T_n)P\|$。证明的其余部分留给读者。

5.38 $(T_n-\lambda)(u^{k+1}-\phi)$

$$=(T_n-\lambda_n)u^k+\lambda_n(1-P)\left(u^k-\frac{1}{\mu^{k+1}}Tu^k\right)-T_n\phi$$

$$+\lambda_n\phi = T_n u^k - \frac{\lambda_n}{\mu^{k+1}} T u^k - T_n\phi + \lambda_n\phi$$

$$= (\mu^{k+1} - \lambda)\frac{\lambda_n}{\mu^{k+1}\lambda} T u^k + \frac{1}{\lambda}(\lambda_n - \lambda) T(u^k - \phi)$$

$$-(T - T_n)(u^k - \phi).$$

$$\mu^{k+1} - \lambda = \langle T(u^k - \phi),\ \varphi_n^*\rangle \to 0.$$

$$\mu^{k+1} - \lambda = \frac{\lambda_n - \lambda}{\lambda_n}\langle T(u^k - \phi),\ \varphi_n^*\rangle + \frac{\lambda}{\lambda_n}\langle (T - T_n)(u^k - \phi),\ \varphi_n^*\rangle,$$

$$u^{k+1} - \phi = (\mu^{k+1} - \lambda)\frac{\lambda_n}{\mu^{k+1}\lambda}[S_n T(u^k - \phi) + \lambda S_n\phi]$$

$$+ \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda} S_n T(u^k - \phi) + S_n(T_n - T)(u^k - \phi).$$

利用命题5.38和5.39的证明即得。

5.39 设 $x^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathring{x}^k \end{pmatrix}$，$\mathring{x}^k \in \mathbb{C}^{N-1}$。亏量$Ax^k - \mu^{k+1}x^k$的第一分量为零. 设 $Ax^k - \mu^{k+1}x^k := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathring{r}^k \end{pmatrix}$，则$\mathring{x}^{k+1} = \mathring{x}^k - (C - aI)^{-1}\mathring{r}^k \to \mathring{x}$，且 $\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathring{x} \end{pmatrix}$. 这是一个右端可变的固定方程组，与第三章8.4中的算法不同. 那里我们得到一个关于λ_k的本征值问题的数量不动点公式，而这得到是关于x^k的向量算法.

5.40 设在$\mathscr{L}(\widehat{D})$中考虑问题，这里赋予$\widehat{D}$图象范数$\|x\|_D = \|x\| + \|Tx\|$，$x \in D$. $T_n - T \in \mathscr{L}(\widehat{D},\ X)$，$R_n(z) \in \mathscr{L}(X, \widehat{D})$，故$U \in \mathscr{L}(\widehat{D})$. 又$r_\sigma(U) = r_\sigma[(T_n - T)R_n(z)] \to$

0, $n\to\infty$. 对 $\varepsilon>0$, 设 n 固定使 $r_\sigma(U)+\varepsilon<1$. 于是 $\|U\|_*<1$, 其中 $\|\cdot\|_*$(依赖于 ε 和 U) 与 $\|\cdot\|_D$ 等价. 因此 $\|x^k-x\|\leqslant\|x^k-x\|_D\leqslant c(\varepsilon,U)(r_\sigma(U)+\varepsilon)^{k+1}$.

第 六 章

6.1 我们知道 $1-P_n=(T_n-\lambda)^{-1}(1-P_n)(T_n-\lambda)$ 且 $S_n(z)=(T_n-z)^{-1}(1-P_n)$. 因此 $1-P_n=S_n(\lambda)(T_n-\lambda)$, 且对 $\varphi\in\mathrm{Ker}(T-\lambda)$, 有 $(1-P_n)\varphi=S_n(\lambda)(T_n-\lambda)\varphi=S_n(\lambda)(T_n-T)\varphi$. 又有 $S(z)=R(z)(1-P)$, $1-P=(T-\lambda_n)^{-1}(1-P)(T-\lambda_n)$. 于是 $1-P=S(\lambda_n)(T-\lambda_n)$, 且对 $\varphi_n\in\mathrm{Ker}(T_n-\lambda_n)$, $(1-P)\varphi_n=S(\lambda_n)(T-T_n)\varphi_n$.

6.2 对 $\psi_n\in P_nX=M_n$, $(1-P)\psi_n=(1-P)(\psi_n-\psi)$, $\forall\psi\in M=PX$. 对 $\psi_n\in M_n$, $\|\psi_n\|=1$,

$$\|(1-P)\psi_n\|=\|(1-P)(\psi_n-\psi)\|\leqslant\|1-P\|\inf_{\psi\in M}\|\psi_n-\psi\|=$$

$$\|1-P\|\mathrm{dist}(\psi_n,M)\leqslant\|1-P\|\sup_{\substack{x_n\in M_n\\ \|x_n\|=1}}\mathrm{dist}(x_n,M)=\|1-P\|$$

$\delta(M_n,M)\leqslant\|1-P\|\max(\delta(M_n,M),\delta(M,M_n))=\|1-P\|\Theta(M_n,M)$. 类似地, 对 $\psi\in M$ 及所有的 $\psi_n\in M_n$, $(1-P_n)\psi=(1-P_n)(\psi-\psi_n)$, 于是

$$\|(1-P_n)\psi\|\leqslant\|1-P_n\|\inf_{\psi_n\in M_n}\|\psi-\psi_n\|=\|1-P_n\|\mathrm{dist}(\psi,M_n)$$

$$\leqslant\|1-P_n\|\|\psi\|\mathrm{dist}\left(\frac{1}{\|\psi\|}\psi,M\right)$$

$$\leqslant\|\psi\|\|1-P_n\|\sup_{\substack{x\in M\\ \|x\|=1}}\mathrm{dist}(x,M_n)$$

$$=\|\psi\|\|1-P_n\|\delta(M,M_n)\leqslant c\,\Theta(M,M_n)$$

注意 $\|P_n\|$ 是一致有界的.

6.3 由引理6.5: $(T_n-\lambda_{n_i})^{l_{n_i}}\psi_{n_i}=0$, $\psi_{n_i}\in M_{n_i}$,

$$(T-\lambda_{ni})\psi_{ni}=(T_n-\lambda_{ni})\psi_{ni}+(T-T_n)\psi_{ni}.$$

$$\begin{aligned}(1-P)\psi_{ni}&=(T-\lambda_{ni})^{-1}(1-P)(T-\lambda_{ni})\psi_{ni}\\&=S(\lambda_{ni})[(T_n-\lambda_{ni})\psi_{ni}+(T-T_n)\psi_{ni}]\\&=(T-\lambda_{ni})^{-2}(1-P)(T-\lambda_{ni})(T_n-\lambda_{ni})\psi_{ni}+\\&\quad+S(\lambda_{ni})(T-T_n)\psi_{ni}\\&=S^2(\lambda_{ni})(T_n-\lambda_{ni})^2\psi_{ni}+S^2(\lambda_{ni})(T-T_n)(T_n-\lambda_{ni})\psi_{ni}\\&\quad+S(\lambda_{ni})(T-T_n)\psi_{ni}.\end{aligned}$$

当 $(T_n-\lambda_{ni})^{l_{ni}}\psi_{ni}=0$，得

$$(1-P)\psi_{ni}=\sum_{j=1}^{l_{ni}}S^j(\lambda_{ni})(T-T_n)(T_n-\lambda_{ni})^{j-1}\psi_{ni}.$$

6.4　我们有如下等式

$$\operatorname{tr}T_{n\restriction M_n}=\sum_{i=1}^{m}\mu_{in}=m\hat{\lambda}_n,\ \operatorname{tr}T_{\restriction M}=m\lambda.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}P(T-T_n)P_{(n)}^{-1}&=\operatorname{tr}PTP_{(n)}^{-1}-\operatorname{tr}PT_{n1}P_{(n)}^{-1}\\&=\operatorname{tr}TPP_{(n)}^{-1}-\operatorname{tr}P_{(n)}T_{n\restriction M_n}P_{(n)}^{-1}\\&=\operatorname{tr}T_{\restriction M}-t_rT_{n\restriction M_n}=m(\lambda-\hat{\lambda}_n).\end{aligned}$$

6.5　设$\{x_i\}_1^m$，$\{x_i^*\}_1^m$为M和M^*的伴随基。

$$\operatorname{tr}P(T-T_n)P_{(n)}^{-1}=\sum_{i=1}^{m}\langle P(T-T_n)P_{(n)}^{-1}x_i,x_i^*\rangle$$

$$=\operatorname{tr}P(T-T_n)P+\sum_i\langle(P_{(n)}^{-1}P-P)x_i,(T^*-T_n^*)x_i^*\rangle$$

$P_{(n)}^{-1}P$（或P）是沿着$(1-P)X$在M_n（或M）上的投影。由引理2.16和定理6.6,对充分大的n有$\|P_{(n)}^{-1}P-P\|\leqslant$

$c\Theta(M, M_n) \leqslant c\varepsilon_n$。因此$|\lambda - \hat{\lambda}_n - (1/m)\mathrm{tr}P(T-T_n)P| \leqslant c\varepsilon_n\varepsilon_n^*$. 设$P$为任意紧投影，$\mathrm{Im}P \subset \mathrm{Dom}T$，于是$TP$在$X$上有界且有有限秩，$TP=(TP)P$.由习题2.20，$\mathrm{tr}TP=\mathrm{tr}(TP)P=\mathrm{tr}PTP$。

6.6 $\mathrm{tr}P_n(T-T_n)\widetilde{P}_{(n)}^{-1} = \mathrm{tr}P_nT\widetilde{P}_n^{-1} - \mathrm{tr}P_nT_n\widetilde{P}_n^{-1}$

$$= \mathrm{tr}\widetilde{P}_n T_{|M}\widetilde{P}_n^{-1} - \mathrm{tr}T_nP_n\widetilde{P}_n^{-1}$$

$$= \mathrm{tr}T_{|M} - \mathrm{tr}T_{n|M_n} = m(\lambda - \hat{\lambda}_n).$$

6.7 $\|(T-T_n)_{|M}\| = \sup\limits_{\substack{x\in M\\ x\neq 0}} \dfrac{\|(T-T_n)x\|}{\|x\|}$

$$= \sup_{\substack{y\in X\\ Py\neq 0}} \frac{\|(T-T_n)Py\|}{\|Py\|} \leqslant \|(T-T_n)P\|$$

$$= \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|(T-T_n)Px\|}{\|x\|} = \|(T-T_n)_{|M}P\|$$

$$\leqslant \|P\|\|(T-T_n\|_{|M}\|.$$

6.8 因为$\dim \mathrm{Ker}(T-\lambda)^k$有限，存在$X$的闭子空间$N$使得$x = \mathrm{Ker}(T-\lambda)^k \oplus N$. 设$Q$为沿$N$在$\mathrm{Ker}(T-\lambda)^k$上的投影. 方程$(T-\lambda)^k x = y$在$N$内有唯一解；因此$[(T-\lambda)_{|N}^k]^{-1}$存在（由$\mathrm{Im}(T-\lambda)^k$到$N$上）且有界. 定义$\varphi_k = Q\varphi_{nj}$，则$\varphi_{nj} - \varphi_k = (1-Q)\varphi_{nj} \in N$，于是

$$\|\varphi_{nj} - \varphi_k\| \leqslant c\|(T-\lambda)^k(\varphi_{nj} - \varphi_k)\|.$$

由于$\Theta(M, M_n)$是ε_n阶的，我们可求得$\widetilde{\varphi} \in M$使得$\|\varphi_{nj} - \widetilde{\varphi}\| \leqslant c\varepsilon_n$.

$$\|[(T-\lambda)^k - (T_n-\lambda)^k]\varphi_{nj}\|$$

$$= \|\sum_{i=0}^{k-1}(T_n-\lambda)(T-T_n)(T-\lambda)^{k-i-1}[\varphi_{nj} - \widetilde{\varphi} + \widetilde{\varphi}]\|$$

$\leqslant c\varepsilon_n$.

对 $j \leqslant k$,

$$\|(T_n-\lambda)^k\varphi_{nj}\| = \|\sum_{i=k-j+1}^{k} c_k^i(\lambda_n-\lambda)^i(T_n-\lambda_n)^{k-i}\varphi_{nj}\|$$

$$\leqslant c|\lambda-\lambda_n|^{k-j+1}$$

由定理6.7, $|\lambda-\lambda_n|\leqslant c\varepsilon_n^{1/l}$, 于是

$$\operatorname{dist}(\varphi_{nj}, E_k)\leqslant\|\varphi_{nj}-\varphi_k\|\leqslant c\|[(T-\lambda)^k-(T_n-\lambda)^k]\varphi_{nj} + (T_n-\lambda)^k\varphi_{nj}\|\leqslant c\varepsilon_n^{(k-j+1)/l}.$$

6.9 $x=R(z)f$, $x_n=R_n(z)f$. $x-x_n=(R(z)-R_n(z))f = R_n(z)(T_n-T)R(z)f=R_n(z)(T_n-T)x$, $(T_n-T)x = (T_n-z)x+zx-Tx=(T_n-z)x-f$。同时 $x-x_n=R(z)(T_n-T)R_n(z)f=R(z)(T_n-T)x_n$, $(T_n-T)x_n=(T_n-z)x_n+(z-T)x_n=f-(T-z)x_n$。于是得 $\|x-x_n\|\leqslant\|R_n(z)\|\|(T_n-T)x\|$ (先验界) 且 $\|x-x_n\|\leqslant\|R(z)\|\|(T_n-T)x_n\|$ (后验界). $\|R_n(x)\|$、$\|R(z)\|$相当于条件数.

6.10 利用练习6.9和引理6.4. 对 T, $T_n\in\mathscr{L}(x)$, 有 $c_1\|(T_n-T)x\|\leqslant\|x-x_n\|\leqslant c_2\|(T_n-T)x\|$; 即

$$\|x-x_n\|=O(\|(T_n-T)x\|), \text{ 或 } O(\|(T_n-T)x_n\|).$$

$c_1'\|(1-P_n)(T_n-T)\varphi\|\leqslant\|(1-P_n)\varphi\|\leqslant c_2'\|(T_n-T)\varphi\|$, $\varphi\in\operatorname{Ker}(T-\lambda)$,

$c_1''\|(1-P)(T-T_n)\varphi_n\|\leqslant\|(1-P)\varphi_n\|\leqslant c_2''\|(T-T_n)\varphi_n\|$, $\varphi_n\in\operatorname{Ker}(T_n-\lambda_n)$.

6.11 $\pi_n(T-\lambda_n)\varphi_n=0 \Longleftrightarrow \pi_n'(T-\lambda_n)\varphi_n=0$. 由引理6.9, 利用 $\|(1-\pi_n')P\|\leqslant c\delta(M, X_n)$ 可得到界. 但 $\|(1-\pi_n')f\|\leqslant c\|(1-\pi_n)(K-\alpha)^{-1}f\|$, $f\in X$. 因此 $\|(1-\pi_n')P\|\leqslant c\delta((K-\alpha)^{-1}M, Y_n)$.

6.12 引用定理6.7的证明, 其中 $\|A-B_n\|=O(\alpha_n\alpha_n^*)$.

对本征值φ_n，有

$$\mathrm{dist}(\varphi_n, \mathrm{Ker}(T-\lambda)) \leqslant \|(1-Q)\varphi_n\| \leqslant c(a_n + |\lambda_n - \lambda|)$$
$$\leqslant c\max(a_n,\ (a_n a_n^*)^{1/l}).$$

6.13 $\varepsilon_n = \|(1-\pi_n)TP\| \leqslant \|T\| a_n$,

$\varepsilon_n^* = \|T^*(1-\pi_n^*)P^*\| \leqslant \|T\| a_n^*$.

由 $\mathrm{tr}(T-T_n)P = \Sigma_i \langle (1-\pi_n)Tx_i,\ x_i^* \rangle$

$= \Sigma_i \langle (1-\pi_n)PTx_i,\ (1-\pi_n^*)x_i^* \rangle$

得 $|\mathrm{tr}(T-T_n)P| \leqslant c\, a_n a_n^*$.

6.14 由命题4.6，$\|x - x_n^s\| \leqslant c\|T(1-\pi_n)x\|$.

$$T(1-\pi_n)x(t) = \int_a^b k(t,\ s)(1-\pi_n)x(s)ds$$

$$= ((1-\pi_n)x, \overline{k}_t) = ((1-\pi_n)x, (1-\pi_n)\overline{k}_t).$$

由于

$$|((1-\pi_n)x, (1-\pi_n)\overline{k}_t)| \leqslant (\sup_{a<t<b} \|(1-\pi_n)k_t\|_2)\|(1-\pi_n)x\|_2.$$

所以$\|x - x_n^s\| \leqslant ch^{2r+2}$

6.15 由习题5.38 的解得 $\mathrm{dist}(u', M) \leqslant \|\phi - u'\| \leqslant c\|(1-\pi_n)T\|\|\phi - \varphi_n\|$，其中$\|\varphi_n - \phi\| = \|(P_n - 1)\phi\| \leqslant \|(P_n - P)P\|\|\phi\| \leqslant a_n\|\phi\|$. $\|\phi\| = |\langle P\varphi_n,\ \varphi_n^* \rangle|^{-1}\|P\varphi_n\|$.
因为$\|(1-\pi_n\|T\| \to 0$，对充分大的n，有

$$|\langle P\varphi_n,\ \varphi_n^* \rangle| > \frac{1}{2} \text{ 且 } \|\phi\| \leqslant 2\|P\|.$$

由定理6.12，

$\mathrm{dist}(\widetilde{\varphi}_n,\ M) \leqslant \|P\widetilde{\varphi}_n - \widetilde{\varphi}_n\| = \|(P - P_n)P_n\|\|\widetilde{\varphi}_n\| \leqslant c\|T(1-\pi_n)\|a_n\|\widetilde{\varphi}_n\|$. 当$\pi_n^* \to 1$时，$u^1$可以改进$\widetilde{\varphi}_n$.

6.16　由 $|a(u,v)|\leqslant\beta\|u\|_V\|v\|_V$, $\mathscr{Re}\,a(u,u)\geqslant\alpha\|u\|_V^2$, 且 $a(u-u_n,\ u-u_n)=a(u-u_n,\ u-v_n)$, $\forall v_n\in V_n$, 于是得 $\|u-u_n\|_V\leqslant(\beta/\alpha)\|u-v_n\|_V$, $\forall v_n\in V_n$. 因此

$$\|u-u_n\|_V\leqslant(\beta/\alpha)\inf_{v_n\in V_n}\|u-v_n\|_V=c\delta_n(u).\ \text{则}$$

$$\delta_V(M,\ V_n)=\sup_{\substack{n\in M\\ \|u\|_V=1}}\delta_n(u)=\max_{\substack{n\in M\\ \|u\|_V=1}}\delta_n(u).$$

6.17　令 $\nu:=1/\lambda$. 对 $u\in V$, 范数 $\|u\|_a=\sqrt{a(n,u)}$ 等价于 $\|\cdot\|_V$. $\widetilde{B}_n=\pi_n^aB\pi_n^a$ 相应于内积 $(\cdot,\ \cdot)_a$ 是自伴的. 因此

$$\operatorname{dist}(\nu,\ \sigma(\widetilde{B}_n))=\inf_{\substack{y\in V\\ \|y\|_a=1}}\|(\widetilde{B}_n-\nu)y\|_a\leqslant\inf_{\substack{y\in V_n\\ \|y\|_a=1}}\|(\widetilde{B}_n-\nu)y\|_a$$

$$\leqslant\inf_{\substack{y\in V_n\\ \|y\|_a=1}}\|A-\nu)y\|_a=\inf_{\substack{y\in V_n\\ \|y\|_a=1}}\|(A-\nu)(y-x)\|_a\quad\forall x\in M$$

$$\leqslant c\sup_{\substack{x\in M\\ \|x\|_w=1}}\inf_{y\in v_a}\|y-x\|_V\leqslant c\sup_{\substack{X\in M\\ \|x\|_V=1}}\operatorname{dist}_V(x,V_n)=c\delta_V(M,\ V_n).$$

6.18　由于问题等价于 $\lambda Bu=u$, 其中 $B\in\mathscr{L}(V)$, 且逼近由 π_n^a 确定, 定理6.13给出的误差界成立.

6.19　定义

$$v\in H_2\mapsto|v|_2:=\sup_{\substack{u\in H_1\\ u\neq0}}\frac{|a(u,v)|}{\|u\|_1},$$

$|\cdot|_2$ 是 H_2 的范数且因为 a 是连续的 $|v|_2\leqslant\beta\|v\|_2$. 我们希望证明对 $\alpha>0$, $|v|_2\geqslant\alpha\|v\|_2$, 这是 $(H_2,\ |\cdot|_2)$ 完备的充分条件. 对 $u\in H_1$, 利用 $\langle u,\ Uv\rangle_1=a(u,\ v)$ 定义 $U:H_2\to H_1^*$. 若 $\{v_n\}$ 是 $(H_2,\ |\cdot|_2)$ 中的Cauchy序列, Uv_n 是 H_1^* 内的Cauchy 序列, 且 $Uv_n\to l\in H_1^*$. 若 U 是映上的, 存在 $v\in H_2$ 使得 $l=Uv$. $U^*:H_1\to H_2^*$ 满足对 $u\in H_1$, $v\in H_2$, $\langle U^*u,v\rangle_2=\langle u,\ Uv\rangle_1=a(u,\ v)$. 由 (6.6), 得 $\|U^*u\|_{H_2^*}\geqslant\alpha\|u\|_{H_1}$, u

$\in \mathrm{Dom}U^*$，这等价于U是映上的。

6.20　$u_h=\Sigma_{i=1}^N q_i^h e_i^h \Rightarrow a(u_h,\ f_j^h)=\Sigma_{i=1}^N q_i^h a(e_i^h,\ f_j^h)$且$b(u^h, f_j^h)=\Sigma_{i=1}^N q_i^h b(e_i^h,\ f_j^h)$，$j=1,\ \cdots,\ N$。$a(u_h,\ v_h)=\lambda_h b(u_h,\ v_h)$，$\forall v_h \in s_{2h}$，等价于$\widetilde{A}^h q_h=\lambda_h \widetilde{B}^h q_h$。若$\widetilde{A}^h$是奇异的，在$s_{1h}$内存在$x_h=\Sigma_{i=1}^N x_i^h e_i^h \neq 0$使得$\widetilde{A}^h x_h=0=(a(x_h,\ f_j^h))_{j=1}^N$，因此$a(x_h,\ v_h)=0$，$\forall v_h \in s_{2h}$，且不满足(6.9)。

6.21　$F=TP_{\restriction M}=T_{\restriction M}: M \to M$，$G_n'=P_{(n)}T_n P_{(n)}^{-1}$：$M \to M$，$F_n'=P_{(n)}^{-1}TP_{(n)}: M_n \to M_n$，$G_n'=T_{n \restriction M_n}: M_n \to M_n$.

$$P_{(n)}(F_n'-G_n')P_{(n)}^{-1}=P_{(n)}P_{(n)}^{-1}TP_{(n)}P_{(n)}^{-1}$$

$$-P_{(n)}T_{n\restriction M_n}P_{(n)}^{-1}$$

$$=T_{\restriction M}-P_{(n)}T_n P_{(n)}^{-1}=F-G_n''.$$

$$\|F-G_n''\| \leqslant c\,\|F_n'-G_n'\|$$

且

$\|F'-G_n'\|=\max(\|P_{(n)}^{-1}P_{(n)}(T-T_n)\psi\|,\ \psi \in M_n, \|\psi\|=1) \leqslant c\eta_n$。

6.22　将Wilkinson (1965，P81) 中的方法用于在M的某个基下F和G_n''的$m\times m$矩阵表示。

6.23　由习题6.2，$\|(P-P_n)P\| \leqslant c\Theta(M,\ M_n) \leqslant c\eta_n$。

6.24　$((T-\alpha)x,\ (T-\alpha))x=\|Tx\|^2-(\alpha+\overline{\alpha})P+\alpha\overline{\alpha}$，$((T-\rho)x,\ (T-\rho)x)=\|Tx\|^2-\rho^2$，$\|(T-\alpha)x\|^2-\|(T-\rho)x\|^2=|\alpha-\rho|^2 \geqslant 0$。参见习题1.80。

6.25　若T_n是自伴的，$\varphi_n=\varphi_n^*$，$(\varphi_n,\ \varphi_n)=1$，$\rho_n=(T\varphi_n,\ \varphi_n)=\xi_n$. 由习题6.24，$|\lambda-\rho_n| \leqslant c\|(T-\rho_n)\varphi_n\|^2 \leqslant c\|(T-\lambda_n)\varphi_n\|^2$并由引理6.16，当$T_n$不是自伴的$|\lambda-\xi_n| \leqslant$

$c\|(T-\lambda_n)\varphi_n\|\|(T-\overline{\lambda}_n)\varphi_n^*\|$.

6.26 $\xi_n=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\langle Tx_{in}, x_{in}^*\rangle$.

$$\hat{\lambda}_n=\frac{1}{m}\operatorname{tr}T_nP_n=\frac{1}{m_i}\sum_{i=1}^{m}\langle T_nx_{in}, \quad x_{in}^*\rangle$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\langle \pi_nT\pi_nx_{in}, \ x_{in}^*\rangle$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\langle Tx_{in}, \ x_{in}^*\rangle.$$

因为$\pi_nx_{in}=x_{in}$，$\pi_n^*x_{in}^*=x_{in}^*$.

6.27 在习题5.32中，我们求得$\lambda^{1G}=\lambda^{0G}$，$\varphi^{1G}=\varphi_n^s$. 于是$\lambda^{2G}=\langle T\varphi^{1G}, \varphi_n^*\rangle=\langle T\varphi_n^s, \quad \varphi_n^*\rangle=\langle T\widetilde{\varphi}_n, \quad \varphi_n^*\rangle=\widetilde{\lambda}_n$.

6.28 由于T是自伴的，π_n是正交的，

$$\eta_n=\eta_n^*\leqslant\|(1-\pi_n)T\|\text{且 }|\lambda-\widetilde{\lambda}_n|\leqslant c\|(1-\pi_n)T\|^3.$$

$\|(T-\lambda_n)\widetilde{\varphi}_n\|=\|(T-T\pi_n)\widetilde{\varphi}_n\|\leqslant\|T(1-\pi_n)\|\|(1-\pi_n)$ $\cdot T(1/\lambda_n)\varphi_n\|\leqslant c\|(1-\pi_n)T\|^2$,

$$|\lambda-\widetilde{P}_n|\leqslant c\|(T-\widetilde{P}_n)\widetilde{\varphi}_n\|^2\leqslant c\|(T-\lambda_n)\widetilde{\varphi}_n\|^2 \text{（习题6.24）}$$
$$\leqslant c\|(1-\pi_n)T\|^4.$$

6.29 $A=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\ \varepsilon & a\end{pmatrix}$有两个本征值满足$\lambda(a-\lambda)+\varepsilon^2=0$. $x=e_1$，$\rho=0$，且$|\lambda|=\varepsilon^2/|a-\lambda|=\varepsilon^2/\delta(\rho)$。设$\theta$为本征向量$e_1$和$e_2$所夹的锐角，$\tan\theta=|\lambda|/|\varepsilon|=|\varepsilon|/|a-\lambda|=|\varepsilon|/\delta(\rho)$。

6.30 由推论6.20，$-\varepsilon \leqslant \lambda - \rho \leqslant \varepsilon$。由定理6.21，$-\varepsilon^2/(\overline{\lambda} - \rho) \leqslant \lambda - \rho \leqslant \varepsilon^2/(\rho - \underline{\lambda})$。若$\varepsilon^2/(\overline{\lambda} - \rho) < \varepsilon$，且$\varepsilon^2/(\rho - \underline{\lambda}) < \varepsilon$，即若$\varepsilon < \overline{\lambda} - \rho$且$\varepsilon < \rho - \underline{\lambda}$，（因此若$\varepsilon^2 < (\overline{\lambda} - \rho)(\rho - \lambda)$），则它改进了前者.

6.31 设已知三个向量x_i，$\|x_i\| = 1$，$i = 1, 2, 3$，使得Rayleigh 商$\rho_i = (Tx_i, x_i)$ 满足$\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$。我们假设圆盘$\{z; |z - \rho_i| \leqslant \varepsilon_i = \|(T - \rho_i)x_i\|\}$是不交的，且在其间不存在$\sigma(T)$的点。于是存在$\lambda_i \in \sigma(T)$使得$|\lambda_i - \rho_i| \leqslant \varepsilon_i$，$i = 1, 2, 3$。若$\delta_2 := \text{dist}\ (\rho_2, \sigma(T) - \{\lambda_2\})$，我们有$\delta_2 \geqslant \min(\rho_2 - \rho_1 - \varepsilon_1, \rho_3 - \varepsilon_3 - \rho_2)$。

6.32 $\|Q\| = \sup\limits_{t \in X} \dfrac{\|Qt\|}{\|t\|} = \sup\limits_{t \in X} \dfrac{|\langle t, y\rangle|}{\|t\|} = \|y\|$，$1 = \langle x, y\rangle \leqslant \|y\|$。

6.33 $(T - \zeta)Q$为有限秩且定义域为X，定义$Q(T - \zeta)t = \langle (T - \zeta)t, y\rangle x = \langle t, (T^* - \overline{\zeta})y\rangle x$，$\forall t \in X$. 于是$H$定义于$X$且为有限秩的，$\widetilde{H} \in \mathscr{L}(X)$. $T - \widetilde{H}$在定义域D上是闭的[见Kato（1976，P.164）].

6.34 $\widetilde{T}x = \zeta x + (1 - Q)T(1 - Q)x = \zeta x$. $\widetilde{T}^* = \overline{\zeta}Q^* + (1 - Q^*)T^*(1 - Q^*)$，这里$Q^*$为沿$\{x\}^\perp$在$\{y\}$上的投影. 类似地，$\widetilde{T}^* y = \overline{\zeta}y$. 在习题3.24 中可证明$\sigma(\widetilde{T}) = \{\xi\} \cup \sigma((1 - Q) \cdot T_{\{y\}^\perp \cap X})$，其中两个集合是不相交的. 则$\zeta$是$\widetilde{T}$的孤立本征值，且是单的，$Q$是相伴谱投影.

6.35 $(1 - Q)(T - \zeta)(1 - Q) = (\widetilde{T} - \zeta)(1 - Q)$。若$\zeta$是$\widetilde{T}$的单本征值，因为$\text{Ker}(\widetilde{T} - \zeta) = QX$与$(1 - Q)X$的交是0，所以$\mathring{T}_\zeta$是正则的。这就证明了$\Sigma \in \mathscr{L}(X)$. 相应于$\zeta$的$\widetilde{T}$的约

化预解式为$\Sigma(z)=(\widetilde{T}-z)^{-1}(1-Q)$。

$$\Sigma(\zeta)=\lim_{z\to\zeta}[(\widetilde{T}-z)^{-1}(1-Q)] = \mathring{T}_{\zeta}^{-1}(1-Q)=\Sigma.$$

6.36 $(1-Q)Tx=(1-Q)(T-\zeta)x=Tx-QTx$

$$=(T-\zeta)x.$$

6.37 $\widetilde{H}Q=(T-\zeta)Q+Q(T-\zeta)Q=(T-\zeta)Q.$

$$(1-Q)\widetilde{H}Q=(1-Q)(T-\zeta)Q=(T-\zeta)Q-Q(T-\zeta)Q$$
$$=(T-\zeta)Q.$$

$$\widetilde{H}(1-Q)=Q(T-\zeta)(1-Q)=Q(T-\zeta)-Q(T-\zeta)Q$$
$$=Q(T-\zeta).$$

$$Q\widetilde{H}(1-Q)=Q(T-\zeta).$$

6.38 我们知道Q和$1-Q$与$\widetilde{R}(z)$可交换，

$$\widetilde{H}\widetilde{R}(z)\widetilde{H}\widetilde{R}(z)QX=\widetilde{H}\widetilde{R}(z)\widetilde{H}Q\widetilde{R}(z)X$$
$$=\widetilde{H}\widetilde{R}(z)(1-Q)\widetilde{H}Q\widetilde{R}(z)X$$
$$=\widetilde{H}(1-Q)\widetilde{R}(z)\widetilde{H}Q\widetilde{R}(z)X=Q\widetilde{H}(1-Q)\widetilde{R}(z)\widetilde{H}\widetilde{R}$$
$$\cdot(z)QX\subseteq QX,$$

并且，

$$\widetilde{H}\widetilde{R}(z)\widetilde{H}\widetilde{R}(z)(1-Q)X=\widetilde{H}\widetilde{R}(z)\widetilde{H}(1-Q)\widetilde{R}(z)X$$
$$=\widetilde{H}\widetilde{R}(z)Q\widetilde{H}(1-Q)\widetilde{R}(z)X$$
$$=\widetilde{H}Q\widetilde{R}(z)\widetilde{H}\widetilde{R}(z)(1-Q)X$$
$$=(1-Q)\widetilde{H}Q\widetilde{R}(z)\widetilde{H}\widetilde{R}(z)(1-Q)X\subseteq(1-Q)X.$$

6.39 $\sigma(T)=\sigma(T_{\restriction M})\cup\sigma(T_{\restriction M})$.

$$r_\sigma(T)=\max_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|=\max(\max_{\lambda\in\sigma(T_{\restriction M})}|\lambda|,\ \max_{\lambda\in\sigma(T_{\restriction N})}|\lambda|)$$
$$=\max(r_\sigma(T_{\restriction M}),\ r_\sigma(T_{\restriction N})).$$

6.40 在定理6.27中，我们有等式 $\varphi-x=-(1-(\lambda-\zeta)$

$\Sigma)^{-1}\Sigma u$。因此 $\varphi - x + \Sigma u = [1-(1-(\lambda-\zeta)\Sigma)^{-1}]\Sigma u$。记 $1=(1-(\lambda-\zeta)\Sigma)(1-(\lambda-\zeta)\Sigma)^{-1}$，则 $\varphi - x + \Sigma u = -(\lambda-\zeta)\Sigma(1-(\lambda-\zeta)\Sigma)^{-1}\Sigma u$.

6.41 $\lambda_2 = t_r(-\widetilde{H}\Sigma\widetilde{H}Q)$；因此 $|\lambda-\zeta+\langle\Sigma u, v\rangle| \leqslant \Sigma_{k=2}^{\infty}|\lambda_{2k}| \leqslant (g(\widetilde{r})-1)|\langle\Sigma u, v\rangle|$。由习题6.40及定理6.27中最后两个不等式，得

$$\|\varphi - x + \Sigma u\| \leqslant |\lambda-\zeta|\,\|\Sigma\|\,\|(1-(\lambda-\zeta)\Sigma)^{-1}\|\,\|\Sigma u\|$$

$$\leqslant |\lambda-\zeta|\,\|\Sigma\|\frac{1}{1-|\lambda-\zeta|\,\|\Sigma\|}\|\Sigma u\|$$

$$\leqslant \frac{g(\widetilde{r})\widetilde{r}}{1-g(\widetilde{r})\widetilde{r}}\|\Sigma u\|$$

$$=(-1+\frac{1}{1-g(\widetilde{r})\widetilde{r}}\|\Sigma u\|$$

$$=(g(\widetilde{r})-1)\|\Sigma u\|.$$

$(g(\widetilde{r})-1)/\widetilde{r}\to 1$；即 $g(\widetilde{r})-1\sim\widetilde{r}$。当 u 不是小的，x 不是 T 的逼近本征向量，但校正向量 $x-\Sigma u$ 却是.

6.42 只要 ε 或 ε^* 是小量，则 $\varepsilon\varepsilon^*$ 是小量，我们首先假设 ε 是小量，考虑分解：

$$T = \underbrace{\zeta Q + QT(1-Q) + (1-Q)T(1-Q)}_{T'} + \underbrace{(T-\zeta)Q}_{H'}$$

$$= T' + H'$$

$\|H'\| = \|y\|\varepsilon$。$\zeta$ 是 T' 的单本征值且有谱投影 Q' 使得 $Q'x = x$。因此对充分小的 ε，$\|Px-x\|\leqslant c\varepsilon<1$；即，$|\langle Px, y\rangle - 1| < 1 \Rightarrow \langle Px, y\rangle \neq 0$。

若 ε^* 是小量，考虑 $T = T'' + H''$，其中 $H'' = QT(1-Q)$，$\|H''\| = \|y\|\varepsilon^*$。类似地有 $\|P^*y - y\| < 1$ 且 $\langle x, P^*y\rangle =$

$\langle Px, y\rangle \neq 0$.

6.43 $\widetilde{T}^n = P_n T P_n + (1-P_n)T(1-P_n)$; $\widetilde{H}^n = (1-P_n)TP_n + P_n T(1-P_n)$，其中$P_n = \langle \cdot, \varphi_n^* \rangle \varphi_n$，且$T = \widetilde{T}^n + \widetilde{H}^n$.
由假设 $P_n \xrightarrow{cc} P$. $\widetilde{H}^n \xrightarrow{\bullet} 0$，$\|(1-P_n)(T-T_n)P_n\| \to 0$，
$P_n T(1-P_n) = (P_n - P)T(1-P_n) + TP(P-P_n)$，这表明
$\widetilde{H}^n \xrightarrow{cc} 0$.

$$\zeta_n = \mathrm{tr}\, TP_n = \langle T\varphi_n, \varphi_n^* \rangle.$$

引理5.34中的公式定义了迭代格式$\nu^0 = \zeta_n$，$\eta^0 = \varphi_n$，其中Q，$T - T_n$及$R_n(z)$分别用P_n，$\widetilde{H}^n$，及$(\widetilde{T}^n - z)^{-1} = \widetilde{R}^n(z)$代替。

由$\widetilde{H}^n$的构造知$\nu^{2k+1} = 0$，对$k > 1$，$\eta^{2k} = 0$. 由定理6,27及命题6.28，我们有，当$a \geqslant \|\widetilde{R}^n(\xi_n)(1-P_n)\|$时，

$$\max_{z\in\Gamma} r_\sigma^2(\widetilde{H}^n \widetilde{R}^n(z)) = 2a\max_{z\in\Gamma} |\langle \widetilde{H}^n \widetilde{R}^n(z) \widetilde{H}^n \varphi_n, \varphi_n^* \rangle| =$$

$\rho_n \to 0$，

$$r_\sigma(P_n(P-P_n)P_n) = \rho_n/(1-\rho_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

6.44 因为T和它的逆(若$0\in\rho(T)$)的谱投影相等，且

$$\frac{1/\lambda - 1/\mu_{in}}{1/\lambda} = \frac{\mu_{in} - \lambda}{\mu_{in}} = \frac{\lambda}{\mu_{in}} \quad \frac{\mu_{in} - \lambda}{\lambda},$$

其中$\lambda/\mu_{in} \to 1$，$n \to \infty$.

6.45 $\alpha_n = \alpha_n^* = \|(1-\pi_n)P\| \geqslant \max_i \|(1-\pi_n)P\varphi_{in}\|$，$l = 1$，$g = m$。命题6.30表明习题6.12中的界不能改进。

6.46 $\widetilde{T}_n = PT_nP + (1-P)T_n(1-P)$，$\widetilde{H}_n = (1-P)T_n P + PT_n(1-P)$，其中$P = (\cdot, \varphi)\varphi$，$T_n = \widetilde{T}_n + \widetilde{H}_n$。因为$\widetilde{H}_n = (1-P)(T_n - T)P + P(T_n - T)(1-P)$，$\|\widetilde{H}_n\| \to 0$。$\zeta_n = \mathrm{tr}\, T_n P = \lambda + \mathrm{tr}(\pi_n - 1)TP = \lambda + \lambda\|(\pi_n - 1)\varphi\|^2$。设$\Gamma$是孤立$\lambda$的 Jordan 曲线. 对充分大的$n$，$\zeta_n$是$\Gamma$内$\widetilde{T}_n$的唯一的本征

值，这是因为$\| PT_n P - PTP\| = \|P(\pi_n - 1)TP\| \to 0$。$\widetilde{\Sigma}_n = (1-P)[(\widetilde{T}_n - \zeta_n)_{|\{\varphi\}^\perp}]^{-1}(1-P)$。

$$\|P(\pi_n - 1)T\widetilde{\Sigma}_n(\pi_n - 1)T\varphi\| \leqslant c\,\|(\pi_n - 1)T\|\,\|(\pi_n - 1)\varphi\|^2.$$

于是由定理6.27

$$|\lambda_n - \zeta_n| = |\lambda_n - \lambda - \lambda\|(\pi_n - 1)\varphi\|^2| \leqslant c\|(\pi_n - 1)T\|\,\|(\pi_n - 1)\varphi\|^2$$

且

$$\left|\frac{\lambda_n - \lambda}{\lambda\|(\pi_n - 1)\varphi\|^2} - 1\right| \leqslant c\|(\pi_n - 1)T\| \to 0.$$

第 七 章

7.1　由定理7.2中用到的恒等式得：

$$x = \frac{1}{z^\alpha} T^\alpha x - [\frac{1}{z^\alpha}T^{\alpha-1}f + \cdots + \frac{1}{z}f]$$

7.2　若T由(7.2)定义，则T^*是积分算子，且其核$\overline{k(s,t)}$关于t和s是属于类$\mathfrak{S}$ (α,γ)的．由于P由关于t，s的连续度为α的光滑核$p(s,t)$定义，则P^*也是如此。$T^*(1-P^*)+\bar{\lambda}_n P^*$的核$k_n^*(t,s)$是$T^*(1-P^*)$的核与$P^*$的核的$\bar{\lambda}_n$倍之和。它关于$t$属于类$\mathfrak{S}$，且对$n$一致。

7.3　$\widetilde{\psi}_n \in \widetilde{M}_n$相应于陡度为$l_n$的本征值$\lambda_n$。

$$[(1-P)\widetilde{\psi}_n](t) = \left[\sum_{j=1}^{l_n} S^j(\lambda_n)T(1-\pi_n)\right.$$

$$\left.(T\pi_n - \lambda_n)^{j-1}\widetilde{\psi}_n\right](t)$$

$$= \sum_{j=1}^{l_n} (S^j(\lambda_n)(1-\pi_n)(T\pi_n-\lambda_n)^{j-1}\widetilde{\psi}_n, \widetilde{k}_t)$$

$$\sum_{j=1}^{l_n} ((l-\pi_n)(T\pi_n-\lambda_n)^{j-1}\widetilde{\psi}_n,\ l_t^{(j)}),$$

其中 $l_t^{(j)}$是$(T^*-\bar{\lambda}_n)^j(1-P^*)l_t^{(j)}=(1-P^*)\bar{k}_t$ 的解。对 $j=1, \cdots, l_n$,可证$l_t^{(j)}$是属于类 $\mathfrak{S}(\alpha,\gamma)$且对$n$一致(见习题7.2)。注意到 $(T\pi_n-\lambda_n)^{j-1}\widetilde{\psi}_n \in M_n$,于是如定理 7.9 可得 $|\langle(1-\pi_n^1)\xi_n,\ l_t^{(j)}\rangle|$ 的界,其中$\widetilde{\xi}_n \in \widetilde{M}_n$。

7.4 见习题6.12.

7.5
$$\begin{aligned}
y-\widetilde{y}_n &= (1-zA_z)^{-1}f - zA_z y_n - f\\
&= [(1-zA_z)^{-1}-1]f - zA_z y_n\\
&= [(1-zA_z)^{-1}-(1-zA_z)^{-1}(1-zA_z)]f - zA_z y_n\\
&= z(1-zA_z)^{-1}A_z f - zA_z y_n\\
&= z(1-zA_z)^{-1}A_z f - z(1-zA_z)^{-1}(1-zA_z)A_z y_n\\
&= z(1-zA_z)^{-1}\ [A_z f-(1-zA_z)A_z y_n].
\end{aligned}$$

但$A_z f = A_z\widetilde{y}_n - zA_z^2 y_n$,又因为$A_z$和$(1-zA_z)^{-1}$可交换,则

$$\begin{aligned}
y-\widetilde{y}_n &= z(1-zA_z)^{-1}[A_z\widetilde{y}_n - zA_z^2 y_n - A_z y_n + zA_z^2 y_n]\\
&= z(1-zA_z)^{-1}A_z(\widetilde{y}_n-y_n)\\
&= zA_z(1-zA_z)^{-1}\ (\widetilde{y}_n-y_n).
\end{aligned}$$

因为$\widetilde{y}_n = zA_z y_z + f$,于是$\pi_n\widetilde{y}_n = \pi_n zA_z y_n + \pi_n f = \pi_n y_n$. 因此$\pi_n(\widetilde{y}_n-y_n)=0$,于是 $(1-\pi_n)(\widetilde{y}_n-y_n)=\widetilde{y}_n-y_n$,且得:

$$y-\widetilde{y}_n = zA_z(1-zA_z)^{-1}(1-\pi_n)(\widetilde{y}_n-y_n).$$

7.6 注意到$T=(1-K)G^{-1}=(1-zA_z)A_z^{-1}$; $u_n=Gx_n=A_zy_n$, $\widetilde{x}_n=Kx_n+f$, $\widetilde{y}_n=zA_zy_n+f$. 于是$x_n-\widetilde{x}_n=(1-K)x_n-f=(1-K)G^{-1}u_n+y_n-\widetilde{y}_n-(1-zA_z)A_z^{-1}u_n=y_n-\widetilde{y}_n$.

7.7 我们解得 $y-\widetilde{y}_n=zA_z(1-zA_z)^{-1}(1-\pi_n)\widetilde{x}_n$，这是类似于引理7.1中的公式，$A_z$的核属于类 $\mathfrak{S}(\alpha+1, p-2)$.

7.8 由习题4.67，因为φ_n满足

$$(1-\pi_nK)\varphi_n-\lambda_n\pi_nG\varphi_n=0;$$

我们有 $\pi_n\widetilde{\varphi}_n=\pi_nK\varphi_n+\lambda_n\pi_nG\varphi_n=\varphi_n$; 即$\varphi_n=\lambda_nU_n\varphi_n$.

由于$\widetilde{\varphi}_n=K\varphi_n+\lambda_nG\varphi_n$，且$\varphi_n=\pi_n\widetilde{\varphi}_n$，我们有

$$\widetilde{\varphi}_n=K\pi_n\widetilde{\varphi}_n+\lambda_nG\pi_n\widetilde{\varphi}_n;(1-K\pi_n)\widetilde{\varphi}_n=\lambda_nG\pi_n\widetilde{\varphi}_n;$$

因此 $\widetilde{\varphi}_n=\lambda_n\widetilde{U}_n\widetilde{\varphi}_n$.

7.9 $U-U_n=U-(1-\pi_nK)^{-1}\pi_nG$. 但$G=(1-K)U$，

故
$$\begin{aligned}U-U_n&=U-(1-\pi_nK)^{-1}\pi_n(1-K)U\\&=(1-\pi_nK)^{-1}[1-\pi_nK-\pi_n(1-K)]U\\&=(1-\pi_nK)^{-1}(1-\pi_n)U.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U-\widetilde{U}_n&=U-(1-K\pi_n)^{-1}G\pi_n\\&=U-(1-K\pi_n)^{-1}(1-K)U\pi_n\\&=(1-K\pi_n)^{-1}[U(1-\pi_n)+K(U\pi_n\\&\quad-\pi_nU)].\end{aligned}$$

但 $U-KU=G$; 因此

$$\begin{aligned}&U(1-\pi_n)+K(U\pi_n-\pi_nU)\\&=U-G\pi_n-K\pi_nU\\&=U-G+G-G\pi_n-K\pi_nU\\&=K(U-\pi_nU)+G(1-\pi_n)\\&=K(1-\pi_n)U+G(1-\pi_n).\end{aligned}$$

因此又有$U-\widetilde{U}_n=(1-K\pi_n)^{-1}[K(1-\pi_n)U+G(1-\pi_n)]$.

7.10 例如，$(1-K)^{-1}\in\mathscr{L}(X)$，$G$是紧的蕴涵着$U$是紧

的. $\pi_n \xrightarrow{p} 1$蕴涵

(i) $\|(1-\pi_n)K\| \to 0$且$(1-\pi_n K)^{-1}$一致有界,

(ii) $K\pi_n \xrightarrow{Cc} K$, $(1-K\pi_n)^{-1}$ 一致有界,

(iii) $\|U-U_n\| \to 0$,

(iv) $\widetilde{U}_n \xrightarrow{Cc} U$.

7.11 由于Q是U的谱投影, $QU=UQ$,

$$(U-U_n)Q=(1-\pi_n K)^{-1}(1-\pi_n)QU,$$

$$(U-\widetilde{U}_n)Q=(1-K\pi_n)^{-1}[K(1-\pi_n)QU+G(1-\pi_n)Q].$$

$$\|(U-U_n)Q\| \leqslant c\|(1-\pi_n)Q\|,$$

$$\|(U-\widetilde{U}_n)Q\| \leqslant c[\|K(1-\pi_n)Q\|+\|G(1-\pi_n)Q\|].$$

7.12 由定理6.6得 $\|(1-Q)\varphi_n\| \leqslant c\|(U-U_n)Q\|$, $\|(1-Q)\widetilde{\varphi}_n\| \leqslant c\|(U-\widetilde{U}_n)Q\|$. 再应用前面的习题即得.

7.13 M_n为由$\pi_n(T-\lambda_n)\psi_n=0$确定的不变子空间, $\psi_n \in X_n$是C_n的子空间. 因此$N_n=D^p M_n \subset D^p C_n=\mathbb{P}_{r,\Delta}$.

$\Theta(N,N_n) \leqslant c\|(1-\pi_n)Q\|$, $\Theta(N,\widetilde{N}_n) \leqslant c(\|K(1-\pi_n)Q\| + \|G(1-\pi_n)Q\|$.

7.14
$$\begin{aligned}U-U_n&=(1-K)^{-1}G-U_n\\&=(1-K)^{-1}\pi_n G+(1-K)^{-1}(1-\pi_n)G-U_n\\&=(1-K)^{-1}(1-\pi_n K)U_n+(1-K)^{-1}(1-\pi_n)G\\&\quad-(1-K)^{-1}(1-K)U_n\end{aligned}$$

(注意其中用到$\pi_n G=(1-\pi_n K)U_n$). 因此

$$\begin{aligned}U-U_n&=(1-K)^{-1}[U_n-\pi_n KU_n+(1-\pi_n)G-U_n+KU_n]\\&=(1-K)^{-1}[(1-\pi_n)KU_n+(1-\pi_n)G]\\&=(1-K)^{-1}(1-\pi_n)[G+KU_n].\end{aligned}$$

7.15 见定理6.11的证明.

7.16 利用定理7.23.

7.17 我们知道$\psi_n = A\theta_n$，于是$(1-K)G^{-1}\psi_n = \theta_n$。$\widetilde{\theta}_n = \lambda_n A\theta_n = \lambda_n\psi_n$，$\psi_n = G\varphi_n$，$\widetilde{\varphi}_n = K\varphi_n + \lambda_n G\varphi_n = K\varphi_n + \lambda_n\psi_n$.则

$$\begin{aligned}\varphi_n - \widetilde{\varphi}_n &= (1-K)\varphi_n - \lambda_n\psi_n = (1-K)G^{-1}\psi_n - \widetilde{\theta}_n\\ &= \theta_n - \widetilde{\theta}_n.\end{aligned}$$

7.18 $(1-P)\widetilde{\theta}_n = \lambda_n A\theta_n - \lambda_n PA\theta_n = \lambda_n A\theta_n - \lambda_n AP\theta_n$，$\theta_n - \widetilde{\theta}_n = (1-\lambda_n A)\theta_n$，则$\theta_n = (1-\lambda_n A)^{-1}(\theta_n - \widetilde{\theta}_n)$；因此

$$\begin{aligned}(1-P)\widetilde{\theta}_n &= \lambda_n A(1-\lambda_n A)^{-1}(\theta_n - \widetilde{\theta}_n)\\ &\quad - \lambda_n AP(1-\lambda_n A)^{-1}(\theta_n - \widetilde{\theta}_n)\\ &= \lambda_n A(1-\lambda_n A)^{-1}(1-P)(\theta_n - \widetilde{\theta}_n).\end{aligned}$$

由θ_n的定义又有$\pi_n(\theta_n - \widetilde{\theta}_n) = \pi_n(\theta_n - \lambda_n A\theta_n) = 0$。因此$(1-\pi_n)(\theta_n - \widetilde{\theta}_n) = \theta_n - \widetilde{\theta}_n$，于是

$$\begin{aligned}(1-P)\widetilde{\theta}_n &= \lambda_n A(1-\lambda_n A)^{-1}(1-P)(1-\pi_n)(\theta_n - \widetilde{\theta}_n)\\ &= \lambda_n A(1-\lambda_n A)^{-1}(1-P)(\pi_n - 1)\widetilde{\varphi}_n,\end{aligned}$$

这类似于引理7.1中的公式,其中A的核属于类$\mathfrak{S}(\alpha+1, p-2)$.

7.19 设$g \in X$且u，u_n由$(1-K)u = g$，$\pi_n(1-K)u_n = \pi_n g$定义，因此$(1-K)u_n = \pi'_n g$。于是

$$\begin{aligned}(1-\pi'_n)g &= (1-K)(u-u_n)\\ &= (1-K)(1-\pi_n K)^{-1}(1-\pi_n)(1-K)^{-1}g\\ &= (1-K)(1-\pi_n K)^{-1}[1-\pi_n K - \pi_n(1-K)](1-K)^{-1}g\\ &= (1-K)[1-(1-\pi_n K)^{-1}\pi_n(1-K)](1-K)^{-1}g\\ &= (1-(1-K)(1-\pi_n K)^{-1}\pi_n)g.\end{aligned}$$

因此$\pi'_n g = (1-K)(1-\pi_n K)^{-1}\pi_n g$。

7.20 设$\theta \in M$，$Q(1-K)^{-1}\theta = (1-K)^{-1}p\theta = (1-K)^{-1}\theta \in N$。设$\theta^* \in M^*$，$Q^*(1-K^*)\theta^* = (1-K^*)P^*\theta^* \in N^*$。

7.21 $T\psi=\lambda\mathfrak{N}\psi$，$\psi=G\varphi$等价于$(1-K)\varphi=\lambda L\varphi$；即$\varphi=\lambda(1-K)^{-1}L\varphi=\lambda V\varphi$．$\psi_n=G\varphi_n$是如下方程的解

$$\pi_n(T\psi_n-\lambda_n\mathfrak{N}\psi_n)=0,\ \psi_n\in C_n.$$

$$\pi_n((1-K)\varphi_n-\lambda_n\mathfrak{N}G\varphi_n)=0,$$

$$\varphi_n-\pi_nK\varphi_n-\lambda_n\pi_nL\varphi_n=0,$$

$$(1-\pi_nK)\varphi_n-\lambda_n\pi_nL\varphi_n=0,$$

$$\varphi_n=\lambda_n(1-\pi_nK)^{-1}\pi_nL\varphi_n=\lambda_nV_n\varphi_n.$$

7.22 $V-V_n=V-(1-\pi_nK)^{-1}\pi_n(1-K)V$

$$=(1-\pi_nK)^{-1}[(1-\pi_nK)V-\pi_n(1-K)V]$$

$$=(1-\pi_nK)^{-1}(1-\pi_n)V.$$

但又有

$$V-V_n=(1-K)^{-1}L-V_n$$

$$=(1-K)^{-1}\pi_rL+(1-K)^{-1}(1-\pi_n)L-V_n$$

$$=(1-K)^{-1}[(1-\pi_nK)V_n+(1-\pi_n)L-(1-K)V_n]$$

$$=(1-K)^{-1}[-\pi_nKV_n+(1-\pi_n)L+KV_n]$$

$$(1-K)^{-1}(1-\pi_n)(L+KV_n).$$

7.23 若$\mathfrak{N}=1$,则$L=G$且$R=P=P'$。引理7.26成立，且有$(1-P)\psi_n=(T-\lambda_n)^{-1}(1-P)(\varphi_n-\tilde{\varphi}_n)$
$=S(\lambda_n)(\pi_n-1)\tilde{\varphi}_n$．

7.24 由于$\lambda^k\varphi_n=P_nT\varphi^{k-1}$,(5.16)要求已知$P_n$及$S_n$，仅当$T_n$具有$T_\alpha$，$T_\beta$或在第四章6.1中给出的$T_\gamma$的结构时，即为$\mathscr{P}_n$和$\mathscr{S}_n$。

7.25 见习题1.53。

7.26 引用习题5.38的解，这里用$Q_n=(\cdot,\psi_n)_H\psi_n$代替$P_n$。